SUR UNE IDÉE DE MICHAEL ATIYAH

ALAIN CONNES

In memoriam Michael Atiyah,
avec admiration et gratitude

"In the broad light of day mathematicians check their equations and their proofs, leaving no stone unturned in their search for rigour. But, at night, under the full moon, they dream, they float among the stars and wonder at the miracle of the heavens. They are inspired. Without dreams there is no art, no mathematics, no life." [1]

(Michael Atiyah, Les Déchiffreurs 2008, Notices de l'AMS, 2010).

1 Introduction

Le théorème de Feit–Thompson sur la résolubilité des groupes finis d'ordre impair venait souvent à l'esprit de Michael Atiyah pendant sa participation à la conférence de Shanghai de 2017 au sujet de la géométrie non-commutative. La présence vivante de Michael parmi nous, et son inextinguible enthousiasme pour toutes les mathématiques – anciennes, nouvelles, et encore à créer – furent des points forts de cette rencontre.

L'idée de Michael que nous allons examiner dans cette note a été conçue par lui durant son voyage vers Shanghai. C'est une nouvelle stratégie pour FT, basée sur le processus itératif qu'il a esquissé.

5. THE ITERATIVE PROCESS

Having started the Artin process of using the conjugation action of G on its non-empty subsets we now plan to iterate this process N times. As explained at the end of Section 3, the purpose of the iteration is to handle groups of any odd exponent $n \leq N$. The index j increases with the exponent n but eventually stops at N.

Our iterative process will produce a finite sequence, indexed by j (with $1 \leq j \leq N$), of

(5.1) $$\text{odd integers } N_j, \text{ with } N_1 = N = |G|, \quad N_{j+1} = 2^{N_j} - 1$$

(5.2) $$\text{sets } S_j \text{ with } |S_j| = N_j, S_1 = G, \quad S_{j+1} = (2^{S_j})^*$$

(5.3) $$\text{real fields } k_j \text{ with } k_1 = \mathbb{Q} \text{ and } k_{j+1} = N_j \times N_j \text{ matrices over } k_j$$

FIGURE 1 : Extrait des notes de Michael Atiyah [3]

Son idée est d'utiliser ce processus pour construire un caractère non trivial du groupe fini G. Prise trop à la lettre, cette idée ne peut pas fonctionner parce qu'elle s'appliquerait au groupe des permutations de G qui commute avec l'involution $g \mapsto g^{-1}$ et ce groupe n'a que des caractères d'ordre

Traduction : Denise Vella-Chemla, décembre 2024, de l'article Arxiv https://arxiv.org/pdf/1901.10761 .

[1] "Au grand jour, les mathématiciens vérifient leurs équations et leurs preuves, retournant chaque pierre dans leur recherche de rigueur. Mais, la nuit, sous la pleine lune, ils rêvent, ils flottent parmi les étoiles et s'émerveillent devant le miracle des cieux. Ils sont inspirés. Sans rêves, il n'y a pas d'art, pas de mathématiciens, pas de vie."

pair.

Le but du présent article, comme un hommage à une imagination lumineuse qui ne s'est jamais atténuée, est de prendre au sérieux la proposition de Michael Atiyah et de montrer que, en la comprenant dans un sens plus large, on aboutit à une idée très intéressante.

Mon point de départ est d'étudier plus généralement les itérations de la transformation qui remplace une représentation π d'un groupe fini G sur un espace vectoriel de dimension finie E par la différence $\wedge\pi - 1$, où $\wedge\pi$ est l'action de G sur la somme des puissances extérieures $\wedge^n E$ et 1 est la représentation triviale.

On montre d'abord, dans le § 2 (Proposition 2.1) que l'opération $\pi \mapsto \wedge\pi$ s'étend aux représentations virtuelles si et seulement si le groupe G est d'ordre impair. On discute brièvement dans le § 3 de ce qui ne va pas quand le groupe fini est d'ordre pair. Dans le cas impair, on montre dans le lemme 4.1 que l'opération wedge $\wedge : R(G)_{\mathbb{Z}} \to R(G)_{\mathbb{C}}$ est donnée par la formule :

$$\wedge(x) = e^{\sum_1^k c_j \psi_j(x)}, \quad c_j = (-1)^{j+1} \frac{H(j/k)}{k} \tag{1}$$

où k est l'ordre impair de G, les ψ_j sont les opérations de Adams et la fonction $H(u)$ est la somme alternée $\sum \frac{(-1)^n}{n+u}$. Cela permet d'étendre l'opération wedge à des fonctions à valeurs complexes sur le groupe G et ainsi de donner un sens à l'opération $\Psi(f) := \wedge f - 1$ sur de telles fonctions. On peut alors tester l'idée d'Atiyah d'utiliser l'itération de Ψ.

Evidemment, les caractères uni-dimensionnels, *i.e.* les morphismes $\chi : G \to \mathbb{C}^*$, sont les points fixes de Ψ puisque $\wedge\chi = 1 + \chi$. On étudie la transformation Ψ dans le cas non trivial le plus simple, le groupe non commutatif fini d'ordre impair le plus petit, qui est d'ordre 21. On détermine d'abord, dans le § 5 la transformation linéaire T sur la classe des fonctions pour lesquelles le wedge est la composition de l'exponentielle avec T. On trouve que T a un noyau non trivial. Dans le § 6, on peut finalement étudier les itérations de l'application Ψ dans notre exemple concret. Comme attendu lorsqu'on prend comme point de départ la représentation ρ donnée par l'action de G sur elle-même par conjugaison, l'itération $\Psi^{\circ n}(\rho)$ explose très rapidement et ne converge nulle part, rendant ainsi difficile d'imaginer qu'une telle itération puisse être utilisée pour prouver l'existence d'un caractère uni-dimensionnel non trivial. On montre dans le § 6, par un calcul effectif, que pour une classe complète de données initiales, les itérations de l'application Ψ convergent effectivement joliment vers un des deux caractères non triviaux du groupe G. Disons de façon plus détaillée que le groupe G a 4 classes de conjugaison non-triviales habituellement dénotées $7A$, $7B$ qui sont d'ordre 7 et de taille 3 et $3A$, $3B$ qui sont d'ordre 3 et de taille 7. On teste d'abord l'itération de Ψ sur les fonctions centrales f qui valent 1 excepté sur les classes $3A$, $3B$ sur lesquelles elles prennent des valeurs conjuguées. Ainsi, f est à valeur complexe et elle remplit la condition $f(g^{-1}) = \overline{f(g)}$. De telles fonctions dépendent d'un seul nombre complexe $z = f(3A)$ et l'analyse de Ψ devient l'itération d'une transformation du plan complexe qui est donnée explicitement dans le lemme 6.2.

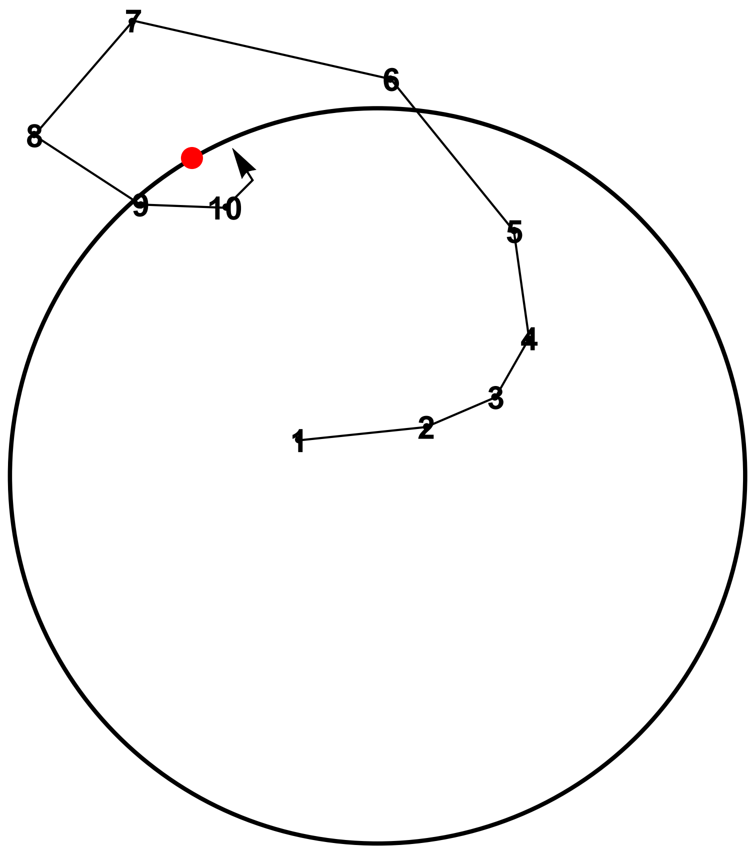


FIGURE 2 : Itération de la transformation $\Psi =$ wedge moins un.

L'itération concrète de cette transformation avec une donnée initiale proche de l'origine montre qu'en démarrant à partir d'un point sur l'axe réel, on converge vers le caractère de la représentation triviale, mais qu'en commençant à partir d'un point dans le demi-plan supérieur, on converge vers le caractère uni-dimensionnel non trivial de G (et vers son conjugué si on démarre à partir d'un point dans le demi-plan inférieur).

Pourtant, en étudiant plus avant le comportement de la transformation Ψ sur les fonctions non triviales sur les autres classes de conjugaison, on trouve un point fixe attracteur qui ne correspond pas à un caractère uni-dimensionnel. On montre dans le § 7 que les points fixes pour les autres classes de conjugaison sont les solutions d'une équation de Lambert $we^w = u$ dans laquelle la valeur $u = -\frac{6}{7}2^{-\frac{5}{7}} \log 2 \sim -0.362124$ s'avère appartenir à l'intervalle $[-1/e, 0)$ où deux solutions réelles existent. Alors que l'une d'elles correspond au caractère de la représentation triviale, l'autre ne provient pas d'un caractère. De plus, elle est le point fixe qui ne correspond pas à un caractère qui est un attracteur et cela rend assez difficile de conjecturer une relation précise entre les points fixes et les caractères des représentations uni-dimensionnelles.

Incidemment, il s'avère, de façon intéressante, qu'à la fois l'itération de l'exponentiation et l'équation de Lambert ont été étudiées par L. Euler [7,8] et on peut considérer la détermination des points fixes de l'opération $\Psi =$ wedge moins un, pour les groupes finis d'ordre impair, comme une variation de ces développements initiaux.

2 Imparité et wedge

On caractérise les groupes finis impairs *i.e.* les groupes dont l'ordre est un nombre entier impair, en fonction de la structure de λ-anneau de l'anneau de représentation $R(G)_{\mathbb{Z}}$. L'opération $\pi \mapsto \wedge\pi$ a du sens pour des représentations finies dimensionnelles et l'objectif est de voir si cette application s'étend à la représentation virtuelle en respectant la loi $\wedge(\pi_1 \oplus \pi_2) = \wedge(\pi_1) \otimes \wedge(\pi_2)$.

Proposition 2.1. *Soit G un groupe fini, les conditions suivantes sont équivalentes.*

1. *L'ordre de G est impair.*
2. *L'application $\wedge$ s'étend aux représentations virtuelles comme un morphisme du groupe additif $R(G)_{\mathbb{Z}}$ au monoïde multiplicatif $R(G)_{\mathbb{C}}$.*

Preuve. Supposons d'abord que l'application $\wedge$ s'étend à un morphisme. On a $\wedge(0) = 1$ et par conséquent,

$$\wedge(\pi) \wedge (-\pi) = 1 \in R(G)_{\mathbb{C}}$$

En passant à l'anneau $C(G)$ des fonctions centrales par l'application de Brauer, on obtient que le caractère de $\wedge(\pi)$ est inversible dans $C(G)$ et par conséquent, qu'il ne s'évanouit pas. Ainsi, par le lemme 2.2 (ci-dessous), il découle que G est d'ordre impair. Supposons maintenant que G est d'ordre impair.

Par construction, le groupe additif $R(G)_{\mathbb{Z}}$ s'obtient par symétrisation du monoïde additif des représentations finies dimensionnelles de G. Donc l'existence de l'extension est automatique si l'application $\wedge$ atterrit sur les éléments inversibles du monoïde multiplicatif $R(G)_{\mathbb{C}}$. Ce monoïde est le même que le monoïde de la classe des fonctions à valeurs complexes $C(G)$ selon le produit terme à terme. Un élément dans $C(G)$ est inversible ssi il ne s'évanouit pas et par conséquent, on obtient l'existence de l'extension en utilisant le lemme 2.2. $\square$

Lemme 2.2. *Soit G un groupe fini, les conditions suivantes sont équivalentes*

1. *L'ordre de G est impair.*
2. *Pour toute représentation finie dimensionnelle π de G, les caractères de $\wedge\pi$ ne s'évanouissent pas :*

$$\mathrm{Tr}(\wedge\pi(g)) \neq 0\,,\ \ \forall g \in G$$

Preuve. Si G est d'ordre pair, il contient un élément g d'ordre 2 et $\lambda(g)$ a la valeur propre -1 dans la représentation régulière, de telle façon que

$$\mathrm{Tr}(\wedge\pi(g)) = \prod(1+\alpha) = 0$$

Si G est d'ordre impair, n'importe quel élément $g \in G$ est d'ordre impair et par conséquent, -1 ne peut pas être une valeur propre de $\pi(g)$ puisque $(-1)^k \neq 1$ pour k impair. Par conséquent,

$$\mathrm{Tr}(\wedge\pi(g)) = \prod(1+\alpha) \neq 0$$

Donc on obtient la conclusion souhaitée. $\square$

3 Euler et les séries divergentes

On explique brièvement ce qui ne va pas dans le cas pair. Il est intéressant de noter qu'étendre l'application $\wedge$ achoppe sur la sommation des séries divergentes. Pour être plus précis, on a par construction

$$\wedge = \sum_0^\infty \lambda_j \tag{2}$$

où les λ_j sont les opérations lambda qui font partie de la structure de l'anneau de représentation. Dans le cas le plus simple, *i.e.* quand le groupe G est réduit à un élément, les opérations λ_j sont données par les coefficients binomiaux

$$\lambda_j(x) := \frac{1}{j!} \prod_0^{j-1} (x-k) \tag{3}$$

Par conséquent, quand on applique (2) à des nombres négatifs $x \in \mathbb{Z}$, on obtient les sommes infinies

$$\wedge(-1) = 1 + (-1) + 1 + (-1) + 1 + \ldots$$

$$\wedge(-2) = 1 - 2 + 3 - 4 + 5 + \ldots$$

pour lesquelles Leibniz et Euler donnent les valeurs $\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{4}$ respectivement (voir [6, 4]).

> For this reason, if we employ this definition of sum, that is to say, the sum of a series is that quantity which generates the series, all doubts with respect to divergent series vanish and no further controversy remains on this score, inasmuch as this definition is applicable equally to convergent or divergent series. Accordingly Leibniz, without any hesitation, accepted for the series *1 - 1 + 1 - 1 + etc.*, the sum *1/2*, which arises out of the expansion of the fraction *1/1+1*, and for the series *1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + 7 - 8 etc.* the sum *1/4*, which arises out of the expansion of the formula $1/(1+1)^2$.

FIGURE 3 : Euler et les séries divergentes.

Ces valeurs donnent la réponse correcte $\wedge(-j) = 2^{-j}$ grâce aux signes alternés. Ce que la proposition 2.1 montre, c'est qu'on ne peut pas définir ces sommes de séries infinies quand tous les signes sont identiques puisque l'extension de l'application $\wedge$ n'est pas possible à moins que le groupe ne soit impair. Pour voir concrètement ce qui arrive dans le cas pair, considérons le groupe cyclique C d'ordre 2. Les éléments de $R(G)_{\mathbb{Z}}$ sont de la forme $n + m\chi$ où $\chi^2 = 1$ et $n, m \in \mathbb{Z}$. La structure du λ-anneau est telle que

$$\lambda_j(m\chi) := \frac{1}{j!} \prod_0^{j-1} (m-k)\chi^j \tag{4}$$

alors que l'application de Brauer envoie en particulier $\chi \mapsto -1$ par évaluation sur la classe de conjugaison non triviale. Par conséquent, sur cette classe, on obtient les sommes infinies

$$\wedge(-\chi) \mapsto 1 + 1 + 1 + \ldots$$

$$\wedge(-2\chi) = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \ldots$$

et Euler énonce clairement que de telles sommes sont infinies, alors que leurs analogues alternées ne le sont pas.

4 Wedge en fonction des opérations de Adams

Quand l'ordre de G est impair, il est possible d'écrire une formule pour l'opération $\wedge$ comme une exponentielle d'une combinaison linéaire d'opérations de Adams dans l'anneau de représentation $R(G)_{\mathbb{Z}}$.

On utilise, pour $u > 0$, la notation suivante pour la fonction de Hurwitz

$$H(u) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m+u}$$

où la somme est convergente et peut être calculée pour des valeurs rationnelles de u, comme

$$H(2/3) = \frac{\pi}{\sqrt{3}} - \log(2)$$

En général, on a avec k un entier impair et $j \in \{1, \ldots, k\}$,

$$H(j/k) = (-1)^{j+1} \sum_{|v|<k/2} \left(\cos\left(\frac{2\pi jv}{k}\right) \log\left(2\cos(\frac{\pi v}{k}\right) + \frac{\pi v}{k} \sin\left(\frac{2\pi jv}{k}\right)\right)$$

Théorème 4.1. *Soit G un groupe fini d'ordre impair k. Soit ψ_j les endomorphismes de Adams de l'anneau de représentation $R(G)_{\mathbb{Z}}$. Alors l'opération wedge $\wedge : R(G)_{\mathbb{Z}} \to R(G)_{\mathbb{C}}$ est donnée par la formule :*

$$\wedge(x) = e^{\sum_1^k c_j \psi_j(x)}, \quad c_j = (-1)^{j+1} \frac{H(j/k)}{k} \tag{5}$$

Preuve. Les deux côtés définissent des morphismes du groupe additif $R(G)_{\mathbb{Z}}$ vers le monoïde multiplicatif $R(G)_{\mathbb{C}}$. Par conséquent, il suffit de vérifier l'égalité (5) quand $x = \pi$ est une représentation effective de G. On évalue la fonction de classe associée aux deux côtés sur un élément du groupe $g \in G$. En exprimant la trace en fonction des valeurs propres α_j de $\pi(g)$, le côté gauche donne $\prod(1+\alpha_j)$. Pour le côté droit, la formule est l'exponentielle calculée point par point dans l'anneau de classe $C(G)$ de l'expression obtenue en remplaçant $\psi_j(x)$ par $\sum \alpha_i^j$. Par conséquent, puisque l'exponentielle transforme l'addition en produit, il suffit de montrer que pour tout $\alpha \in \mathbb{C}$ avec $\alpha^k = 1$, on a

$$1 + \alpha = e^{\sum_1^k c_j \alpha^j}$$

Pour voir cela, considérons pour $0 < t < 1$ la formule

$$\log(1 + \alpha t) = \sum_1^{\infty} (-1)^{j+1} \frac{\alpha^j t^j}{j}$$

En utilisant $\alpha^k = 1$, on réécrit le côté droit comme

$$\sum_1^k (-1)^{j+1} \alpha^j t^j \left(\sum_0^{\infty} (-1)^u \frac{t^{ku}}{j+ku} \right)$$

En appliquant l'exponentielle aux deux côtés (encore pour $t < 1$), on a

$$1 + t\alpha = \exp\left(\sum_1^k (-1)^{j+1}\alpha^j t^j \left(\sum_0^\infty (-1)^u \frac{t^{ku}}{j+ku}\right)\right)$$

Maintenant, quand $t \to 1$, on a la convergence

$$\lim_{t\to 1}\left(\sum_0^\infty (-1)^u \frac{t^{ku}}{j+ku}\right) = \frac{1}{k}H(j/k).$$

En effet, on a $j \geq 1$ et

$$\frac{t^{2kv}}{j+2kv} - \frac{t^{2kv+k}}{j+2kv+k} = \frac{t^{2kv}k}{(j+2kv)(j+2kv+k)} + \frac{t^{2kv}\left(1-t^k\right)}{(j+2kv+k)}$$

où l'on contrôle le comportement de la série faisant intervenir le dernier terme quand $t \to 1$ parce qu'on a $(1-t^k)|\log(1-t^{2k})| \to 0$ quand $t \to 1$.

Donc, la continuité de l'exponentielle permet de passer à la limite quand $t \to 1$ et fournit l'égalité requise. □

Corollaire 4.2. *Soit G un groupe fini d'ordre impair k. L'extension canonique de l'opération wedge $\wedge : R(G)_\mathbb{C} \to R(G)_\mathbb{C}$ (donnée par la formule (5)) a un noyau non trivial donné par les fonctions centrales $f(g)$ telles que*

$$\sum_1^k (-1)^j H(j/k) f(g^j) \in 2\pi i k\mathbb{Z}\,,\ \forall g \in G.$$

Preuve. La condition découle de (5). La transformation

$$T(f)(g) := \sum_1^k (-1)^j H(j/k) f(g^j) \tag{6}$$

est une application linéaire $T : R(G)_\mathbb{C} \to R(G)_\mathbb{C}$ sur les fonctions centrales. Si le noyau de T est trivial alors T est surjective et l'image inverse du réseau $(2\pi i k\mathbb{Z})^c$, où c est le nombre de classes, est non triviale. Par conséquent, dans toutes les cas, le noyau de $\wedge : R(G)_\mathbb{C} \to R(G)_\mathbb{C}$ est non trivial. □

5 Le premier groupe impair non abélien

On peut se demander si l'application linéaire (6) est toujours injective. Cela n'est pas le cas en général. On étudie l'exemple non abélien le plus simple. Le premier groupe non abélien d'ordre impair est d'ordre 21 et est le produit semi-direct du groupe cyclique $C(7)$ par le groupe cyclique $C(3)$ agissant non trivialement. C'est un sous-groupe d'indice 2 dans le groupe affine de $\mathbb{F}_7$. C'est un sous-groupe transitif du groupe de permutations sur 7 lettres et on le dénote TransitiveGroup(7,3).

Ce groupe a 5 classes de conjugaison, les 4 classes non triviales, étiquetées $\gamma_2, \gamma_3, \gamma_4, \gamma_5$ (ou simplement $2, 3, 4, 5$ quand aucune confusion ne peut se produire) sont de la forme :

$$\gamma_2 = 7A, \gamma_3 = 7B,\ \gamma_4 = 3A,\ \gamma_5 = 3B,$$

où les classes $7A$ et $7B$ sont d'ordre 7 et de taille 3, et les classes $3A$ et $3B$ sont d'ordre 3 et de taille 7. L'action de l'inversion $j : g \mapsto g^{-1}$ échange simplement $3A$ et $3B$ d'une part, et $7A$ et $7B$ d'autre part. L'action de G sur lui-même par conjugaison commute avec l'inversion et se réduit (en plus de la représentation triviale) à la somme de deux copies des représentations de G par des permutations des ensembles à 3 et à 7 éléments. La représentation par des permutations sur l'ensemble à trois éléments $7A$ se fait par des permutations cycliques en utilisant le morphisme

$$G = C(7) \rtimes C(3) \to C(3)$$

La représentation par des permutations sur l'ensemble à sept éléments $3A$ est fidèle et elle donne

$$G \simeq \text{TransitiveGroup}(7, 3)$$

(dans la notation standard de théorie des groupes).

L'action des 21 applications puissance $g \mapsto g^n$, $n = 1, \ldots, 21$, sur la classe de conjugaison 2 est donnée par

$$\{2, 2, 3, 2, 3, 3, 1, 2, 2, 3, 2, 3, 3, 1, 2, 2, 3, 2, 3, 3, 1\}$$

Sur la classe de conjugaison 3, elle est donnée par

$$\{3, 3, 2, 3, 2, 2, 1, 3, 3, 2, 3, 2, 2, 1, 3, 3, 2, 3, 2, 2, 1\}$$

Ces classes sont d'ordre 7 et par conséquent, l'exposant pertinent dans (5) se réduit sur la classe 2 à

$$\frac{1}{7}u(1)H(1) + \frac{1}{7}u(2)\left(H\left(\frac{1}{7}\right) - H\left(\frac{2}{7}\right) - H\left(\frac{4}{7}\right)\right) + \frac{1}{7}u(3)\left(H\left(\frac{3}{7}\right) + H\left(\frac{5}{7}\right) - H\left(\frac{6}{7}\right)\right)$$

et sur la classe 3 à la même expression avec $u(2)$ et $u(3)$ échangés.

Mais on a

$$-H\left(\frac{1}{7}\right) + H\left(\frac{2}{7}\right) + H\left(\frac{4}{7}\right) = -H\left(\frac{3}{7}\right) - H\left(\frac{5}{7}\right) + H\left(\frac{6}{7}\right)$$

En fait, de façon plus précise, on a

$$H\left(\frac{1}{7}\right) + H\left(\frac{6}{7}\right) = \frac{\pi}{\sin(\frac{\pi}{7})}, H\left(\frac{2}{7}\right) + H\left(\frac{5}{7}\right) = \frac{\pi}{\cos(\frac{3\pi}{14})}, H\left(\frac{3}{7}\right) + H\left(\frac{4}{7}\right) = \frac{\pi}{\cos\left(\frac{\pi}{14}\right)}$$

et l'égalité ci-dessus découle de

$$\frac{1}{\sin(\frac{\pi}{7})} = \frac{1}{\cos(\frac{3\pi}{14})} + \frac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{14}\right)}$$

En fait, on trouve que dans les deux cas, la somme se réduit à

$$\frac{\log 2}{7}\, u(1) + \frac{3}{7} \log 2\, (u(2) + u(3))$$

Donc cela signifie que le $\wedge(u)$ dépend seulement de la somme $u(2)+u(3)$ de la fonction centrale u, *i.e.* la somme de leurs valeurs sur les classes $7A$ et $7B$. La table de caractères pour G est la suivante

classe	1	7A	7B	3A	3B
taille	1	3	3	7	7
ρ_1	1	1	1	1	1
ρ_2	1	1	1	j^2	j
ρ_3	1	1	1	j	j^2
ρ_4	3	$\frac{-1-\sqrt{-7}}{2}$	$\frac{-1+\sqrt{-7}}{2}$	0	0
ρ_5	3	$\frac{-1+\sqrt{-7}}{2}$	$\frac{-1-\sqrt{-7}}{2}$	0	0

où $j := e^{\frac{2\pi i}{3}}$. On voit sur cette table que les caractères des représentations ρ_4 et ρ_5 ont la même somme sur les classes $7A$ et $7B$. Par conséquent, on obtient le

Lemme 5.1. *Les représentations irréductibles ρ_4 et ρ_5 du groupe $G = C(7) \rtimes C(3)$ deviennent isomorphes après avoir appliqué le wedge, $\wedge\rho_4 = \wedge\rho_5$.*

Preuve. En effet, l'application T de (6) prend la même valeur sur ρ_4 et ρ_5 et le caractère de $\wedge\rho_j$ est une fonction de $T\rho_j$ de telle façon que les $\wedge\rho_j$ ont le même caractère et par conséquent sont égaux. $\square$

En fait, calculons les caractères de $\wedge\rho_j$. Sur les classes $7A$ et $7B$, ils vérifient l'égalité $u(2)+u(3) = -1$ et par conséquent, on obtient, puisque $u(1) = 3$,

$$\frac{\log 2}{7}\, u(1) + \frac{3}{7}\log 2\,(u(2)+u(3)) = 0$$

Après avoir pris l'exponentielle, cela donne la même contribution que $2\rho_1+\rho_4+\rho_5$ puisque le dernier est égal à $2-1=1$ sur les classes $7A$ et $7B$. Les réponses concordent pour la classe de conjugaison triviale où elles donnent toutes les deux 8. Il reste à voir ce qu'elles donnent sur les classes $3A$ et $3B$. Ces classes sont d'ordre 3 et l'action de la fonction puissance sur la classe 4 est de la forme

$$\{4,5,1,4,5,1,4,5,1,4,5,1,4,5,1,4,5,1,4,5,1\}$$

donc la somme pertinente se réduit sur la classe 4 à

$$\frac{1}{3}u(1)H(1) + \frac{1}{3}u(4)H\left(\frac{1}{3}\right) - \frac{1}{3}u(5)H\left(\frac{2}{3}\right)$$

et sur la classe 5 à la même expression avec $u(4)$ et $u(5)$ échangés. Mais on a

$$H(1/3) = \frac{\pi}{\sqrt{3}} + \log(2),\; H(2/3) = \frac{\pi}{\sqrt{3}} - \log(2)$$

À la fois pour ρ_4 et pour ρ_5, on a $u(1) = 3$, $u(4) = 0$ et $u(5) = 0$. Donc dans les deux cas, on a

$$\frac{1}{3}u(1)H(1) + \frac{1}{3}u(4)H\left(\frac{1}{3}\right) - \frac{1}{3}u(5)H\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{1}{3}u(1)H(1) = \log 2$$

et après avoir prix l'exponentiation, cela donne 2. Ainsi nous avons montré

$$\wedge\rho_j = 2\rho_1 + \rho_4 + \rho_5\,,\ \ \forall j = 4,5 \tag{7}$$

et cela correspond dans chaque cas à la décomposition de $\wedge$ comme $\sum \wedge^j$.

On a ainsi calculé la matrice T agissant sur les vecteurs colonne comme étant

$$T = \begin{pmatrix} \log(2) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\log(2)}{7} & \frac{3\log(2)}{7} & \frac{3\log(2)}{7} & 0 & 0 \\ \frac{\log(2)}{7} & \frac{3\log(2)}{7} & \frac{3\log(2)}{7} & 0 & 0 \\ \frac{\log(2)}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{3}\left(\log(2)+\frac{\pi}{\sqrt{3}}\right) & \frac{1}{3}\left(\log(2)-\frac{\pi}{\sqrt{3}}\right) \\ \frac{\log(2)}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{3}\left(\log(2)-\frac{\pi}{\sqrt{3}}\right) & \frac{1}{3}\left(\log(2)+\frac{\pi}{\sqrt{3}}\right) \end{pmatrix}$$

Ses valeurs propres sont

$$\left\{\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}, \log(2), \frac{6\log(2)}{7}, \frac{2\log(2)}{3}, 0\right\}$$

Ses vecteurs propres sont les lignes de la matrice :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

6 Itération de $\Psi = $ wedge -1

Le calcul ci-dessus restreint à la classe des fonctions qui prennent les mêmes valeurs sur les classes $2 = 7A$ et $3 = 7B$ et les mêmes valeurs sur $4 = 3A$ et $5 = 3B$ donne les résultats suivants.

Lemme 6.1. *Soit $G = C(7) \rtimes C(3)$. Soit $f \in R(G)$ une fonction classe qui est réelle et invariante sous $g \mapsto g^{-1}$. Alors, pour les trois valeurs de f sur la classe triviale 1, la classe $2 = 7A$ et la classe $4 = 3A$, on a*

$$\wedge(f)(1) = 2^{f(1)},\ \wedge(f)(2) = 2^{\frac{1}{7}f(1)+\frac{6}{7}f(2)},\ \wedge(f)(4) = 2^{\frac{1}{3}f(1)+\frac{2}{3}f(4)} \tag{8}$$

Preuve. La formule pour $\wedge f(2)$ vient de l'expression ci-dessus

$$\frac{\log 2}{7}\,u(1) + \frac{3}{7}\log 2\,(u(2)+u(3))$$

avec $u(2) = u(3) = f(2)$. La formule pour $\wedge f(4)$ provient de

$$\frac{1}{3}u(1)H(1) + \frac{1}{3}u(4)H\left(\frac{1}{3}\right) - \frac{1}{3}u(5)H\left(\frac{2}{3}\right)$$

avec $u(4) = u(5) = f(4)$ alors $H\left(\frac{1}{3}\right) - H\left(\frac{2}{3}\right) = 2\log 2$. □

Pour l'action du groupe sur lui-même par conjugaison, le caractère associe à $g \in G$ l'ordre de son commutant. Ici, cela donne 21 pour la classe 1, 7 pour les classes $2 = 7A$, $3 = 7B$, et 3 pour $4 = 3A$ et $5 = 3B$. Quand on commence à itérer le wedge -1 sur son point de départ, il devient immédiatement hors de portée puisque après deux étapes, il ressemble, pour les paires $(f(1), f(4))$ à :

$$\{21, 3\},\ \{2097151, 511\},\ \{2.272148509580683 \times 10^{631305}, 4.674093841761078 \times 10^{210537}\}$$

Pourtant, nous allons expliquer maintenant que cela se produit à cause d'un mauvais choix du point de départ. On élimine la condition $u(4) = u(5)$ et on impose les conditions $u(1) = u(2) = u(3) = 1$ qui sont par construction stables par la transformation $h \mapsto \wedge h - 1$. On définit $u(4) = x + iy$ un nombre complexe et on remplace la condition $u(4) = u(5)$ par $\overline{u(4)} = u(5)$. Alors on a le

Lemme 6.2. *La condition $\overline{u(4)} = u(5)$ est invariante par $h \mapsto \wedge h - 1$ et, en fonction des variables réelles (x, y), $u(4) = x + iy$, la transformation $h \mapsto \wedge h - 1$ est donnée par*

$$\Phi(x, y) := \left(2^{\frac{1}{3}(2x+1)} \cos\left(\frac{2\pi y}{3\sqrt{3}}\right) - 1, 2^{\frac{1}{3}(2x+1)} \sin\left(\frac{2\pi y}{3\sqrt{3}}\right)\right)$$

Preuve. On a, par définition, en utilisant $u(1) = 1$, que les composants pour $v = \wedge u - 1$ sont

$$v(4) = \exp\left(\frac{1}{3}H(1) + \frac{1}{3}u(4)H\left(\frac{1}{3}\right) - \frac{1}{3}u(5)H\left(\frac{2}{3}\right)\right) - 1$$

$$v(5) = \exp\left(\frac{1}{3}H(1) + \frac{1}{3}u(5)H\left(\frac{1}{3}\right) - \frac{1}{3}u(4)H\left(\frac{2}{3}\right)\right) - 1$$

On a

$$H(1) = \log(2),\ H(1/3) = \frac{\pi}{\sqrt{3}} + \log(2),\ H(2/3) = \frac{\pi}{\sqrt{3}} - \log(2)$$

par conséquent, les exponentiations donnent respectivement $\frac{\log 2}{3}(2x + 1) + \frac{2i\pi y}{3\sqrt{3}}$ et son conjugué complexe. Donc on obtient la formule requise. $\square$

Le jacobien de Φ est donné par

$$J(x, y) = \frac{1}{3} 2^{\frac{2(x+2)}{3}} \begin{pmatrix} \log(2) \cos\left(\frac{2\pi y}{3\sqrt{3}}\right) & -\frac{\pi}{\sqrt{3}} \sin\left(\frac{2\pi y}{3\sqrt{3}}\right) \\ \log(2) \sin\left(\frac{2\pi y}{3\sqrt{3}}\right) & \frac{\pi}{\sqrt{3}} \cos\left(\frac{2\pi y}{3\sqrt{3}}\right) \end{pmatrix}$$

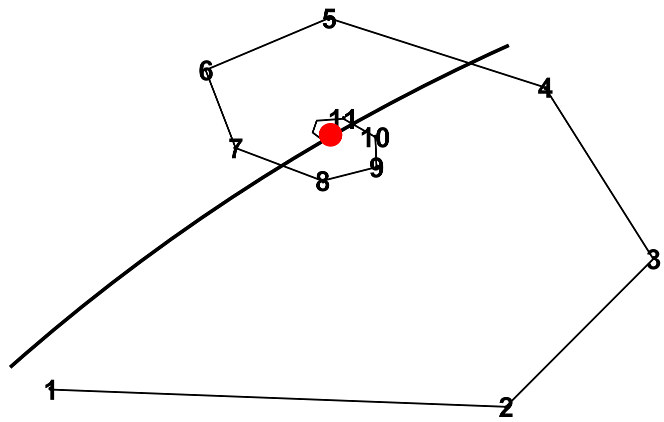
Quand on l'évalue sur le premier point fixe $P = (-1/2, \sqrt{3}/2)$, on obtient

$$(J(P)^* J(P))^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} \log(2) & 0 \\ 0 & \frac{\pi}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

et on a la décomposition polaire

$$J(P) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} . (J(P)^* J(P))^{\frac{1}{2}}$$

Il découle de cela, puisqu'à la fois les valeurs propres de $(J(P)^* J(P))^{\frac{1}{2}}$ sont < 1 que P est un point fixe attracteur.



En fait, le jacobien de la transformation Ψ au point fixe $1 \in \mathbb{C}$, est

$$\begin{pmatrix} \frac{4\log(2)}{3} & 0 \\ 0 & \frac{4\pi}{3\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

On a $\frac{4\log(2)}{3} < 1$, $\frac{4\pi}{3\sqrt{3}} > 1$ et cela montre que dès qu'on dévie dans le domaine complexe, par une légère perturbation, de la représentation triviale, on finit par atterrir dans le domaine d'attraction de l'un des deux caractères non triviaux. Par conséquent, on a le

Fait 6.3. *Les itérations $\Psi^{\circ n}(1 \pm i\epsilon)$ d'une petite perturbation complexe de la représentation triviale des classes 3A,3B, comme ci-dessus convergent, lorsque $n \to \infty$ vers un caractère non trivial de G.*

7 Tous les points fixes ne donnent pas des caractères

Ce très joli comportement de l'itération sur l'application Ψ n'est cependant pas vrai en général et il suffira de le démontrer en regardant son comportement sur les deux autres classes de conjugaison $7A$ et $7B$. Dans ce cas comme nous le verrons ci-dessous, on obtient après une itération la même valeur pour $u(2)$ et $u(3)$ qui est donnée, avec $u(1) = 1$, par

$$v(2) = v(3) = 2^{\frac{1}{7}+\frac{3}{7}(u(2)+u(3))} - 1$$

Par conséquent, dans ce cas, la transformation $\Psi = \wedge - 1$ prend la forme :

$$\Psi(z) = 2^{\frac{1}{7}+\frac{6}{7}z} - 1$$

L'équation du point fixe $\Psi(z) = z$ est équivalente à $we^w = -\frac{6}{7}2^{-\frac{5}{7}}\log 2$ où on laisse $w = -\frac{6}{7}(1 + z)\log 2$. La valeur numérique $u = -\frac{6}{7}2^{-\frac{5}{7}}\log 2 \sim -0.362124$ est légèrement plus grande que $-1/e \sim -0.367879$ et par conséquent, on tombe dans le domaine dans lequel il existe deux solutions pour l'équation de Lambert $we^w = u$ (voir [8, 5]). Ce sont $W(u)$ et $W_{-1}(u)$ comme on le montre dans la figure 4.

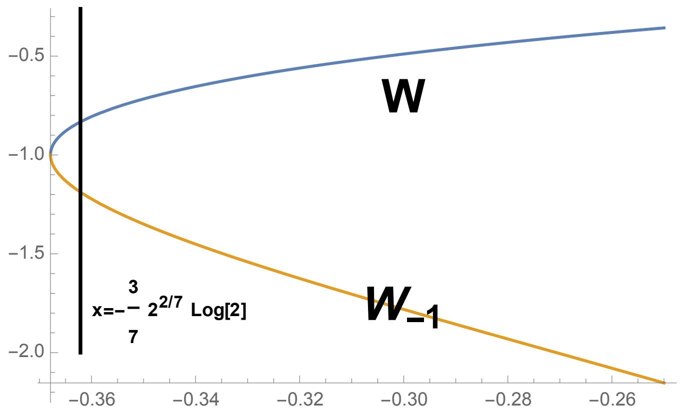


FIGURE 4 : Les deux branches de la fonction de Lambert dans l'intervalle $[-1/e, 0)$.

La solution évidente $z = 1$ correspond à $W_{-1}(u)$ mais la branche principale de la fonction de Lambert $W(u)$ donne une autre solution réelle non triviale $z \sim 0.401664$. Cette solution ne correspond pas de manière évidente à un caractère et de plus, elle ne peut avoir lieu sur la base de sa nature comme un point fixe de Ψ parce qu'elle s'avère être un attracteur. De plus, le problème qui survient est que le point fixe naturel 1 n'est pas un attracteur. En fait, la dérivée de $\Psi(z)$ en $z = 1$ est $\frac{12\log(2)}{7}$ qui est > 1. Par conséquent, 1 est un point fixe répulsif alors qu'en fait, l'autre $z = -\frac{7W\left(\frac{1}{7}(-3)2^{2/7}\log(2)\right)}{6\log(2)} - 1$ qui est ~ 0.401664 est un attracteur. Ce point fixe donne une solution de l'équation $\wedge f = 1 + f$ qui, bien qu'elle soit réelle (*i.e.* on a $f(g^{-1}) = \overline{f(g)}$ pour tout $g \in G$), et a pour dimension 1 (*i.e.* $f(1) = 1$) ne correspond pas à une représentation effective de dimension 1.

Notons également que l'équation de Lambert $we^w = u$ admet un nombre infini de solutions complexes données par les différentes branches complexes W_k, $k \notin \{-1, 0\}$, de la fonction de Lambert (voir [5]).

8 Conclusion

De l'analyse ci-dessus, on conclut qu'indubitablement, il vaut la peine d'investiguer en grand détail les points fixes de l'application $\Psi := \wedge - 1$ sur l'anneau de représentation complexifié des groupes finis d'ordre impair. En particulier, le lien avec les formes généralisées de l'équation de Lambert devrait être exploré. Mais il n'est toujours pas clair du tout de savoir si cette approche devrait mener à la construction d'un caractère non trivial uni-dimensionnel. Une raison d'être sceptique est que seule la loi de puissance des classes de conjgaison est utilisée pour dériver la formule pour Ψ, alors que la compatibilité avec la loi de puissance ne suffit pas à sélectionner des caractères parmi les fonctions de classe unitaire comme on le voit dans l'exemple le plus simple du groupe abélien impair $C(3) \times C(3)$.

Références bibliographiques

[1] M. F. Atiyah, *Characters and cohomology of finite groups*. Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. No. 9 1961 23–64.

[2] M. F. Atiyah, G. Segal, *Equivariant K-theory and completion*. J. Differential Geometry 3 1969 1–18.

[3] M. F. Atiyah, *Groups of odd order*. Notes non publiées.

[4] E. J. Barbeau, P. J. Leah, *Euler's 1760 paper on divergent series*. Historia Math. 3 (1976), no. 2, 141–160.

[5] R. Corless, G. Gonnet, D. Hare, J. Jeffrey, D. Knuth, *On the Lambert W function*. Adv. Comput. Math. 5 (1996), no. 4, 329–359.

[6] L. Euler, *De seriebus divergentibus*, Novi commentarii academiae scientiarum Petropolitanae 5 (1754/55), 205–237 (= Opera Omnia (1) 14, 585–617).

[7] L. Euler, *De formulis exponentialibus replicatis*, Leonhardi Euleri Opera Omnia, Ser. 1, Opera Mathematica 15 (1927) 268-297 (original date 1777).

[8] L. Euler, *De serie Lambertina plurimisque eius insignibus proprietatibus*, Leonhardi Euleri Opera Omnia, Ser. 1, Opera Mathematica, 6, (1921) 350–369 (original date 1779).