Extraits de

Bourbaki - Algèbre - Chapitres 5 à 7

E) *La notion de spectre.* La dernière en date des notions nouvelles de l'Algèbre commutative a une histoire complexe. Le théorème spectral de Hilbert introduisait des ensembles ordonnés de projecteurs orthogonaux d'un espace hilbertien, formant une «algèbre booléienne» (ou mieux un *réseau booléien*)(*), en correspondance biunivoque avec un réseau booléien de classes de parties mesurables (pour une mesure convenable) de **R**. Ce sont sans doute ses travaux antérieurs sur les opérateurs dans les espaces hilbertiens qui, vers 1935, amènent M. H. Stone à étudier de façon générale les réseaux booléiens, et notamment à en chercher des « représentations » par des parties d'un ensemble (ou des classes de parties pour une certaine relation d'équivalence). Il observe qu'un réseau booléien devient un *anneau commutatif* (d'un type très spécial d'ailleurs), lorsqu'on y définit la multiplication par $xy = \inf(x, y)$ et l'addition par $x + y = \sup(\inf(x, y'), \inf(x', y))$. Dans le cas particulier où l'on part du réseau booléien $\mathfrak{P}(X)$ de toutes les parties d'un ensemble *fini* X, on voit aussitôt que les éléments de X sont en correspondance

(*) Un *réseau booléien* est un ensemble ordonné réticulé E, ayant un plus petit élément α et un plus grand élément ω, où chacune des lois sup et inf est *distributive* par rapport à l'autre et où, pour tout $a \in E$, il existe un $a' \in E$ et un seul tel que $\inf(a, a') = \alpha$ et $\sup(a, a') = \omega$ (cf. *Ens.*, chap. III, 2[e] éd., § 1, exerc. 17).

biunivoque naturelle avec les *idéaux maximaux* de l'anneau «booléien» correspondant; et Stone obtient précisement son théorème général de représentation d'un réseau booléien en considérant de même l'ensemble des idéaux maximaux de l'anneau correspondant, et en associant à tout élément du réseau booléien l'ensemble des idéaux maximaux qui le contiennent (XXX *a*)).

D'autre part, on connaissait, comme exemple classique de réseau booléien, l'ensemble des parties à la fois ouvertes et fermées d'un espace topologique. Dans un second travail (XXX *b*)), Stone montra qu'en fait *tout* réseau booléien est aussi isomorphe à un réseau booléien de cette nature. Il fallait naturellement pour cela définir une *topologie* sur l'ensemble des idéaux maximaux d'un anneau « booléien »; ce qui se fait très simplement en prenant pour ensembles fermés, pour chaque idéal $\mathfrak{a}$, l'ensemble des idéaux maximaux contenant $\mathfrak{a}$.

Nous n'avons pas à parler ici de l'influence de ces idées en Analyse fonctionnelle, où elles jouèrent un rôle important dans la naissance de la théorie des algèbres normées développée par I. Gelfand et son école. Mais en 1945, Jacobson observe (XXXIV) que le procédé de définition d'une topologie, imaginé par Stone, peut en fait s'appliquer à *tout* anneau A (commutatif ou non) pourvu que l'on prenne comme ensemble d'idéaux non pas l'ensemble des idéaux maximaux, mais l'ensemble des idéaux « primitifs » bilatères (i.e. les idéaux bilatères $\mathfrak{b}$ tels que $A/\mathfrak{b}$ soit un anneau primitif); pour un anneau commutatif, on retrouve bien entendu les idéaux maximaux. De son côté, Zariski, en 1944 (XXXIII *a*)), utilise une méthode analogue pour définir une topologie sur l'ensemble des *places* d'un corps de fonctions algébriques. Toutefois, ces topologies restaient pour la plupart des algébristes de simples curiosités, en raison du fait qu'elles sont d'ordinaire non séparées, et qu'on éprouvait une répugnance assez compréhensible à travailler sur des objets aussi insolites. Cette méfiance ne fut dissipée que lorsque A. Weil montra, en 1952, que toute variété algébrique peut être munie de façon naturelle d'une topologie du type précédent et que cette topologie permet de définir, en parfaite analogie avec le cas des variétés différentiables ou analytiques, la notion d'*espace fibré* (XXXVII); peu après, Serre eut l'idée d'étendre à ces variétés ainsi topologisées la théorie des *faisceaux cohérents*, grâce à laquelle la topologie rend dans le cas des variétés « abstraites » les mêmes services que la topologie usuelle lorsque le corps de base est **C**, notamment en ce qui concerne l'application des méthodes de la Topologie algébrique (XXXVIII *a*) et *b*)).

Dès lors il était naturel d'utiliser ce langage géométrique dans toute l'Algèbre commutative. On s'est rapidement aperçu que la considération des idéaux maximaux est d'ordinaire insuffisante pour obtenir des énoncés commodes(*), et que la notion adéquate est celle de l'ensemble

(*) L'inconvénient de se borner au « spectre maximal » provient de ce que, si $\varphi : \mathrm{A} \to \mathrm{B}$ est un homomorphisme d'anneaux et $\mathfrak{n}$ un idéal maximal de B, $\overset{-1}{\varphi}(\mathfrak{n})$ n'est pas nécessairement un idéal maximal de A, alors que pour tout idéal premier $\mathfrak{p}$ de B, $\overset{-1}{\varphi}(\mathfrak{p})$ est un idéal premier de A. On ne peut donc en général associer à φ de façon naturelle une application de l'ensemble des idéaux maximaux de B dans l'ensemble des idéaux maximaux de A.

des idéaux *premiers* de l'anneau, topologisé de la même manière. Avec l'introduction de la notion de spectre, on dispose maintenant d'un dictionnaire permettant d'exprimer tout théorème d'Algèbre commutative dans un langage géométrique très proche de celui de la Géométrie algébrique de l'époque Weil-Zariski ; ce qui d'ailleurs a amené aussitôt à élargir considérablement le cadre de cette dernière, de sorte que l'Algèbre commutative n'en est plus guère, de ce point de vue, que la partie la plus élémentaire (XXXIX).

systems including some properties of Hilbert numbers, *Math. Ann.*, t. LXXIV (1913), p. 66–121.

(XXII) J. Kürschak, Über Limesbildung und allgemeine Körpertheorie, *J. de Crelle*, t. CXLII (1913), p. 211–253.

(XXIII) A. Fraenkel, Über die Teiler der Null und die Zerlegung von Ringen, *J. de Crelle*, t. CXLV (1914), p. 139–176.

(XXIV) A. Ostrowski, Über einige Lösungen der Funktionalgleichung $\varphi(x)\varphi(y) = \varphi(x \cdot y)$, *Acta Math.*, t. XLI (1917), p. 271–284.

(XXV) E. Noether: *a*) Idealtheorie in Ringbereichen, *Math. Ann.*, t. LXXXIII (1921), p. 24–66; *b*) Abstrakter Aufbau der Idealtheorie in algebraischen Zahl- und Funktionenkörpern, *Math. Ann.*, t. XCVI (1927), p. 26–61.

(XXVI) H. Hasse: *a*) Ueber die Darstellbarkeit von Zahlen durch quadratischen Formen im Körper der rationalen Zahlen, *J. de Crelle*, t. CLII (1923), p. 129–148; *b*) Ueber die Äquivalenz quadratischer Formen im Körper der rationalen Zahlen, *J. de Crelle*, t. CLII (1923), p. 205–224; *c*) Kurt Hensels entscheidender Anstoss zur Entdeckung des Lokal-Global-Prinzips, *J. de Crelle*, t. CCIX (1960), p. 3–4.

(XXVII) H. Jung, *Algebraischen Flächen*, Hannover (Helwing), 1925.

(XXVIII) H. Grell, Beziehungen zwischen den Idealen verschiedener Ringe, *Math. Ann.*, t. XCVII (1927), p. 490–523.

(XXIX) W. Krull: *a*) Primidealketten in allgemeine Ringbereichen, *Sitz. Ber. Heidelberg Akad. Wiss.*, 1928; *b*) Allgemeine Bewertungstheorie, *J. de Crelle*, t. CLXVII (1931), p. 160–196; *c*) Beiträge zur Arithmetik kommutativer Integritätsbereiche, III, *Math. Zeitschr.*, t. XLII (1937), p. 745–766; *d*) Dimensionstheorie in Stellenringen, *J. de Crelle*, t. CLXXIX (1938), p. 204–226; *e*) *Idealtheorie*, Berlin (Springer), 1935.

(XXX) M. H. Stone: *a*) The theory of representation for Boolean algebras, *Trans. Amer. Math. Soc.*, t. XL (1936), p. 37–111; *b*) Applications of the theory of Boolean rings to general topology, *Trans. Amer. Math. Soc.*, t. XLI (1937), p. 375–481.

(XXXI) B. L. van der Waerden, *Moderne Algebra*, t. II, Berlin (Springer), 1931.

(XXXII) C. Chevalley: *a*) Généralisation de la théorie du corps de classes pour les extensions infinies, *J. de Math.*, (9), t. XV (1936), p. 359–371; *b*) On the theory of local rings, *Ann. of Math.*, t. XLIV (1943), p. 690–708.

(XXXIII) O. Zariski: *a*) The compactness of the Riemann manifold of an abstract field of algebraic functions, *Bull. Amer. Math. Soc.*, t. L (1944), p. 683–691; *b*) Generalized semi-local rings, *Summa Bras. Math.*, t. I (1946), p. 169–195.

(XXXIV) N. Jacobson, A topology for the set of primitive ideals in an arbitrary ring, *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*, t. XXXI (1945), p. 333–338.

(XXXV) I. Cohen–A. Seidenberg, Prime ideals and integral dependence, *Bull. Amer. Math. Soc.*, t. LII (1946), p. 252–261.

(XXXVI) P. Samuel, La notion de multiplicité en Algèbre et en Géométrie algébrique, *J. de Math.*, (9), t. XXX (1951), p. 159–274.

(XXXVII) A. Weil, *Fibre-spaces in Algebraic Geometry* (Notes by A. Wallace), Chicago Univ., 1952.

(XXXVIII) J. P. Serre: *a*) Faisceaux algébriques cohérents, *Ann. of Math.*, t. LXI (1955), p. 197–278; *b*) Géométrie algébrique et géométrie analytique, *Ann. Inst. Fourier*, t. VI (1956), p. 1–42.

(XXXIX) A. Grothendieck, *Eléments de géométrie algébrique*, Publ. math. Inst. Htes. Et. Scient., 1960.