

Interview d'Alain Connes par Allyn Jackson

Alain Connes est né le 1er avril 1947 à Draguignan, dans le sud de la France. Après avoir été élève au lycée à Marseille, il entre en 1966 à l'École Normale Supérieure de Paris.

Il passe son doctorat en 1973, sous la direction de Jacques Dixmier.

Au début de sa carrière, Connes a occupé des postes au CNRS (Centre National de la Recherche Scientifique) et à l'Université Paris VI et a également été visiteur à l'Université Queen à Ontario et à l'Institute for Advanced Study de Princeton. Il a été nommé sur la Chaire Léon Motchane à l'IHÉS (Institut des Hautes Études Scientifiques) de Bures-sur-Yvette en 1979, et, en parallèle, sur la Chaire d'Analyse et de Géométrie du Collège de France en 1984. En 2017, il devient Professeur émérite de ces deux postes. Il a également occupé des postes de Professeur distingué à l'Université Vanderbilt et à l'Université d'État de l'Ohio.

En plus de la médaille Fields en 1982, ses honneurs incluent le prix Ampère de l'Académie des Sciences (1980), le prix Crafoord (2001) et la médaille d'or du CNRS (2004).

Connes a fait des avancées majeures dans le domaine des algèbres d'opérateurs, qui ont révolutionné le sujet, et stimulé beaucoup de recherches ultérieures. Cela l'a amené à développer, à partir de la fin des années 1970, une toute nouvelle branche des mathématiques, la géométrie non commutative, qui s'est avérée avoir des liens profonds avec de nombreuses questions fondamentales en mathématiques et en physique. Grâce à ses dizaines de collaborateurs et plus de 250 publications, Connes a eu un impact majeur sur les mathématiques au cours des dernières décennies.

Ce qui suit est le texte édité d'une longue interview de Connes, réalisée en juillet 2020.

Enfance dans le sud de la France

ALLYN JACKSON : Vous êtes né à Draguignan, dans le sud de la France. Pouvez-vous m'en dire davantage sur votre enfance en Provence ?

ALAIN CONNES : Laissez-moi vous raconter comment mes grands-parents sont arrivés là-bas. Mes grands-parents maternels sont tous deux nés à Constantine, en Algérie. Ils sont arrivés en France en 1918, après la naissance de ma mère ; elle est née à Tanger, au Maroc. Quand ils sont arrivés en France, ils ont cherché quelle était la ville la plus saine de France. Et ils ont trouvé que c'était Draguignan !

Mon grand-père était ingénieur, mais il a pris sa retraite assez tôt dans sa vie. Ils ont alors acheté un domaine à Draguignan. Mes parents se sont rencontrés à Draguignan en 1944, quand les Américains sont arrivés au sud de la France à la fin de la guerre, lors de ce qu'on appelle le débarquement. Il y a eu peut-être 1000 parachutistes qui ont sauté sur Draguignan !

Transcription en L^AT_EX et traduction : Denise Vella-Chemla, assistée des outils google, corrigé en juillet 2025.
Article en avant-première, paru en 2021, consultable à cette adresse
<https://celebratio.org/ConnesA/article/842/>.

Ma mère est décédée l'année dernière à 101 ans. Elle et mon père sont décédés tous les deux (il a également vécu jusqu'à 101 ans) dans la maison de Draguignan où je suis né. C'est navrant parce que maintenant, nous vendons cette maison, qui est l'endroit où tout mon subconscient est cartographié.

Ce n'est pas seulement une maison, c'est un domaine avec un grand jardin, un petit bois, des vignes et de très vieux cèdres immenses. Je suis attaché à cet endroit, à cause du calme. C'est un endroit où règne la sérénité.

Quand j'avais huit ans, mon père a décidé que l'éducation à Draguignan n'était pas assez bonne pour nous. Il a donc pris un travail très dangereux à Marseille, en tant que chef d'une escouade de police, dédiée à la répression du trafic d'alcool. De temps en temps, il disparaissait pendant la nuit, lorsqu'il était sur une opération pour arrêter des bandits.

ALLYN JACKSON : L'alcool était-il illégal à l'époque ?

ALAIN CONNES : L'alcool n'était pas illégal, mais il était très taxé, donc il y avait beaucoup de trafic illégal. Heureusement, mon père a quitté ce travail juste au début de l'arrivée de la mafia en 1966. Il n'a pas eu à faire face à la mafia, mais son travail était quand même assez dangereux. Il avait une voiture avec un moteur de course et des officiers à moto avec lui. Il n'a jamais été simple d'arrêter les gens, surtout lorsqu'on doit les arrêter alors qu'ils sont en plein trafic. Nous étions tous stressés chaque fois qu'il devait partir en opération comme ça, pendant la nuit.

ALLYN JACKSON : Votre père était français, n'est-ce pas ?

ALAIN CONNES : Oui. Ses parents étaient originaires du sud-ouest de la France.

ALLYN JACKSON : Quel travail faisait votre père quand vous habitiez Draguignan ?

ALAIN CONNES : À cette époque, mon père était employé par l'administration fiscale dans un travail également lié à l'alcool, supervisant la production de vin dans le sud. Son propre père avait été tué lors de la première Guerre mondiale quand mon père avait un an, donc il n'avait pas connu son propre père.

Il voulait nous donner l'éducation qu'il n'avait pas reçue de son propre père. C'était important pour lui. J'ai deux frères.

Mon frère aîné a créé sa propre entreprise de logiciels, et il est assez riche. Mon jeune frère est médecin et un spécialiste reconnu de la maladie de Crohn ; il est à la retraite maintenant.

Nous avons eu une éducation très dure. Par exemple, pendant les vacances, mon père nous donnait du travail scolaire supplémentaire, et quand l'école reprenait, il ajoutait aux devoirs donnés par les enseignants ses devoirs supplémentaires !

ALLYN JACKSON : Qu'avez-vous ressenti à ce sujet ?

ALAIN CONNES : C'était terrible ! Nous trouvions tous les moyens possibles pour y échapper, bien sûr.

ALLYN JACKSON : Pensez-vous que cela vous a finalement aidé ?

ALAIN CONNES : C'est difficile à dire. Mes deux frères et moi étions assez différents. Mon frère aîné se confrontait à mon père. Je ne m'opposais pas à mon père quant à moi. J'étais plutôt cool, tranquille. Il n'est pas sûr que cette méthode d'éducation soit une bonne recette, mais ça nous a beaucoup influencés. Par exemple, une fois, je suis rentré à la maison et mon père m'a demandé quels avaient été mes résultats à une interrogation de mathématiques que j'avais passée. J'ai répondu : "J'étais deuxième.". Il m'a giflé, parce que je n'étais pas le premier.

ALLYN JACKSON : C'est une pression assez forte.

ALAIN CONNES : Il exerçait beaucoup de pression pour que nous ayions de bons résultats. Mais parce que nous étions trois frères et que nous étions unis, nous trouvions tous les moyens d'y échapper. Par exemple, le jour où nous avons su où mon père cachait les traductions des devoirs de latin qu'il nous donnait à faire, notre vie est devenue beaucoup plus facile ! Il nous demandait de réciter nos leçons deux fois : le jour où on nous avait donné ces leçons à apprendre et une deuxième fois, la veille du jour où nous aurions à les réciter à l'école. Nous les récitions à notre mère, parce qu'alors il était possible de regarder le livre pendant qu'elle cuisinait ! Nous avons donc trouvé toutes sortes d'astuces pour nous échapper. Mais j'ai reçu une éducation très dure. Il y avait vraiment une peur en chacun de nous, pendant toute notre enfance.

Une chose que je dois ajouter, c'est que j'aimais vraiment ma grand-mère maternelle. Elle m'a apporté le côté affectif, ce côté que ma mère m'a aussi apporté. Ma grand-mère était pianiste.

ALLYN JACKSON : Votre grand-mère était pianiste et votre grand-père ingénieur. Alors ils étaient aisés quand ils étaient en Algérie.

ALAIN CONNES : Oui, ils étaient très aisés quand ils sont arrivés en France, mais ils ont tout perdu parce qu'ils ont acheté en bourse des obligations qu'ils n'auraient pas dû acheter. Ils ont perdu toute leur fortune, tout.

ALLYN JACKSON : Mais ils avaient leur maison, le domaine à Draguignan...

ALAIN CONNES : Oui, ils avaient leur maison, ce qui était très utile bien sûr, lorsque j'allais au lycée et jusqu'à ce que j'intègre l'École Normale Supérieure.

ALLYN JACKSON : Quand vous avez déménagé à Marseille quand vous aviez huit ans, dans quel genre d'école est-ce que votre père vous a envoyé ?

ALAIN CONNES : Nous avons poursuivi notre scolarité au Lycée Saint-Charles, qui était tout près

de chez nous. C'était un lycée public, avec de bons professeurs. À cette époque, le système éducatif était plus égalitaire. Si tu entrais à l'école, tu aurais une bonne éducation ¹.

ALLYN JACKSON : Étiez-vous intéressé par les mathématiques à l'époque ?

ALAIN CONNES : Oui, mais la compétition ne m'intéressait pas. J'étais vraiment intéressé par mes propres réflexions, et cela a duré jusqu'à ce que j'entre en classe préparatoire puis à l'École Normale Supérieure. À cette époque, j'avais déjà développé une théorie que j'aimais beaucoup. Si les problèmes que l'enseignant nous demandait de résoudre étaient en lien avec mes propres réflexions, alors je pouvais avoir de très bons résultats. Mais s'ils n'étaient pas liés à mes propres centres d'intérêt, je n'avais pas d'appétence à les résoudre.

J'ai eu un professeur quand j'étais en classes préparatoires, qui était très bon et qui s'intéressait à ce que je développais. C'était très agréable de sentir qu'il y avait quelqu'un qui se souciait de mon idée.

ALLYN JACKSON : Quelle était cette idée ?

ALAIN CONNES : Plus tard quand je suis allé à l'École Normale j'ai découvert que c'était déjà connu.

L'idée était de remplacer la différenciation par des opérations aux différences finies, j'avais développé tout un système pour cela. Ce qui était vraiment important, c'était que c'était le mien. Ce n'était pas quelque chose que j'avais trouvé dans les livres.

Quand je suis entré à l'École Normale, j'étais beaucoup plus préoccupé par la recherche d'une petite amie que par le travail. C'est la vérité ! À cet âge-là, j'avais de très gros complexes sur mon apparence physique. Par exemple, je ne marchais que du côté droit de la rue parce que je détestais mon profil droit et je ne voulais pas que les gens le voient.

ALLYN JACKSON : Mais votre profil droit a l'air bien.

ALAIN CONNES : Il a l'air bien maintenant ! C'était étrange, ce complexe. Quand j'essayais de travailler, je chantais et j'étais dérangé par mon propre chant. C'était particulier, mais c'est comme ça que j'étais !

ALLYN JACKSON : C'était une étape pour grandir.

ALAIN CONNES : Exactement. Je n'étais pas tellement obsédé par les mathématiques. j'étais vraiment intéressé par mes propres actions, pas tellement par le fait de passer des examens ou des choses comme ça.

ALLYN JACKSON : Tes frères ont-ils aussi fait les classes préparatoires et ont-ils aussi intégré l'École Normale Supérieure ?

¹Note de la traductrice : En fait, beaucoup d'élèves quittaient le système scolaire assez tôt, par rapport à aujourd'hui.

ALAIN CONNES : Oui. Deux ans avant moi, mon frère aîné était entré à l'École Normale. Donc il a ouvert la voie. Mon jeune frère a fait ses études de médecine, car il y avait une lignée de médecins dans la famille de ma mère. Elle était médecin, et son grand-père aussi.

ALLYN JACKSON : Avez-vous appris à jouer d'un instrument ?

ALAIN CONNES : Quand j'avais cinq ans, j'ai commencé les cours de piano, et j'ai vraiment adoré. Mais quand nous avons déménagé à Marseille, nous ne pouvions pas avoir de piano dans la maison.

Mon père m'a dit que je devais choisir entre musique et études. Alors j'ai laissé tomber le piano. J'ai toujours regretté énormément de l'avoir fait. À vingt ans, j'ai recommencé à jouer du piano, mais bien sûr j'avais raté les années les plus importantes pour l'apprentissage. J'ai beaucoup travaillé pour retrouver mon niveau, mais je n'ai jamais retrouvé le niveau où j'étais parvenu. Mais bon, c'est la vie.

ALLYN JACKSON : Vous ne pouvez pas tout faire.

ALAIN CONNES : On ne peut pas tout faire. Je vois maintenant très bien que j'ai une partie du cerveau qui est musical. En fait, je viens d'écrire un article pour le *Journal of Mathematics and Music*. Mais je sais que la partie du cerveau occupée par la musique est en quelque sorte en compétition avec la partie occupée par les mathématiques. Bien sûr, elles sont extrêmement proches. Cela peut sembler étrange, mais souvent j'apprends beaucoup en mathématiques en étudiant des partitions de musique.

ALLYN JACKSON : Comment ça se passe ?

ALAIN CONNES : En mathématiques, on peut dans certains cas avoir l'impression d'avoir atteint le plus haut niveau de sophistication. Mais ensuite, vous étudiez une grande partition musicale, et vous trouvez que le compositeur a un niveau de sophistication qui est environ le double du niveau de sophistication du meilleur mathématicien. C'est ce que j'ai en tête. Il y a des compositeurs, surtout de la période romantique, qui ont atteint un niveau de précision musicale que je trouve toujours réconfortant et source d'énergie pour faire des mathématiques. J'utilise donc les partitions musicales comme source de sophistication, mais j'aime aussi improviser et laisser sortir les choses.

ALLYN JACKSON : Et le chant quand vous étiez à l'École Normale ?

ALAIN CONNES : C'était du chant simple, des chansons corses ! C'était juste pour le plaisir. J'ai vécu cette période heureuse, surtout venant du sud de la France et me retrouvant à Paris, où les gens étaient beaucoup plus intellectuels.

ALLYN JACKSON : Était-ce un grand choc culturel d'aller à Paris ?

ALAIN CONNES : Ah oui. Sans être désobligeant, il est vrai que dans le sud, en particulier à Marseille, on n'a pas du tout la même formation intellectuelle que celle qu'on a à Paris. J'ai été étonné,

quand j'étais à Paris, parce que c'était très habituel d'être totalement immergé dans des trucs intellectuels. À Marseille, il fallait être bien habillé. Les gens étaient jugés sur leur apparence physique beaucoup plus qu'à Paris. À Paris, on pouvait voir dans les rues des gens qui n'étaient pas habillés correctement et ressemblaient à des clochards. Ils s'en fichaient, ce n'était pas important. À Marseille, c'était important. Je ne sais pas si ça a changé maintenant, mais c'était comme ça à l'époque.

ALLYN JACKSON : Votre père était-il satisfait lorsque vous êtes entré à l'École Normale ?

ALAIN CONNES : Oh, bien sûr. Ma mère aurait préféré qu'on intègre l'École Polytechnique... car ils avaient un bel uniforme ! Sinon, mes parents étaient très satisfaits.

Liberté de penser et de grandir

ALLYN JACKSON : C'est en 1966 que vous avez intégré l'École Normale. Comment c'était ?

ALAIN CONNES : Nous avons eu une merveilleuse promotion de jeunes hommes, et beaucoup sont devenus d'excellents mathématiciens. Cette année-là, à cette époque précise à l'École Normale, nous ne subissions aucune pression. Nous avions cette opportunité d'arrêter de faire les travaux routiniers des classes préparatoires et d'essayer de réfléchir. Je garde de beaux souvenirs de cette année. Un de mes amis me posait un problème, et puis pendant tout le week-end, je ne pensais qu'à ce problème. C'était génial. Nous étions vraiment intéressé par les problèmes de mathématiques. C'était notre pain quotidien. Mais nous ne travaillions pas sur commande ; nous ne suivions pas les cours. Nous avions quelques examens mineurs à passer à la fin de l'année, mais nous étions libres de penser aux mathématiques.

Aujourd'hui, les élèves de l'École Normale sont beaucoup plus traités comme des enfants. Ils doivent passer des examens et faire ceci et cela. Ils ne reçoivent pas cette bénédiction fondamentale, qui est le temps de réfléchir et de développer par eux-mêmes. Tous les amis que je me suis fait alors se sont très bien comportés précisément parce que nous étions traités d'une manière qui nous a permis de grandir.

C'est le moment où j'ai appris que si par exemple vous avez un calcul très compliqué à faire, le meilleur moyen était d'abord de bien se mettre les choses dans la tête, puis d'aller faire une promenade. Pas de papier, pas de crayon. Lorsque vous vous promenez, votre esprit apprendra à se construire une image mentale. Construire cette image mentale, la faire exister, c'est la partie la plus difficile des mathématiques. Pour y parvenir, il faut se battre avec un problème pendant un certain temps - ne pas lire un livre, ne pas croire qu'un résultat est vrai parce que quelqu'un le dit. Non, cela n'a pas d'importance. Ce qui compte vraiment, c'est le fait que tu te bats avec toi-même, seul. Puis progressivement, l'image mentale existera dans ton esprit.

ALLYN JACKSON : Quelle est cette image mentale ? C'est une image géométrique ?

ALAIN CONNES : Je ne sais pas comment cela se matérialise dans le cerveau, mais c'est quelque chose qui, quand vous y réfléchissez, s'illumine et vous envoie des signaux. Ce qui est encore plus frappant, c'est que l'image continuera à vous envoyer des signaux même lorsque vous n'y pensez

pas. C'est exactement comme lorsque vous quittez votre domicile et que cinq minutes plus tard, vous dites : "Oh mince, j'ai oublié d'éteindre le gaz.". Ces choses existent dans le cerveau, et elles vous envoient des signaux. De même en musique, vous pouvez avoir quelque chose qui existe dans votre esprit, un air ou un thème. C'est quelque chose d'étonnant et de très difficile à définir.

ALLYN JACKSON : Avec la musique, vous pouvez revoir un morceau dans votre esprit au fur et à mesure que le morceau avance dans le temps. Est-ce comme ça avec l'image mentale des mathématiques ?

ALAIN CONNES : Cela dépend si c'est de l'algèbre ou de la géométrie. Si le problème est géométrique et s'il existe une solution, elle apparaîtra d'un seul coup, sans dépendance temporelle. Ce sera subit. Mais pas en algèbre. L'algèbre est beaucoup plus dépendante du temps et évolutive. En algèbre, quand tu fais des calculs, il existe une analogie certaine avec la dépendance temporelle en musique, qui est extrêmement frappant.

La non-commutativité engendre le temps

ALAIN CONNES : En fait, ça va beaucoup plus loin. L'une des choses auxquelles j'ai contribué en 1972 était le fait que, lorsque vous prenez une algèbre non commutative, vous avez une évolution temporelle canonique.

Deux mathématiciens japonais, [Minoru] Tomita et [Masamichi] Takesaki, avaient découvert que si vous avez un état sur un certain type d'algèbre, il y a une évolution de cet état dans le temps. Ce que j'ai découvert par des calculs extrêmement compliqués sur plusieurs mois, c'est que cette évolution est en fait indépendante de l'état, quand vous le regardez de la bonne manière, c'est-à-dire en oubliant les automorphismes triviaux. La preuve quand je l'ai écrite était incroyablement simple, mais elle est venue au bout de longues heures de calculs. Le fruit était extrêmement simple, mais la préparation était extrêmement compliquée.

Le dénouement me fascine encore aujourd'hui : la non-commutativité, qui a été découverte par les physiciens en mécanique quantique, en fait est un générateur de temps. Je pense encore au fait que le passage du temps, ou la façon dont nous sentons que le temps passe et le fait que nous ne pouvons pas l'arrêter, est en fait exactement la conséquence de la non-commutativité de la mécanique quantique, ou plus explicitement du caractère aléatoire de la mécanique quantique.

Quelque chose que Heisenberg a découvert, qui est absolument incroyable, c'est que lorsque vous répétez certaines expériences microscopiques, les résultats ne seront jamais les mêmes. Vous envoyez un photon à travers une très petite fente et vous regardez où il atterrit sur une cible. Si vous répétez l'expérience, vous ne pourrez jamais prédire où le photon va atterrir. On peut utiliser ce fait pour générer des nombres aléatoires, et, contrairement à la génération de nombres aléatoires par ordinateur, on pourrait créer un système de sécurité qui serait parfaitement sûr. Même si un attaquant connaissait tous les appareils que vous utilisez, il ne serait jamais capable de le reproduire. C'est le fait le plus frappant de la mécanique quantique. La question philosophique qui me fascine depuis toutes ces années, c'est que je crois que c'est justement ce type d'aléa qui est à l'origine du temps qui passe.

J'ai écrit un livre avec mon épouse et avec mon professeur, Jacques Dixmier, Le Théâtre quantique.
note 1

Le but du livre est d'expliquer cette idée, qui est beaucoup plus une question philosophique qu'une question mathématique.

ALLYN JACKSON : Pourquoi le caractère aléatoire de la mécanique quantique produit-il du temps ?

ALAIN CONNES : La non-commutativité est à l'origine de cet aléa. Ce que Heisenberg a découvert est que si vous essayez, même avec un appareillage technique complexe, de connaître la position du photon, ainsi que son moment, vous ne pouvez pas le faire. Ceci est empêché par le fait que la position et le moment ne commutent pas. Pourquoi cette non-commutativité engendre-t-elle le temps ? Dans une équation pertinente, même si deux choses ne commutent pas, vous pouvez toujours échanger leur ordre, donc vous remplacez AB par BA . Cela change le sens, tout comme "phare" n'est pas la même chose que "harpe", même si ces mots ont les mêmes lettres. Mais il y a un prix à payer pour intervertir les lettres : lorsque vous permutez A et B , et que vous faites passer A de l'autre côté, vous devez le faire évoluer avec le temps. Et le temps dans lequel la variable doit évoluer est en fait le nombre purement imaginaire "i". C'est ce qui se passe dans les coulisses.

Heisenberg a fait sa découverte à une époque où il avait le rhume des foins, au printemps. Pour soigner son rhume, il a été envoyé par son médecin sur une île appelée Helgoland, qui se trouve dans la mer du Nord.

Il y est resté quelques semaines, passées à faire ses propres calculs. Une nuit, à 4 heures du matin je crois, il avait devant les yeux l'entièreté de ce qu'il avait découvert. Et il a eu peur, car ce qu'il a vu, c'était la mécanique quantique, appelée plus tard mécanique matricielle. Il avait découvert la non-commutativité des quantités physiques.

Dans le monde non commutatif, il y a quelque chose de totalement original qui n'existe pas dans le monde commutatif, où "harpe" serait la même chose que "phare", et qui est cette évolution temporelle. Cela rend les choses beaucoup plus intéressantes que si elles étaient statiques.

Quand on passe au commutatif, on perd beaucoup d'informations qui, si on les garde, permettent de compresser le monde extérieur d'une manière beaucoup plus simple.

Trouver son propre jardin

ALLYN JACKSON : Je voudrais revenir sur vos débuts à l'École Normale. Lorsque vous y est allé en 1966, l'IHÉS [Institut des Hautes Études Scientifiques, fondé en 1958] marchait fort.

Alexander Grothendieck et son école étaient là. En faisiez-vous partie ?

ALAIN CONNES : Non. À cette époque, la façon dont je percevais ma propre évolution autour de Grothendieck était "je n'ai qu'une seule façon d'être moi-même, qui est de rester aussi loin

que possible de ce groupe". Mais je dois ajouter qu'aujourd'hui, j'ai lu le livre de Grothendieck "*Récoltes et Semailles*", note 2, et que j'ai bien sûr lu plusieurs de ses articles. J'en suis venu à aimer ces développements. Je suis aussi maintenant impliqué et je partage cette volonté de certains de faire publier et ainsi de faire revivre certains textes de Grothendieck.

Quand on commence à faire des mathématiques, il faut avoir son propre jardin, même s'il est éloigné des idées très en vogue. Et vous devez commencer à exister dans ce jardin. Ce n'est pas grave si c'est un petit jardin. Ce qui compte, c'est que c'est le vôtre. Ce qui compte, c'est que vous avez beaucoup réfléchi à ça et que vous aimez ce petit lieu, et vous le prenez comme point de départ. C'est ce que j'ai ressenti.

ALLYN JACKSON : À l'époque, une grande partie des mathématiques était très dominée par Grothendieck et ses élèves.

ALAIN CONNES : Non seulement ça, mais j'ai entendu des gens dire : "Pourquoi fais-tu des mathématiques ? Tout sera fait par les personnes de ce groupe".

ALLYN JACKSON : Ils voulaient dire qu'il n'y avait pas de mathématiques en dehors de ce qu'ils faisaient à l'IHÉS ?

ALAIN CONNES : Oui. Bien plus tard, Grothendieck a compris que c'était la mauvaise attitude. Une partie de son livre, "*Récoltes et Semailles*" [“moissonner et semer”], en quelque sorte peut être compris comme disant qu'il comprenait qu'en étant trop énergique, il avait eu un effet négatif. Heureusement, la mathématique est un sujet tellement immense qu'il y a de la place pour tout le monde. Pourtant, sociologiquement, quand vous êtes débutant, c'est très difficile.

ALLYN JACKSON : Vous étiez à Paris lors des grands bouleversements de 1968.

ALAIN CONNES : Oui. En 1968, mon frère aîné Bernard se battait sur les barricades. Quant à moi, pas du tout. Je vivais une histoire d'amour, alors je m'en fichais. Je ne me suis pas du tout impliqué. J'étais distant. Je n'étais pas impliqué politiquement. Je ne voulais pas l'être.

ALLYN JACKSON : À quoi pensiez-vous mathématiquement à ce moment-là ?

ALAIN CONNES : Quand j'étais à l'École Normale, j'ai développé quelque chose d'assez particulier au sujet des zéros de polynômes dans le plan complexe. [Charles] Pisot, un théoricien des nombres, m'a demandé d'exposer dans son séminaire au sujet de ce que j'avais fait. C'était une approche assez originale, mais il s'agissait d'une approche marginale de ce sujet. J'ai écrit une note aux Comptes-Rendus à ce sujet. note 3

Je participais aussi au séminaire de [Gustave] Choquet. Choquet était un homme très brillant, un mathématicien très spirituel. Son séminaire a été très agréable. Il a décidé que je devais apprendre la physique, alors il m'a envoyé à une école d'été de physique aux Houches en 1970. J'y suis allé avec ma future épouse. C'était la première fois que je rencontrais les algèbres d'opérateurs. C'était génial. J'ai rencontré beaucoup de monde. Puis un an plus tard, certaines personnes que j'avais

rencontrées m'ont invité à une conférence à Seattle.

Une histoire de sérendipité

ALAIN CONNES : C'est ainsi que j'ai commencé à travailler sur la théorie de Tomita-Takesaki. C'est l'histoire d'un heureux hasard. Avant d'aller à Seattle, nous nous sommes mariés, en 1971. Aucun de nous n'avait voyagé aux États-Unis précédemment. J'ai décidé d'accepter l'invitation juste parce que je voulais visiter les États-Unis ! Je n'ai pas du tout regardé le sujet de la conférence. Nous avons pris l'avion pour New York pour rendre visite à mon frère, qui était à Princeton à l'époque. C'était en juillet, et il faisait si chaud que le seul endroit où l'air était respirable était la librairie.

Nous avons passé beaucoup de temps à la librairie. Nous allions voyager ensuite en train de Montréal à Vancouver, puis à Seattle. Nous avons passé quelque chose comme cinq jours dans le train, avec les Grandes Plaines à traverser - ce qui est plutôt ennuyeux. Alors j'ai pensé "pourquoi n'achèterais-je pas un livre de maths à lire pendant le voyage ?". J'ai hésité entre plusieurs livres qui avaient l'air assez intéressants.

Finalement j'ai acheté un petit livre de notes de cours. note 4

Quand nous étions dans le train, j'ai ouvert le livre et il avait l'air fascinant. Nous finîmes par arriver à Seattle : je vais à la conférence et je regarde le programme. "Oh my God !" : l'auteur du livre, Takesaki, est l'un des conférenciers ! C'est un signe ! J'ai décidé de n'assister à aucune conférence à part aux conférences de Takesaki et d'étudier ce genre de choses que sont les algèbres d'opérateurs.

Nous étions à Seattle pendant quelques semaines et nous avons passé un merveilleux moment.

Quand nous sommes revenus, j'ai cherché qui en France faisait ce genre de maths et j'ai découvert que c'était le domaine de Jacques Dixmier. J'ai décidé qu'en septembre, je suivrais le séminaire de Dixmier.

Il a ouvert le séminaire en apportant plusieurs papiers et en demandant qui voulait parler de quel papier. J'ai levé la main et j'ai pris l'un des papiers, note 5 juste au hasard. C'était sur un tout autre sujet de la théorie de Tomita-Takesaki. Je suis rentré chez moi en train, et dans le train j'ai trouvé que ce que les auteurs, [Huzihiro] Araki et [Edward James] Woods, faisaient était en fait profondément lié à la théorie de Tomita-Takeski.

Le même jour, j'écrivis une lettre à Dixmier, et peu après, il me fixa un rendez-vous. La seule chose qu'il m'a dite c'est : "Foncez !". J'ai écrit tout de suite une note aux Compte-Rendus note 6 pour expliquer que les invariants d'Araki et Woods pourraient être calculés en utilisant la théorie de Tomita-Takesaki. C'était le début de mon travail.

ALLYN JACKSON : Dixmier a bien compris que vous étiez sur quelque chose.

ALAIN CONNES : Il a tout compris. Et bien sûr, il est mon ami depuis lors.

ALLYN JACKSON : Mais tout cela est assez aléatoire, n'est-ce pas, que vous ayez acheté ce livre à Princeton et que Takesaki ait donné une conférence à Seattle ?

ALAIN CONNES : Oui, c'était totalement aléatoire. Certaines personnes disaient des choses qui n'étaient pas si gentilles ; elles ou ils disaient que j'avais eu de la chance. Mais la sérendipité n'est pas la chance. C'est transformer ce qu'on vous donne en chance. Comme vous le dites, il y a une certaine dose d'aléa, et puis il faut énormément travailler. Mais quelque part, c'est un travail qui est guidé par l'idée qu'il y a quelque chose au bout. En mathématiques, cela compte plus que toute autre chose, le sentiment instinctif qu'il y a quelque chose. Ce n'est pas au niveau de la pensée rationnelle ; c'est au niveau de l'intuition. C'est quelque chose qui est difficile à transmettre à quelqu'un d'autre mais qui vous habite et vous permet d'avancer. Et Dixmier s'en aperçut complètement.

ALLYN JACKSON : Il a 96 ans maintenant.

ALAIN CONNES : Oui, et récemment nous avons écrit, avec ma collaboratrice [Caterina Consani], un papier très technique. C'est le seul que je connaisse qui a vraiment compris ce qu'on fait là ! C'est un homme incroyable. À 96 ans, il avait des commentaires parfaits.

Des facteurs aux feuillettages

ALLYN JACKSON : En 1973, vous avez terminé votre thèse, sous la direction de Dixmier. Pouvez-vous me dire conceptuellement ce que vous avez fait dans votre thèse ?

ALAIN CONNES : J'ai fait deux choses fondamentales. La première était de montrer que cette évolution temporelle était en fait indépendante de l'état, ce qui donne de nombreux invariants des algèbres de von Neumann, des facteurs. Les facteurs ont été introduits par von Neumann pour explorer les factorisations non triviales de l'espace de Hilbert en mécanique quantique. La seconde était la chose principale, elle consistait à réduire les facteurs de type III, qui étaient ceux que von Neumann avait complètement laissés de côté, aux facteurs de type II et à leurs automorphismes.

ALLYN JACKSON : Au moment où vous avez commencé à travailler là-dessus, les facteurs de type III n'étaient pas bien compris ?

ALAIN CONNES : Ils n'étaient pas du tout compris. Ce que j'ai prouvé dans ma thèse, d'abord, c'est qu'on peut tous les classer dans le type III_λ , où λ est un nombre compris entre 0 et 1. Ensuite j'ai donné une réduction, à l'exception du Type III_1 , de ces facteurs III_λ au type II et à des automorphismes. Beaucoup plus tard, Takesaki a résolu le cas du type III_1 .

Après avoir fait ce travail en juin 1972, je suis parti en vacances avec mon épouse. Je ne m'inquiétais pas du tout de problèmes de priorité scientifique. Dixmier a dû m'appeler pendant les vacances pour me dire que je devais publier quelque chose, car sinon, ce travail serait perdu. J'étais un peu naïf.

ALLYN JACKSON : Quelqu'un d'autre travaillait sur la même chose ?

ALAIN CONNES : Bien sûr. Il y avait un groupe de personnes à Kingston, en Ontario, qui travaillerait plus tard sur le même chose. Mais j'ai été le premier à découvrir les résultats les plus importants.

Ce problème de querelles de priorité se reproduira plusieurs fois dans ma carrière. Mais nous ne travaillons pas pour avoir notre nom sur quelque chose.

Nous travaillons pour le plaisir de la découverte. Et ce plaisir est quelque chose que personne ne peut nous enlever. Je me souviens avoir fait une autre découverte lors d'une visite à Erling Størmer en Norvège, pendant ces longues journées de juin où le soleil ne se couche pas. J'ai de merveilleux souvenirs de cette époque.

Dans ma thèse, j'ai également prouvé qu'il y a des facteurs qui sont hyperfinis mais ne sont pas des produits tensoriels infinis. C'est un résultat que j'ai annoncé en juillet 1972 la même année, et qui utilisait toute la puissance de ma théorie. Ce n'était pas seulement un résultat abstrait. Il a eu des conséquences surprenantes pour de nombreuses personnes à l'époque.

L'influence de l'intrication quantique

ALLYN JACKSON : Certains théoriciens de la complexité ont récemment prouvé un résultat dans lequel intervient l'intrication de l'informatique quantique, et ils ont ainsi résolu quelque chose appelé le problème de Tsirelson. Ceci à son tour a permis de résoudre la conjecture de plongement de Connes. Pouvez-vous me dire quelle est cette conjecture et comment vous voyez ce nouveau travail ?

ALAIN CONNES : Tout d'abord, ce n'est pas une conjecture, c'est un problème. Quand je travaillais à Kingston en 1975, à un moment donné, je suis tombé sur une certaine propriété d'un facteur. J'ai tout de suite vu que cette propriété était moins restrictive pour le facteur que le fait qu'il soit hyperfini. Je prouvais quelque chose sur les facteurs hyperfinis et j'avais trouvé des exemples de facteurs qui n'étaient pas hyperfinis, mais qui avaient cette propriété.

La propriété est que le facteur n'est pas hyperfini mais ressemble autant à un facteur hyperfini que possible. Techniquement, cela signifie que le facteur peut être plongé dans un ultraproduct de facteurs hyperfinis. La question est de savoir si tout facteur de ce qu'on appelle le type II_1 possède cette propriété. Ce que j'avais remarqué à l'époque, c'était que tous les facteurs des livres et articles que je connaissais vérifiaient cette propriété. J'ai donc écrit à ce sujet en trois lignes dans mon article Et - c'est l'honnête vérité ! -, je n'y ai plus jamais pensé.

Ensuite, ces quelques lignes que j'avais écrites ont été reprises par un certain nombre de personnes différentes. [Eberhard] Kirchberg a prouvé que ce problème est équivalent à quelque chose sur lequel il travaillait. Ca a été utilisé par [Dan Virgil] Voiculescu en définissant sa nouvelle notion d'entropie et par d'autres personnes du domaine de la théorie quantique comme [Boris S.] Tsirelson.

Je ne sais pas à quel point l'article sur la théorie de la complexité a été vérifié. Apparemment c'est un article assez long.

Ce qu'il dit, en gros, c'est qu'il y a des choses qui ne peuvent pas du tout être approchées par un objet qui est de dimension finie. C'est quelque chose d'assez bizarre. Leur résultat serait probablement assez important s'ils ont vraiment trouvé un exemple d'un tel objet. Je n'ai aucune idée de la pertinence et de l'intérêt d'un tel exemple pour la physique. J'ai toujours eu le sentiment, ou la croyance, que la nature est vraiment de dimension finie dans un certain sens ; même si nous nous en approchons par des concepts continus, tout est essentiellement de dimension finie.

Comme je l'ai dit, je ne me suis jamais penché sur le problème. Je suis vraiment la pire personne à qui demander !

ALLYN JACKSON : Le résultat de la théorie de la complexité concerne l'intrication quantique. Est-ce que ça vous intéresse ?

ALAIN CONNES : L'intrication est quelque chose que je trouve extrêmement intéressant et important, mais pour une raison différente. Le livre que nous avons écrit avec mon épouse et Dixmier contient une phrase provocatrice.

En français, cette phrase est "l'aléa du quantique est le tic-tac de l'horloge divine.". En anglais, on pourrait traduire cela par "the vagary of the quantum is the tick-tock of the divine clock".

La raison pour laquelle le temps passe, et passe d'une manière que nous ne contrôlons pas du tout, c'est précisément le manque de reproductibilité du quantum. Lorsque vous envoyez un photon sur une cible, vous ne pourrez jamais reproduire le résultat. C'est quelque chose de totalement aléatoire et incontrôlable. J'ai pu, dans une certaine mesure, développer une théorie qui ferait jaillir le temps de ce hasard quantique, comme je l'ai expliqué plus tôt. Mais si vous avez un temps au point *A* et un temps au point *B*, et l'aléa quantique en *A* et l'aléa quantique en *B*, il n'y aurait aucun lien du tout, non ? Non, ce n'est pas vrai, parce que si en *A* et en *B* vous mesurez l'aléa quantique à partir d'états intriqués, alors vous obtiendrez des résultats en *A* et en *B* qui sont corrélés. Les caractères aléatoires quantiques en deux points sont corrélés par l'intrication quantique.

Il faudrait un esprit comme celui d'Einstein pour inventer une notion de temps qui jaillirait du quantitatif, et cela assurerait la paix de notre esprit par rapport à l'intrication en nous disant que l'intrication n'est que le l'harmonie, ou la corrélation, entre les divers hasards en divers points. Je crois que la personne qui pourrait avoir le cerveau le plus capable de cela est [Anton] Zeilinger, un physicien suisse qui a fait des expériences d'intrication entre des points très éloignés, des points distants de plus de 100 kilomètres. note 19 J'ai entendu un discours de lui dans lequel il a dit qu'ils cherchaient des choses qui ne peuvent pas être intriquées dans leur expériences. Les mathématiques de l'évolution du temps, plus la compréhension de l'intrication, il y a suffisamment d'éléments là-bas pour créer un point de vue complètement nouveau sur notre compréhension du temps.

Ce qui est extrêmement troublant dans l'intrication, c'est que si vous avez deux états intriqués et que vous faites une observation sur l'un, il agit immédiatement sur l'autre et vous donne un résultat corrélé.

Einstein était contrarié par ce phénomène et il l'a qualifié d'“action effrayante à distance”. Effrayant est le mot juste.

Alain Aspect a effectué des mesures montrant que l'effet est beaucoup plus rapide que la vitesse de la lumière.

Cela semble contredire le principe de relativité. Mais en fait, ce n'est pas le cas, car vous ne pouvez pas transmettre les informations. Supposons que vous ayez deux états corrélés, de sorte que si vous trouvez plus pour l'un, vous trouverez moins pour l'autre, ou inversement. La réponse, plus ou moins, n'est pas mon propre choix ; c'est le résultat de l'expérience. L'autre gars mesure moins ou plus, mais il n'obtient aucune information de moi. Ce n'est pas un moyen qui permet de transmettre des informations, donc cela ne contredit pas le principe de relativité.

C'est quand même gênant. Si je suis dans un cadre différent, ce ne sera pas que quelque chose a d'abord été fait au point *A* puis le point *B* a réagi ; ce sera que cela a été fait d'abord au point *B* et qu'ensuite *A* a réagi.

Lorsque vous avez des événements de type spatial vus à partir de différents cadres de référence, l'un peut être avant et l'autre peut être après, ou vice versa. C'est votre propre choix. Cela signifie que la notion de causalité, ou la notion de temps, est totalement bouleversée par le phénomène d'intrication. Je l'interprète comme signifiant qu'il existe quelque chose de plus primitif que le temps qui passe, qui est le hasard quantique.

Le cadeau de l'hypothèse de Riemann

ALLYN JACKSON : Comment voyez-vous les perspectives de prouver l'hypothèse de Riemann ?

ALAIN CONNES : J'ai beaucoup travaillé là-dessus et j'ai fait quelques progrès récemment avec Katia Consani. Mais jusqu'à ce que vous ayez terminé, vous ne pouvez rien dire.

Mais il y a une image mentale du problème qui est réconfortante. Le problème est comme un pôle infini, et vous voulez montrer que le pôle est vertical. C'est l'image mentale. Avec Katia, c'est comme si nous construisions des fondations de plus en plus étroites. Il y a un ensemble infini d'escaliers, mais chaque pas que vous faites dans les escaliers bloque en fait le pôle, pour le rendre de plus en plus vertical.

Ce que nous avons fait récemment, c'est franchir la première marche de l'escalier.

Ces escaliers sont infinis. Mais la beauté c'est que, grâce à une idée d'André Weil, il suffit de considérer un nombre fini de nombres premiers à la fois pour résoudre le problème. Si vous vous en tenez à cette idée, alors vous êtes assuré de ne pas tomber dans le trou noir d'avoir à prouver des résultats qui seraient équivalents en termes de difficulté à l'hypothèse de Riemann.

Ce que j'ai trouvé en 1996, c'est quelque chose de difficile quand on l'applique à l'infinité des nombres premiers, mais cela, quand vous l'appliquez seulement à un nombre fini de nombres premiers,

vous donne exactement l'espace de Hilbert et le cadre de calcul quantifié qui est apparemment très approprié pour attaquer le problème.

On peut avoir de l'espoir, mais jusqu'à ce que vous ayez terminé, oubliez un tel espoir, car vous ne pouvez rien dire. J'aime travailler sur ce problème parce que c'est mon épreuve, une épreuve à laquelle je ne peux pas échapper. Ce n'est pas comme si on construisait une nouvelle théorie, et alors on peut être tenté de penser qu'on est le plus grand. En mathématiques, il n'y a pas de meilleure façon de progresser que d'être confronté à un problème que l'on ne peut pas résoudre. Si vous travaillez sur un problème qui vous pouvez résoudre, cela signifie que ce n'est pas le bon problème. Se battre avec un problème très difficile est une bien meilleure façon de construire une image mentale que lorsque vous travaillez sur un problème facile. Quand l'esprit est bloqué, il a beaucoup plus de chance de construire et de concevoir. Je vois un problème comme ça, comme un cadeau.

Avec mon épouse et mon professeur Jacques Dixmier, nous avons écrit un deuxième roman intitulé *Le Spectre d'Atacama*. ^{note 20} Il raconte l'histoire d'un mathématicien confronté à l'hypothèse de Riemann.

Il se rend compte que des extraterrestres envoient des spectres à la terre et que ces spectres contiennent les zéros de la fonction zéta de Riemann. J'ai récemment publié dans le *Journal of Mathematics and Music* un article ^{note 21} qui vient d'un problème auquel nous avons été exposés lors de l'écriture du livre.

Le mathématicien et les autres scientifiques devaient s'assurer que l'être communiquant avec eux de l'espace extra-atmosphérique était un être intelligent et non une machine. Ils ont donc dû concevoir un test de Turing qui les rendrait complètement sûrs. Un tel test est possible, et il est lié aux travaux de André Weil sur l'hypothèse de Riemann. Il a découvert que lorsque vous travaillez avec des champs de fonction, tous les zéros de l'analogue de zéta sont sur la ligne critique et ils sont périodiques - ils se répètent périodiquement.

Ce que nous avons réalisé en écrivant le livre, c'est le lien avec ce que le compositeur [Olivier] Messiaen avait inventé avec ses rythmes non rétrogradables. Les motifs rythmiques de Messiaen ont exactement la même propriété que les motifs périodiques que vous trouvez à partir des zéros de l'analogue de Weil de la fonction zéta de Riemann.

Les motifs rythmiques de Weil sont associés à chaque nombre premier. Ce que les personnages du livre ont fait était d'envoyer dans l'espace les motifs associés aux nombres premiers, mais ils omettent un nombre premier. Si les êtres recevant le message étaient vraiment intelligents, ils répondraient en envoyant le modèle pour le premier manquant.

ALLYN JACKSON : Votre épouse est-elle écrivaine ?

ALAIN CONNES : Mon épouse est maintenant à la retraite, mais elle était professeur de latin et de grec au lycée.

C'est une personne littéraire. Nous sommes très complémentaires. Elle sait tellement de choses que je ne sais pas.

ALLYN JACKSON : Dixmier a écrit de la science-fiction quand il était plus jeune, non ?

ALAIN CONNES : Oui, il a écrit de la science-fiction et aussi des romans policiers. La façon dont notre premier roman a commencé, c'est qu'à l'été 2012, Dixmier nous a envoyé une carte postale. La carte postale disait : "J'ai le titre du livre. Vous l'écrivez, et je le relirai !" Bien sûr, nous avons ri.

Ensuite, ma femme et moi avons fait un voyage à Venise et nous avons visité un petit musée dans lequel se tenait une exposition d'art moderne très surprenante, dans laquelle était présentée notamment une sculpture de [Maurizio] Cattelan. La sculpture montrait neuf cadavres, grandeur nature, alignés les uns à côté des autres. J'ai vu la sculpture, et à cette occasion, un prix avait été attribué à neuf personnes ! ^{note 22} Cela a immédiatement déclenché quelque chose dans mon esprit, et j'ai commencé à rédiger un brouillon du livre que Dixmier avait suggéré.

Quand mon épouse a lu le brouillon, elle a dit : "Non, c'est horrible !" Puis elle a pris le relais. Elle a réussi à sauver l'idée, même si ce qu'elle a écrit était totalement différent. Elle a commencé à écrire sur l'histoire d'une jeune physicienne à qui l'on demande de prendre la tête du CERN. C'était donc le point de départ du livre. Étonnamment, quelques années après la parution du livre, une italienne, Fabiola Gianotti, a été nommée à la tête du CERN !

J'aime toujours ces motivations très étranges, très étranges, comme un coup de pied, pour commencer quelque chose.

ALLYN JACKSON : Vous semblez avoir une vie vraiment amusante.

ALAIN CONNES : Bien sûr. J'essaye au moins ! Mais comme je l'ai dit, ma vie n'est pas tellement amusante, à cause de l'anxiété persistante.

ALLYN JACKSON : Mais comme vous l'avez dit à propos de Grothendieck, l'angoisse vous pousse vers la vérité.

ALAIN CONNES : Exactement.

Notes

1. *Le Théâtre quantique*, d'Alain Connes, Dany Chéreau et Jacques Dixmier. Odile Jacob, 2013.
2. *Récoltes et Semailles : Réflexions et témoignage sur un passé de mathématicien* a été écrit par Alexander Grothendieck entre 1983 et 1986. Grothendieck a imprimé et distribué lui-même des exemplaires de l'ouvrage mais celui-ci n'avait jamais été publié. *Note de la traductrice : Récoltes et semailles a été publié par les éditions Gallimard en 2022.*
3. Alain Connes, *Ordres faibles et localisation des zéros de polynômes*, Comptes-Rendus de l'Académie des Sciences de Paris Série AB 269 (1969), A373-A376.

4. Masamichi Takesaki, *Tomita's theory of modular Hilbert algebras and its applications*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 128, Springer-Verlag, 1970. <https://link.springer.com/book/10.1007/BFb0065832>.
5. Huzihiro Araki et EJ Woods, *A classification of factor*, Publications du Research Institute for Mathématique Sciences Série A 4 (1968/1969), 51-130. https://www.ems-ph.org/journals/show_abstract.php?issn=00345318vol=4iss=1rang=4.
6. Alain Connes, *Calcul des deux invariants d'Araki et Woods par la théorie de Tomita et Takesaki*, Comptes-Rendus de l'Académie des Sciences de Paris Série AB 274 (1972), A175-A177.
7. Alain Connes, *Une classification des facteurs de type III*, Comptes-Rendus de l'Académie des Sciences, Série AB 275 (1972), A523-A525.
8. Deux mois après cette interview, Vaughan Jones est décédé à l'âge de 67 ans.
9. Alain Connes, *C*-algèbres et géométrie différentielle*, Comptes-Rendus de l'Académie des Sciences de Paris Série AB 290 (1980), n° 13, A599-A604.
10. Alain Connes et Henri Moscovici, *Conjecture de Novikov et groupes hyperboliques*, Comptes-Rendus des Séances de l'Académie des Sciences, Série I. Mathématique 307:9 (1988), 475-480.
11. Alain Connes, *Interprétation géométrique du modèle standard de la physique des particules et structure fine de l'espace-temps*, Comptes-rendus de l'Académie des sciences. Série Générale. La Vie des Sciences 10:3 (1993), 223-234.
12. Ali H. Chamseddine, Alain Connes, et Viatcheslav Mukhanov, *La géométrie et le quantum : les bases*, Journal de Physique des Hautes Énergies (2014) n°12, 098. [https://link.springer.com/article/10.1007/JHEP12\(2014\)098](https://link.springer.com/article/10.1007/JHEP12(2014)098).
13. Alain Connes, *Noncommutative Geometry*, Academic Press, 1994. Il s'agit d'une traduction de l'édition française *Géométrie non commutative*, publiée par InterEditions en 1990.
14. Jean-Benoît Bost et Alain Connes, *Algèbres de Hecke, facteurs de type III et transitions de phase avec brisure spontanée de symétrie en théorie des nombres*, Selecta Mathematica (NS) 1:3 (1995), 411-457. <https://link.springer.com/article/10.1007/BF01589495>.
15. Alain Connes, *Formule de trace en géométrie non commutative et hypothèse de Riemann*, Comptes-Rendus de l'Académie des Sciences de Paris Série I Mathématique 323:12 (1996), 12, 1231-1236.
16. Alain Connes et Caterina Consani, *Weil positivity and trace formula, the archimedean place*, soumis à arXiv le 25 juin 2020. <https://arxiv.org/abs/2006.13771>.
17. Alain Connes et Caterina Consani. *Le site arithmétique*, Comptes-Rendus de l'Académie des Sciences de Paris, 352:12 (2014), 971-975. <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1631073X14001666?via%3Dihub>.
18. Zhengfeng Ji, Anand Natarajan, Thomas Vidick, John Wright et Henry Yuen, MIP = RE** soumis à arXiv le 13 janvier 2020. <https://arxiv.org/abs/2001.04383>.
19. X.-S. Ma, T. Herbst, T. Scheidl, D. Wang, S. Kropatschek, W. Naylor, B. Wittmann, A. Mech, J. Kofler, E. Anisimova, V. Makarov, T. Jennewein, R. Ursin et A. Zeilinger, *Téléportation quantique sur 143 kilomètres en utilisant l'anticipation active*, Nature 489 (2012), 269-273. <https://www.nature.com/articles/nature11472>.
20. Alain Connes, Danye Chéreau, et Jacques Dixmier, *Le Spectre d'Atacama*, Odile Jacob, 2018.
21. Alain Connes, *Rythmes motiviques*, à paraître dans La Revue de Mathématiques et Musique. <https://arxiv.org/pdf/1812.09946.pdf>.
22. Le Breakthrough Prize in Fundamental Physics a été décerné pour la première fois en 2012, à neuf personnes : Nima Arkani-Hamed, Alan Guth, Alexei Kitaev, Maxim Kontsevich, Andrei Linde, Juan Maldacena, Nathan Seiberg, Ashoke Sen et Edward Witten.



Alain Connes, son épouse et son tuteur de thèse Jacques Dixmier, au Salon du Livre à Paris, Porte de Versailles, en 2018. J'ai profité de ma visite au Salon pour me faire dédicacer par Alain Connes *Le Spectre d'Atacama*, tandis qu'il m'avait dédicacé *Le théâtre quantique* en 2013, à l'IHÉS, où il avait accepté de me recevoir et où je n'avais pas été capable de lui dire quoi que ce soit au sujet de mon travail, tant j'étais intimidée, et tant mon travail était ridicule. Cependant, à la lecture de la partie de l'interview ci-dessus concernant le petit jardin, j'ai le sentiment d'avoir bien cultivé le mien !