

Décomposants de Goldbach sur le cercle et sommes de Cauchy–Gauss

Denise Vella-Chemla pilotant l'ia claudé, octobre 2026

Je fournis à claudé les articles

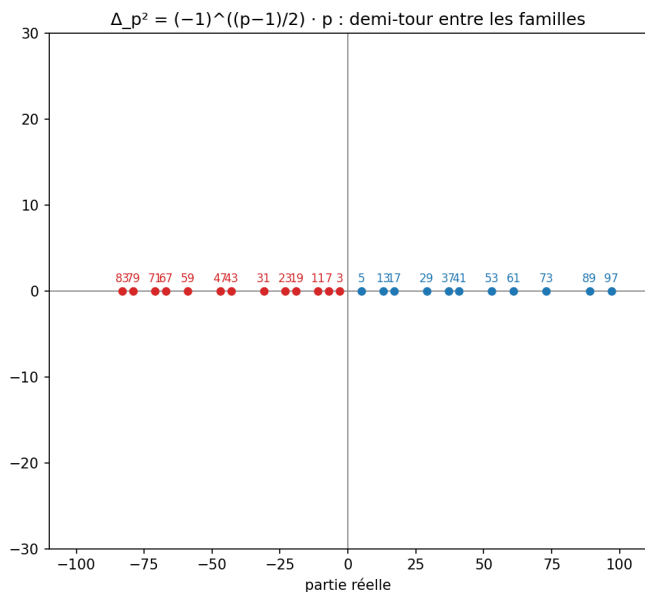
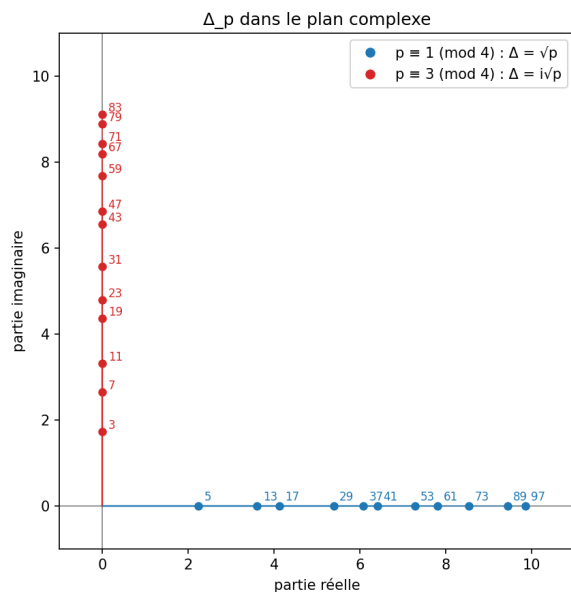
<https://denisevellaquemla.eu/transc-Cauchy-CRAS-1840.pdf>

<https://denisevellaquemla.eu/elem-Cauchy.pdf> et

<https://denisevellaquemla.eu/petitvelodanslatete.pdf>

et lui demande “dans l'article de Cauchy joint, tu verras qu'il y a une condition qui distingue précisément les nombres premiers de la forme $4k + 1$ des nombres premiers de la forme $4k + 3$. J'aimerais que tu testes pour les nombres pairs de 6 à 100, si les décomposants de Goldbach, qui se trouvent sur un cercle selon le document que je joins aussi ne vérifieraient pas à eux tous une équation invariante par exemple qui ressemblerait aux équations dont parle Cauchy, merci.

La suite de cette note a été intégralement rédigée par l'ia claudé.



1. Origine de la question

- *point de départ.* Dans cet article, une condition sur $\Delta = \sum_{k=0}^{n-1} \rho^{k^2}$ distingue les nombres premiers $4k + 1$ ($\Delta = \sqrt{n}$) des $4k + 3$ ($\Delta = i\sqrt{n}$) : les exposants sont des carrés, et un facteur i apparaît pour les $4k + 3$ seulement.
- *question posée.* Les décomposants de Goldbach, placés sur le cercle, vérifient-ils tous ensemble une équation invariante semblable à celles de Cauchy (pour les pairs de 6 à 100) ? Puis : peut-on utiliser la règle de phase de Cauchy ?
- *intuitions de l'auteur.* Les familles $4k + 1$ et $4k + 3$ sont “perpendiculaires, à un i près” ; la dissymétrie de la réciprocity quadratique cache une structure symétrique ; la distinction $6k \pm 1$ est peut-être plus pertinente pour Goldbach, car les $6k$ ont environ deux fois plus de décompositions (ils n'éliminent que la classe 0 modulo 3).

2. Cadre

Pour n pair, $\rho = e^{2i\pi/n}$ et $D(n) = \{p \text{ premier impair} : n - p \text{ premier}\}$. Les points du cercle sont $z_p = \rho^p$, $p \in D(n)$ (c'est le placement des figures jointes : par exemple $n = 10$, $D = \{3, 5, 7\}$, 5 à l'angle π).

Cauchy (1840) étudie $\Delta = \sum_{k=0}^{n-1} \rho^{k^2}$ pour n impair :

$$\Delta^2 = (-1)^{(n-1)/2} n, \text{ donc } \Delta = \sqrt{n} \text{ si } n \equiv 1, \Delta = i\sqrt{n} \text{ si } n \equiv 3 \pmod{4}.$$

Pour n pair (cas annoncé par Cauchy, non traité dans l'article) on vérifie numériquement :

$$\Delta = 0 \text{ si } n \equiv 2 \pmod{4}, \Delta = (1+i)\sqrt{n} \text{ si } n \equiv 0 \pmod{4}.$$

3. Quantités testées ($n = 6, \dots, 100$)

- $S_1(n) = \sum_{p \in D} \rho^p$ (réel, car $\rho^{n-p} = \overline{\rho^p}$);
- $S_2(n) = \sum_{p \in D} \rho^{p^2}$ (analogue direct de Δ restreint à D);
- $\prod_{p \in D} 2 \sin(\pi p/n)$ (analogue de la formule (4) : $n = \prod_{k=1}^{n-1} (1 - \rho^k)$).

4. Résultats

1. Seuls invariants trouvés : $z_p z_{n-p} = 1$ et $\sum_{p \in D} p = n|D|/2$. Ils découlent de la seule symétrie $p \mapsto n - p$, sans lien avec la primalité.
2. $S_1/|D|$ a une moyenne $-0,05$ et un écart-type $0,29$; S_1 s'annule pour $n = 16, 20, 32$ parce que D y contient des paires de somme $n/2$ (coïncidence, non générale).
3. $|S_2|^2/|D|$ a une moyenne $2,0$ (écart-type $1,8$) : comme $(n-p)^2 \equiv p^2$, S_2 est une somme doublée de $|D|/2$ termes, ce qui correspond au comportement aléatoire attendu.
4. Le produit de sinus varie de $0,03$ à 77 : aucune constante.

5. Idée : somme cohérente

Phases de Cauchy : $\Delta_p = \varepsilon_p \sqrt{p}$ avec $\varepsilon_p \in \{1, i\}$. Pour une paire $p + q = n$: $n \equiv 2 \pmod{4}$ donne $\Delta_p \overline{\Delta_q} = \sqrt{pq}$; $n \equiv 0 \pmod{4}$ donne $\Delta_p \Delta_q = i\sqrt{pq}$. Donc

$$C(n) = \sum_{\substack{p+q=n \\ p \leq q}} \Delta_p \Delta_q^{(*)} = \begin{cases} \sum \sqrt{pq} & n \equiv 2 \\ i \sum \sqrt{pq} & n \equiv 0 \end{cases} \pmod{4},$$

toutes les contributions ayant la même phase, sans annulation possible : $C(n) \neq 0$ si et seulement s'il existe un décomposant. Vérifié pour $n = 6, \dots, 100$. Limite : c'est un décompte pondéré par $\sqrt{pq}$, donc équivalent à Goldbach sans le démontrer.

6. Compléments : module p et facteur i

Pour p premier impair, $\Delta_p = \sum_{k < p} e^{2i\pi k^2/p} = \sqrt{p}$ si $p \equiv 1$, $i\sqrt{p}$ si $p \equiv 3 \pmod{4}$. Pour $p + q = n$ (vérifié pour $n = 6, \dots, 100$) :

- $n \equiv 2 \pmod{4}$ ($p \equiv q$) : $\Delta_p^2 + \Delta_q^2 = (-1)^{(p-1)/2}n$;
- $n \equiv 0 \pmod{4}$ ($p \not\equiv q$) : $\Delta_p^2 - \Delta_q^2 = \pm n$;
- $\Delta_p \Delta_q = i^k \sqrt{pq}$, où k est le nombre de p, q congrus à 3 (mod 4) ;
- $\left(\frac{n}{p}\right) \left(\frac{n}{q}\right) = -1$ si et seulement si $p \equiv q \equiv 3 \pmod{4}$ (réciprocité quadratique ; exceptions $n = 2p$ où $p \mid n$).

7. Conclusion

Aucune équation invariante de type Cauchy n'apparaît pour ces sommes. Dans le cas de Cauchy, l'invariant vient du fait que l'on somme sur *tous* les résidus : la relation $\sum_k \rho^k = 0$ fournit l'identité (20). Pour $D(n)$ on ne dispose pas d'une telle relation de complétion.

8. Annexes : les programmes et leur résultat

Le programme 1 : <https://denisevellachemla.eu/pgmcau1.pdf> .

Son résultat :

n	\#D	S1=sum rho^p	S2=sum rho^p^2	prod 2sin
6	1	-1.00000	-1.0000 +0.0000 i	2.00000
8	2	-1.41421	1.4142 +1.4142 i	3.41421
10	3	-1.61803	0.6180 -1.1756 i	5.23607
12	2	-1.73205	1.7321 +1.0000 i	3.73205
14	3	-0.55496	-2.2470 -1.5637 i	3.10992
16	4	0.00000	-3.6955 -1.5307 i	3.41421
18	4	-1.87939	-1.8794 -0.6840 i	8.29086
20	4	-0.00000	-3.8042 +1.2361 i	2.61803
22	5	0.59435	-1.3728 +2.5928 i	2.36817
24	6	-1.93185	5.7956 +1.5529 i	14.67387
26	5	0.25595	-0.6391 +0.3197 i	2.25442
28	4	-0.69590	0.6959 +0.5550 i	4.03490
30	6	-2.95630	-0.7202 -2.5568 i	22.88078
32	4	0.00000	-0.7804 +3.9231 i	1.23463
34	7	1.01423	-3.2340 -0.7225 i	1.37677
36	8	-1.28558	-0.6840 -1.8794 i	12.26193

38	3	-0.19661	-1.4910	+1.9388 i	2.39322
40	6	-0.31287	2.6011	+4.2636 i	1.90680
42	8	-1.32518	0.1388	-3.3155 i	12.25636
44	6	2.33708	3.1562	+1.5462 i	0.42565
46	7	1.02074	-2.6630	+3.3031 i	0.49988
48	10	0.26105	-1.9829	-0.2611 i	6.48984
50	8	1.55088	1.7526	+4.8927 i	0.74858
52	6	0.25457	-1.9854	+3.7829 i	2.08445
54	10	-0.51705	2.5390	+2.0406 i	17.82973
56	6	1.04763	1.1637	+2.5779 i	0.61077
58	7	0.91893	0.8868	+1.6546 i	1.82849
60	12	-2.80252	7.2320	-6.8902 i	76.92405
62	5	0.21367	1.1050	-0.2141 i	0.49431
64	10	3.15570	-0.9176	+3.3404 i	0.15434
66	12	0.51555	-3.4674	-2.7900 i	3.85674
68	4	-0.32762	0.9799	-0.4879 i	1.58502
70	10	0.45481	2.6153	+0.3858 i	1.35494
72	12	0.17977	-3.1395	+1.4640 i	5.56598
74	9	1.74686	0.9667	+1.4663 i	0.18234
76	10	1.97869	4.9393	+1.5343 i	0.15842
78	14	1.70283	-8.8362	-2.4587 i	1.59995
80	8	0.96246	-0.4730	+1.1420 i	2.04634
82	9	0.68481	-3.4170	+4.1798 i	0.53864
84	16	-0.57634	-3.3650	+8.2244 i	12.97681
86	9	4.22324	1.3700	+1.8315 i	0.03352
88	8	-0.33996	-1.1231	+4.4082 i	1.91937
90	18	-1.30393	-2.5571	+3.0474 i	68.07572
92	8	2.72077	2.5644	-0.8058 i	0.13699
94	9	0.59817	-1.5709	+1.1563 i	0.84920
96	14	0.08740	-1.9957	-0.1308 i	10.56387
98	6	-1.55554	1.8443	-4.0881 i	12.64183
100	12	0.31850	4.4633	+2.0177 i	0.61549

Reference Cauchy pour n pair : $\Delta_n = \sum_{k \leq n} \rho(k^2)$

6 (-0+0j) attendu: 0

8 (2.828427+2.828427j) attendu: $(1+i)\sqrt{n}=2.8284+2.8284j$

10 (-0-0j) attendu: 0

12 (3.464102+3.464102j) attendu: $(1+i)\sqrt{n}=3.4641+3.4641j$

16 (4+4j) attendu: $(1+i)\sqrt{n}=4.0000+4.0000j$

20 (4.472136+4.472136j) attendu: $(1+i)\sqrt{n}=4.4721+4.4721j$

100 (10+10j) attendu: $(1+i)\sqrt{n}=10.0000+10.0000j$

$S1/\#D$: moyenne -0.052, ecart-type 0.292 (invariant $\Rightarrow$ ecart-type ~ 0)

$S1^2/\#D$: moyenne 0.339, ecart-type 0.470

$|S2|^2/\#D$: moyenne 2.001, ecart-type 1.772

Invariants triviaux verifiés : $z_p z_{n-p}=1$

et somme des decomposants = $n\#D/2$ ($n=6..100$)

Variante avec facteur $i^{(-1)}$ pour $p \equiv 3 \pmod{4}$, exposants p^2 :

6 1 p=1: 0 p=3: 1 1j

8 2 p=1: 1 p=3: 1 (1.4142+0j)

10 3 p=1: 1 p=3: 2 (-2.1756-1.618j)

12 2 p=1: 1 p=3: 1 (1.366-0.366j)

14 3 p=1: 0 p=3: 3 (-1.5637+2.247j)

16 4 p=1: 2 p=3: 2 (-2.6131+1.0824j)

```

18 4 p=1: 2 p=3: 2 (-3.5017+1.6329j)
20 4 p=1: 2 p=3: 2 (-1.2841+2.5201j)
22 5 p=1: 2 p=3: 3 (2.391+4.194j)
24 6 p=1: 3 p=3: 3 (3.6742-2.1213j)
26 5 p=1: 1 p=3: 4 (-0.6803-0.3609j)
28 4 p=1: 2 p=3: 2 (0.6254-0.0705j)
30 6 p=1: 2 p=3: 4 (-2.4087-2.1043j)
40 6 p=1: 3 p=3: 3 (3.4324+0.8313j)
60 12 p=1: 6 p=3: 6 (0.1709-7.0611j)
80 8 p=1: 4 p=3: 4 (0.3345+0.8075j)
100 12 p=1: 6 p=3: 6 (3.2405-1.2228j)
|A|**2/\#D moyenne 1.398 ecart-type 1.192

```

Ces identités sont vraies mais ne font que traduire $p + q = n$ et la réciproité quadratique. Les sommes agrégées $\sum_{p \in D} \Delta_p / \sqrt{n}$ et $\sum_{\text{paires}} \Delta_p \Delta_q / n$ ne sont pas constantes (écarts-types 1,7 et 0,8).

Le programme 2 : : <https://denisevellachemla.eu/pgmcau2.pdf>.

Son résultat :

```

Erreurs max (0 = identite verifiee sur n=6..100) :
(a) Delta_p = sqrt(p) ou i sqrt(p) : 8.88656424230696e-15
(b) n=2 mod 4 : Dp^2+Dq^2 = (-1)^((p-1)/2) n : 1.2592325748081483e-13
(c) n=0 mod 4 : Dp^2-Dq^2 = +-n : 1.8488445377297548e-13
(d) DpDq = i^k sqrt(pq) : 5.69014309745302e-14
(e) (n/p)(n/q) = -1 ssi p,q = 3 mod 4 : 1

n  #D  sum_p Dp (normalise /sqrt n)  sum_pairs DpDq / n
6   1           0.707j  0.0
8   2      (0.791+0.612j)  0.484j
10  3      (0.707+1.384j) (-0.458+0j)
12  2      (0.645+0.764j)  0.493j
14  3           2.056j (-0.41+0j)
16  4      (1.46+1.262j)  0.854j
18  4      (1.377+1.405j) (-0.04+0j)
20  4      (1.728+0.979j)  0.834j
22  5      (1.356+2.006j) (0.076-0j)
24  6      (2.034+2.107j)  1.359j
26  5      (0.707+2.654j) (-0.763+0j)
28  4      (1.202+1.533j)  0.871j
30  6      (1.411+2.76j) (-0.409-0j)
40  6      (2.465+1.557j)  1.204j
50  8      (1.37+3.92j) (-0.631+0j)
60 12      (4.245+3.974j) (-0+2.635j)
70 10      (2.772+3.892j) (-0.115-0j)
80  8      (2.912+2.431j) (-0+1.576j)
90 18      (4.135+8.052j) (-1.064-0j)
100 12      (4.247+3.712j) (-0+2.304j)

ecart-type  s1: 1.737  s2: 0.791 (invariant => ~0)

```

Le programme 3 <https://denisevellachemla.eu/pgmcau3.pdf> reproduit le tableau complet.
Résultat d'exécution

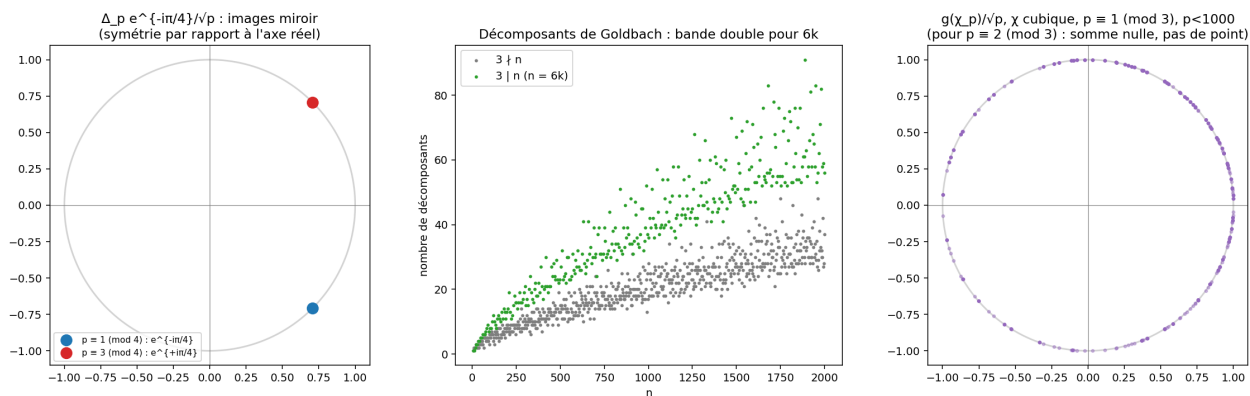
n	n\%4	{\rm paires}	C(n)=sum Dp*Dq^(+-)	sum sqrt(pq)	{\rm phases \; distinctes}
\hline					
6	2	1	3.000 +0.000 i	3.000	{0.0}
8	0	1	0.000 +3.873 i	3.873	{1.570796}
10	2	2	9.583 -0.000 i	9.583	{-0.0}
12	0	1	0.000 +5.916 i	5.916	{1.570796}
14	2	2	12.745 -0.000 i	12.745	{-0.0}
16	0	2	0.000 +13.661 i	13.661	{1.570796}
18	2	2	16.837 -0.000 i	16.837	{-0.0}
20	0	2	0.000 +16.681 i	16.681	{1.570796}
22	2	3	27.769 +0.000 i	27.769	{-0.0}
24	0	3	0.000 +32.614 i	32.614	{1.570796}
26	2	3	32.839 -0.000 i	32.839	{-0.0}
28	0	2	0.000 +24.399 i	24.399	{1.570796}
30	2	3	42.011 +0.000 i	42.011	{-0.0}
40	0	3	0.000 +48.170 i	48.170	{1.570796}
50	2	4	75.425 -0.000 i	75.425	{-0.0}
60	0	6	-0.000+158.083 i	158.083	{1.570796}
70	2	5	137.030 -0.000 i	137.030	{-0.0}
80	0	4	-0.000+126.049 i	126.049	{1.570796}
90	2	9	338.860 -0.000 i	338.860	{-0.0}
100	0	6	-0.000+230.380 i	230.380	{1.570796}
erreur max C = (1 ou i)*sum sqrt(pq) : 1.4070670316909569e-13					

9. Classes $6k \pm 1$

- *symétrie cachée mod 4*. Réciprocité de Landsberg–Schaar ($q = 1$) : $\Delta_p/\sqrt{p} = e^{i\pi/4}(1 + (-i)^p)/\sqrt{2}$. Donc $\Delta_p e^{-i\pi/4}/\sqrt{p} = e^{\mp i\pi/4}$ pour $p \equiv 1, 3 \pmod{4}$: les deux familles sont images miroir l'une de l'autre, l'asymétrie “1 contre i ” vient du choix des axes.
- *module 3*. $\sum_{k<3} e^{2i\pi pk^2/3} = \left(\frac{p}{3}\right) i\sqrt{3}$: les classes $6k \pm 1$ donnent deux points antipodaux, échangés par conjugaison. Pour $p+q = n$ (hors le premier 3) : ces sommes sont opposées si $3 \mid n$, égales sinon (vérifié $n = 6, \dots, 100$).
- *nombre de décomposants*. Sur $[10^4, 2 \cdot 10^4]$: moyenne 303,2 pour $3 \mid n$, 152,0 sinon, rapport 1,99.
- *sommes de Gauss cubiques* (module p) : nulles pour $p \equiv 2 \pmod{3}$; pour $p \equiv 1$, $|g(\chi)| = \sqrt{p}$ et $g^3/p = a + b\omega$ avec $a^2 - ab + b^2 = p$ ($p < 1000$). La phase de g n'est pas rigide : elle se répartit sur le cercle. Ce tableau est asymétrique (nul / non nul), contrairement au précédent.

Le programme 4 : <https://denisevellachemla.eu/pgmcau4.pdf>.

Son résultat :



Le programme 5 : <https://denisevellachemla.eu/pgmcau5.pdf> .

Son résultat a été montré en début de note.

Poursuite de la conversation : (dvc) Le critère de Vella-Chemla-Schneps équivaut à demander que x et $n - x$ soient tous deux premiers avec M , le produit des premiers $\leq \sqrt{n}$. Le bon groupe est donc $(\mathbb{Z}/M\mathbb{Z})^\times$, et pas $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$, qui ne retient que les premiers divisant n . Dans $(\mathbb{Z}/M\mathbb{Z})^\times$, la symétrie est $x \mapsto n - x$ (affine). Multiplier par une racine cubique de l'unité ζ ne commute pas avec elle : $n - \zeta(n - x) = \zeta x + n(1 - \zeta)$. Les racines cubiques mélangent donc les paires $\{x, n - x\}$ au lieu de les respecter. Est-ce que utiliser la géométrie non-commutative permettrait de pallier à la non-commutativité dont il est question en vert ?

Le test. L'ensemble des x qui satisfont la prémisse (x et $n - x$ premiers avec M) n'est pas stable par multiplication par une racine cubique de l'unité ζ , et la perte se calcule exactement. Pour chaque premier $p \leq \sqrt{n}$ avec $p \equiv 1 \pmod{3}$ où ζ agit de façon non triviale, et qui ne divise pas n , la proportion de x conservés est $(p-2)/(p-1)$: $4/5$ pour $p = 7$, $10/11$ pour $p = 13$. Pour les autres premiers, rien n'est perdu. La proportion totale est le produit de ces facteurs. J'ai vérifié sur neuf valeurs de n entre 50 et 340, avec toutes les racines cubiques de l'unité modulo M , et la mesure coïncide exactement avec la prédiction. Le critère se décompose premier par premier (théorème chinois), et les racines cubiques ne font que déplacer, dans chaque composante, la seule classe interdite. Il n'y a donc pas de structure cachée de ce côté.

"Ne commute pas". Ici, cela veut dire que l'ordre des opérations compte. Prenons deux opérations sur les nombres modulo 7, avec $n = 10$: $\sigma(x) = nx$, et la multiplication par $\zeta = 2$ (on a $2^3 = 8 \equiv 1 \pmod{7}$). Avec $x = 1$: on obtient 4 si on applique σ puis la multiplication, et 1 si on multiplie puis on applique σ . Ces deux opérations engendrent un groupe non commutatif, celui des transformations $x \mapsto ax + b$.

Géométrie non commutative. Ce que tu écris a un sens, mais elle ne "répare" pas cette non-commutativité, elle la prend comme donnée. Chez Connes, on remplace un espace dont le quotient est mal défini par une algèbre d'opérateurs où $ab \neq ba$, et on étudie cette algèbre. Un exemple proche de ton sujet est le système de Bost-Connes. Il mêle les racines de l'unité complexes (le côté additif, comme sur nos cercles) et la multiplication par les entiers n (le côté multiplicatif),

liés par une relation non commutative. Son invariant central est la fonction zêta de Riemann. Cela ressemble donc à notre pont additif-multiplicatif, mais il est construit pour la zêta et l'hypothèse de Riemann, pas pour le problème de Goldbach.

Je ne connais aucun usage de ces outils qui aboutisse à Goldbach, et je ne peux pas t'affirmer que cela marcherait. Ce que montre le test, c'est que l'obstacle n'est pas l'ordre des opérations mais le fait que les racines cubiques ne conservent pas l'ensemble des décomposants. Une algèbre non commutative enregistrerait cette non-conservation sans la supprimer.

L'exemple de non-commutativité fourni par l'ia claude

Le programme testé pour l'algèbre est <https://denisevellachemla.eu/noncomraccub.pdf>.

Son résultat est :

n	M	R	zeta	R zR / R	pr diction
50	210	20	121	0.80000	0.80000
50	210	20	151	0.80000	0.80000
90	210	40	121	0.80000	0.80000
90	210	40	151	0.80000	0.80000
98	210	18	121	1.00000	1.00000
98	210	18	151	1.00000	1.00000
120	210	40	121	0.80000	0.80000
120	210	40	151	0.80000	0.80000
170	30030	1980	13861	0.90909	0.90909
170	30030	1980	25411	0.90909	0.90909
170	30030	1980	25741	0.80000	0.80000
182	30030	1944	13861	1.00000	1.00000
182	30030	1944	25411	1.00000	1.00000
182	30030	1944	25741	1.00000	1.00000
200	30030	1980	13861	0.90909	0.90909
200	30030	1980	25411	0.90909	0.90909
200	30030	1980	25741	0.80000	0.80000
210	30030	4752	13861	0.90909	0.90909
210	30030	4752	25411	0.90909	0.90909
210	30030	4752	25741	1.00000	1.00000
340	510510	31680	314161	0.90909	0.90909
340	510510	31680	235621	0.90909	0.90909
340	510510	31680	145861	0.80000	0.80000
cart max mesure - pr diction : 0					
Exemple de non-commutation (mod 7, n = 10, zeta = 2, x = 1) :					
zeta(sigma(x)) = 4 sigma(zeta x) = 1					

Peux-tu essayer de construire une telle algèbre ?

10. Construction par l'ia claudes d'une algèbre non commutative pour le crible de Goldbach (exploration)

Soit n pair, $M = \prod_{p \leq \sqrt{n}} p$. Sur $\ell^2(\mathbb{Z}/M\mathbb{Z})$ on considère :

- les projections diagonales $e_p = \mathbf{1}_{\{x \not\equiv 0, n \pmod p\}}$ et $E_n = \prod_p e_p$ (crible de Legendre) ;
- l'unitaire $\sigma : x \mapsto n - x$ (symétrie des décomposants) ;
- les unitaires $U_\zeta : x \mapsto \zeta x, \zeta^3 \equiv 1 \pmod M$.

L'algèbre A_n est le produit croisé $C(\mathbb{Z}/M) \rtimes G$, où G est le groupe engendré par σ et les ζ .
Remarque : $\sigma \zeta \sigma(x) = \zeta x + n(1 - \zeta)$, donc G contient des translations : c'est un sous-groupe du groupe affine $x \mapsto ax + b$.

11. Résultats

Le programme testé pour l'algèbre est <https://denisevellachemla.eu/pgmalg.pdf>.

Son résultat est :

p	n mod p	G_p	orbites sur $\mathbb{Z}/p$	crible $\{x \not\equiv 0, n\}$ invariant ?	2-transitif ?
7	0	6	[1, 6]	True	False
7	1	42	[7]	False	True
7	2	42	[7]	False	True
7	5	42	[7]	False	True
13	0	6	[1, 6, 6]	True	False
13	1	78	[13]	False	False
13	2	78	[13]	False	False
13	5	78	[13]	False	False
19	0	6	[1, 6, 6, 6]	True	False
19	1	114	[19]	False	False
19	2	114	[19]	False	False
19	5	114	[19]	False	False
31	0	6	[1, 6, 6, 6, 6, 6]	True	False
31	1	186	[31]	False	False
31	2	186	[31]	False	False
31	5	186	[31]	False	False

$E_n(x) = 1 \iff x, n-x$ premiers, pour $\sqrt{n} \leq x \leq n/2, n \leq 3000$: carts = 0

1. **Critère.** Pour $\sqrt{n} \leq x \leq n/2$: $E_n(x) = 1 \iff x$ et $n - x$ premiers (vérifié $n \leq 3000$).
Donc Goldbach équivaut à $QE_n \neq 0$, Q étant la projection diagonale sur $[\sqrt{n}, n/2]$. C'est un énoncé dans la sous-algèbre commutative diagonale.
2. **Localement en p ,** $p \equiv 1 \pmod 3$, $p \nmid n$ (essais : $p = 7, 13, 19, 31$). Le groupe G_p engendré par σ et ζ est d'ordre $6p$; il contient toutes les translations, et il agit transitivement sur $\mathbb{Z}/p$ (2-transitivement pour $p = 7$: c'est le groupe affine entier de $\mathbb{F}_7$). Le produit croisé local est donc $M_p(\mathbb{C}) \otimes C^*(\mathbb{Z}/6) \cong \bigoplus^6 M_p(\mathbb{C})$. Dans chaque bloc, e_p est une projection de rang $p - 2$, unitairement équivalente à n'importe quelle autre projection de même rang : l'algèbre n'enregistre plus *quels* résidus sont interdits.

3. **Localement en $p \mid n$.** G_p est le groupe linéaire d'ordre 6 ($\sigma = -x$); ses orbites sont $\{0\}$ et des orbites libres de taille 6 dans $\mathbb{F}_p^\times$; le crible $\{x \not\equiv 0\}$ est invariant. Cela explique la proportion 1 trouvée numériquement quand $p \mid n$ (et $(p-3)/(p-2)$ sinon).

12. Conclusion

L'algèbre est bien non commutative, mais sa partie non commutative ne contient pas l'information de Goldbach (point 1). Lorsque ζ est adjoint, elle s'effondre localement en blocs de matrices (point 2), donc devient moins informative que le crible diagonal. À ma connaissance, aucune propriété de A_n ne donne de minoration de $|R_n \cap [\sqrt{n}, n/2]|$.