Équation de Chazy et somme des diviseurs d'un nombre (Jacques Chemla, août 2022)

L'équation de Chazy est l'équation différentielle (ordinaire, non linéaire, explicite, d'ordre 3) :

$$u''' = 2uu'' - 3(u')^2$$

Une solution particulière est la série d'Eisenstein E_2, définie pout tout nombre complexe $\tau \in \mathbb{C}$ de partie imaginaire strictement positive :

$$E_2(\tau) = 1 - 24 \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_1(n) e^{2\pi i \tau n}$$

E_2 correspond au cas $k = 1$ des séries d'Eisenstein E_{2k} définies pour tout entier $k \geq 2$ [1] :

$$E_{2k}(\tau) = 1 - \frac{4k}{B_{2k}} \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_{2k-1}(n) e^{2\pi i \tau n}$$

Les B_n sont les nombres de Bernouilli et $\sigma_k(n)$ est la somme des puissances k-ième des diviseurs de n (voir fonction somme des diviseurs).

En particulier, $B_2 = \dfrac{1}{6}$ et $\sigma_1(n)$ est la somme des diviseurs de n, notée habituellement $\sigma(n)$.

Montrons que $u = E_2$ est solution de l'équation de Chazy.

On a :

$$\begin{aligned}
u(\tau) &= 1 - 24 \sum_{n=1}^{\infty} \sigma(n) e^{2\pi i \tau n} \\
u'(\tau) &= -24(2\pi i) \sum_{n=1}^{\infty} n\sigma(n) e^{2\pi i \tau n} \\
u''(\tau) &= -24(2\pi i)^2 \sum_{n=1}^{\infty} n^2\sigma(n) e^{2\pi i \tau n} \\
u'''(\tau) &= -24(2\pi i)^3 \sum_{n=1}^{\infty} n^3\sigma(n) e^{2\pi i \tau n}
\end{aligned}$$

Par conséquent :

$$(u')^2(\tau) = 24^2(2\pi i)^2 \sum_{n=2}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{n-1} k(n-k)\sigma(k)\sigma(n-k) \right) e^{2\pi i \tau n}$$

$$uu''(\tau) = -24(2\pi i)^2 \sum_{n=1}^{\infty} n^2\sigma(n) e^{2\pi i \tau n} + 24^2(2\pi i)^2 \sum_{n=2}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{n-1} (n-k)^2\sigma(k)\sigma(n-k) \right) e^{2\pi i \tau n}$$

1. *Les séries d'Eisenstein E_{2k} sont des formes modulaires définies pour tout entier $k \geq 2$, et la série E_2 correspondant au cas $k = 1$ n'en fait donc pas partie. Néanmoins, E_2 peut être définie comme une forme quasi-modulaire analogue aux séries d'Eisenstein.*

En identifiant les termes généraux à gauche et à droite dans l'équation de Chazy, on obtient, pour $n \geq 2$:

$$-24(2\pi i)^3 n^3 \sigma(n) = 24^2(2\pi i)^2 \left(-2n^2\sigma(n) + 2\sum_{k=1}^{n-1}(n-k)^2\sigma(k)\sigma(n-k) - 3\sum_{k=1}^{n-1}k(n-k)\sigma(k)\sigma(n-k)\right)$$

$$\iff \quad -\frac{\pi i}{12}n^3\sigma(n) = -2n^2\sigma(n) + \sum_{k=1}^{n-1}\left(2(n-k)-3k\right)(n-k)\sigma(k)\sigma(n-k)$$

$$\iff \quad \left(2n^2 - \frac{\pi i}{12}n^3\right)\sigma(n) = \sum_{k=1}^{n-1}(2n-5k)(n-k)\sigma(k)\sigma(n-k)$$

Note de Denise Vella-Chemla :

Le lien entre la fonction somme des diviseurs et l'équation de Chazy m'avait été fourni par M. Dominique Giard, à qui j'avais adressé un mail, après 2005, lorsque j'avais trouvé dans la séquence A000203 de l'OEIS (la On-Line encyclopedia of integer sequences fondée en 1964 par N. J. A. Sloane) la formule récurrente de calcul qu'il fournissait (et qui était plus simple, quant à ses conditions de calcul des derniers termes de la somme, que celle fournie par Euler dans son article "Découverte d'une loi tout extraordinaire des nombres par rapport à la somme de leurs diviseurs (voir ici : Leonhard Euler - Œuvres complètes).

Formule de récurrence dans la suite A000203 de l'OEIS :

$$n^2(n-1)a(n) = 12\sum_{k=1}^{n-1}(5k(n-k)-n^2)a(k)a(n-k), \;\; \mathrm{si} n > 1.$$

Dominique Giard, 11 janvier 2005.