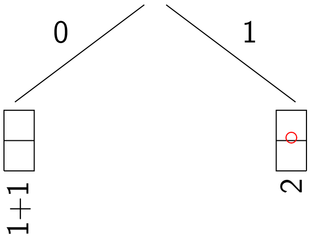
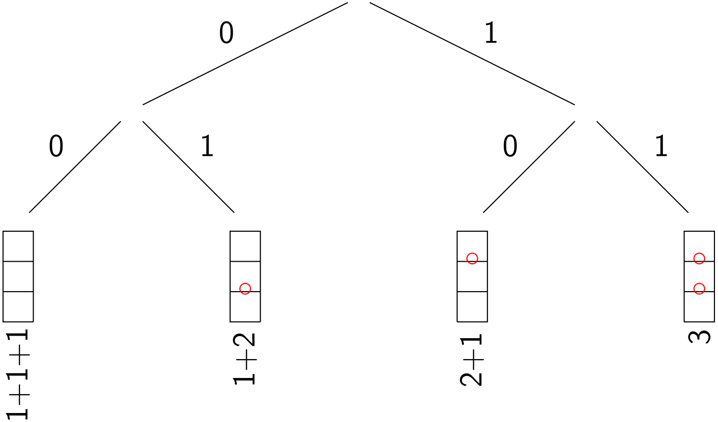
Compositions et mots booléens

- A chaque entier n, on associe ses 2^{n-1} compositions additives.
- *exemple* : arbre binaire des compositions de 2



Exemple

- *exemple* : arbre binaire des compositions de 3



- Noter que la composition $1 + 2$ est différente de la composition $2 + 1$.

Obtention des compositions de $n+1$ à partir de celles de n

- On concatène 0 ou 1 au début de chaque mot booléen de n.

- Cela correspond à deux actions syntaxiques : concaténer "1+" en début de composition ou bien remplacer le premier sommant par son successeur.

Nombre composé / nombre premier

- On appelle compositions triviales la composition correspondant au mot booléen ne contenant que des 0 (composition de la forme $1 + 1 + \ldots + 1$) ou bien la composition correspondant au mot booléen contenant $n - 1$ lettres 1 (composition de la forme n).

- Un nombre composé admet au moins une décomposition non triviale de la forme $x + x + x + \ldots + x$ contenant 2 occurrences de x au moins.

- A chaque entier est associé un ensemble de mots booléens, i.e. un ensemble de parties de $\mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} \mathbb{N} &\longrightarrow \{0,1\}^{\{0,1\}^{\mathbb{N}}} \\ n &\longmapsto \{s \in \{0,1\}^{\mathbb{N}} / \forall i \geqslant n, s[i] = 0\} \subset \mathcal{P}(\mathbb{N}) \end{aligned}$$

Formalisation

- Le passage de n à $n+1$ est codé par le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} \mathbb{N} \arrow[r, "d_n"] \arrow[d, "+1"'] & \{0,1\}^{\{0,1\}^{\mathbb{N}}} \arrow[d, "d_{n+1}"] \\ \mathbb{N} \arrow[r, "d_n"'] & \{0,1\}^{\{0,1\}^{\mathbb{N}}} \end{tikzcd}$$

avec $$d_n : \mathbb{N} \longrightarrow \{0,1\}$$

et

$$d_{n+1} : \begin{array}{ccc} k & \longmapsto & d_n(k-1), \forall k \geqslant 1 \\ 0 & \longmapsto & 0 \end{array}$$

- faire l'union de cet ensemble de fonctions avec l'ensemble des fonctions d_{n+1} qui associent l'image 1 (plutôt que 0) à 0.

Nombre composé / nombre premier

- Un nombre est composé n si l'un de ces mots non triviaux (dont on considère les $n-1$ premières lettres, i.e. la partie des mots avant l'infinité de zéros) admet une période (c'est un motif qui se répète, en théorie des langages).

- Un nombre est premier si tous ses mots sont apériodiques.