

Résumé de l'approche d'Alain Connes et al.

Résumé d'une conférence : Fonctions sphéroïdales et triplets spectraux (1h)

J'expliquerai la construction à partir de l'opérateur différentiel W du second ordre qui apparaît par séparation des variables dans le laplacien d'un ellipsoïde, et des fonctions propres de W , de triplets spectraux reproduisant les comportements infrarouge et ultraviolets des zéros de zêta. Ce sont des résultats récents en collaboration avec Katia Consani et Henri Moscovici.

Orateur : Prof. Alain CONNES (IHES)

L'opérateur différentiel W du second ordre, évoqué par Alain Connes, est au cœur de travaux récents (menés notamment en collaboration avec Katia Consani et Henri Moscovici) reliant la géométrie spectrale à la théorie des nombres et aux zéros de la fonction zêta de Riemann.

Voici une synthèse de son origine, de sa structure mathématique et de son application :

1. Origine géométrique :

La séparation des variables

L'opérateur W trouve sa source dans un problème de géométrie riemannienne classique : la résolution de l'équation de Laplace (le laplacien) sur un ellipsoïde allongé (ou prolate spheroid, une surface tridimensionnelle semblable à un ballon de rugby). En utilisant un système de coordonnées sphéroïdales adaptées, l'opérateur de Laplace tridimensionnel **se sépare** en trois équations différentielles ordinaires.

L'équation prolate :

L'une de ces équations est élémentaire, tandis que les deux autres partagent la même forme. C'est cette équation différentielle linéaire du second ordre qui définit l'opérateur prolate W .

2. Nature mathématique de l'opérateur

Classiquement, cet opérateur (souvent lié aux fonctions sphéroïdales de seconde espèce) est étudié uniquement sur des intervalles finis $[-\Lambda, \Lambda]$ correspondant à la géométrie de la surface réelle.

La contribution d'Alain Connes et de ses collaborateurs repose sur une extension spécifique :

Extension auto-adjointe (W_{sa}) :

Alain Connes a mis en évidence une extension auto-adjointe globale de cet opérateur sur toute la droite réelle.

Factorisation de Darboux :

Puisqu'il s'agit d'un opérateur du second ordre, il peut être comparé à une forme d'opérateur de Klein-Gordon en physique. Par le processus de factorisation de Darboux, l'opérateur W se décompose en un produit de deux opérateurs différentiels du premier ordre :

$$L = (\nabla + w)(\nabla - w)$$

Cela permet de construire l'équivalent d'un opérateur de Dirac (qui est une “racine carrée” de type laplacien).

3. Connexion avec la fonction Zêta de Riemann

L'objectif ultime de cette construction dans le cadre de la géométrie non commutative est d'apporter une approche spectrale à l'Hypothèse de Riemann.

Spectre d'émission vs spectre d'absorption :

Historiquement, Connes avait développé un modèle où les zéros de la fonction zêta apparaissaient comme un manque de niveaux d'énergie (un spectre d'absorption).

Triplets spectraux :

En exploitant les fonctions propres de cet opérateur W du second ordre en dehors de l'intervalle critique $[-\Lambda, \Lambda]$, Connes, Consani et Moscovici construisent de nouveaux triplets spectraux (un triplet spectral est une brique de base de la géométrie non commutative).

Comportement asymptotique :

Ces structures permettent d'obtenir un “spectre d'émission” qui reproduit fidèlement le comportement à la fois infrarouge (basses énergies) et ultraviolet (hautes énergies) des zéros de la fonction zêta.