

Connes et al. versus van der Pol, Denise Vella-Chemla, octobre 2026

Bonjour, j'ai étudié il y a longtemps un programme qui plotait les zéros de zeta par les formules dont je joins les dessins, tu vois comme formule :

$$\exp(-x/2) * (\exp(x)\%1.$$

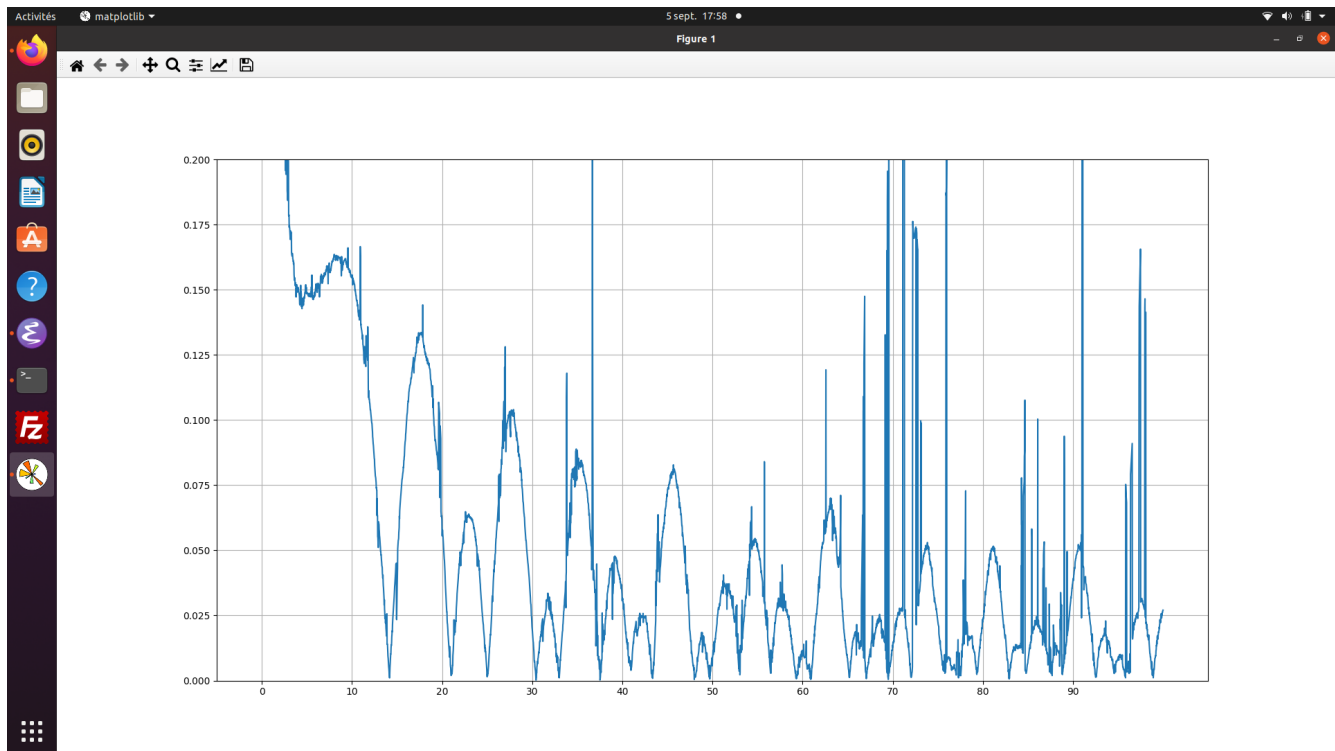
Récemment j'ai étudié le programme en Rust de personnes qui ont implémenté pour la tester la méthode de Connes et al. et il y a une formule pour $\rho(x)$ qui est

$$\exp(x/2)/2\sinh(x),$$

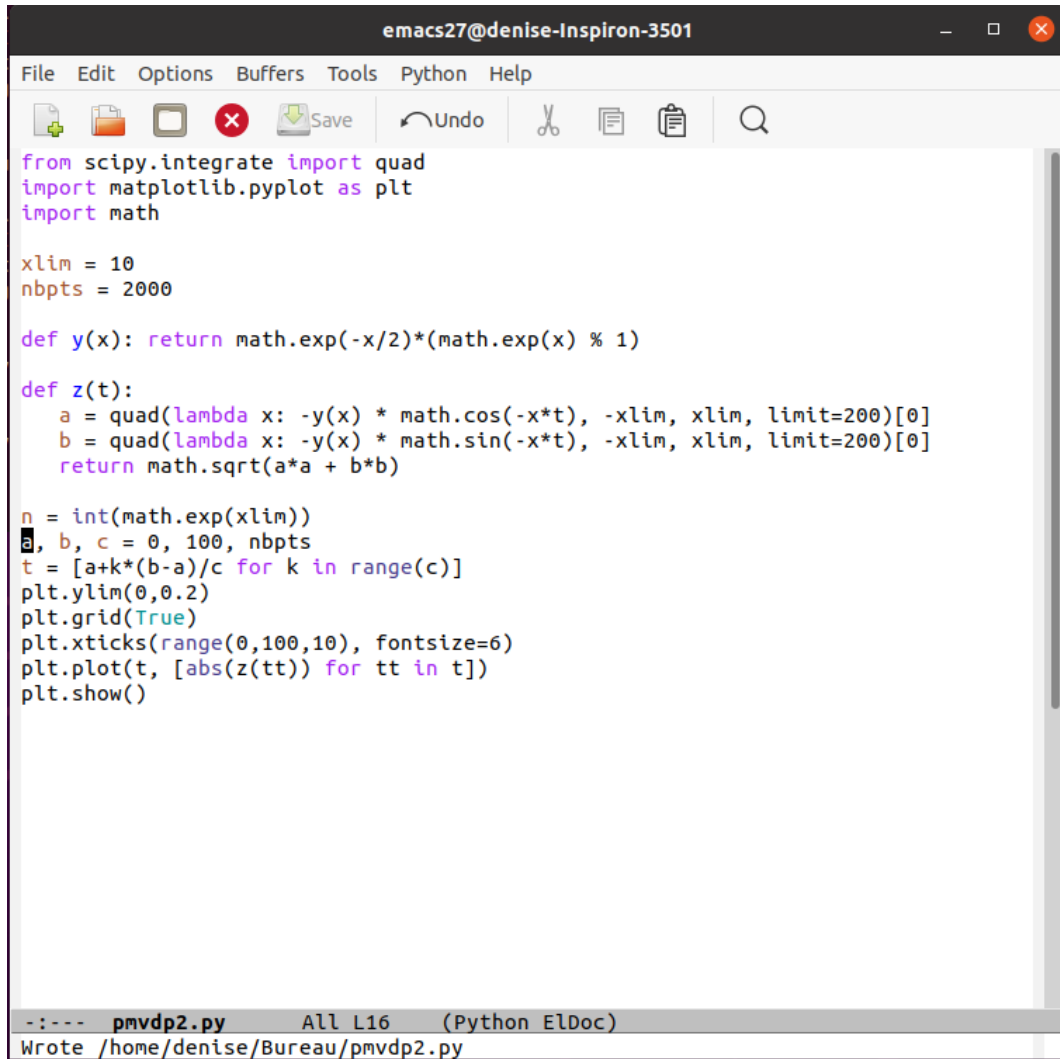
$<^1$ ce qui peut aussi s'écrire

$$\exp(x/2)/(\exp(x) - \exp(-x))$$

(je me suis amusée à utiliser à la place $0.5/\sin(x)$ et ça marche pas mal aussi. Peux-tu me dire si on peut considérer que les deux calculs sont équivalents (pas le mien, mais les deux autres), et dis-moi ce que cette formule représente grosso modo.



-
1. On lira indifféremment $\exp(x)$ et e^x .



```
from scipy.integrate import quad
import matplotlib.pyplot as plt
import math

xlim = 10
nbpts = 2000

def y(x): return math.exp(-x/2)*(math.exp(x) % 1)

def z(t):
    a = quad(lambda x: -y(x) * math.cos(-x*t), -xlim, xlim, limit=200)[0]
    b = quad(lambda x: -y(x) * math.sin(-x*t), -xlim, xlim, limit=200)[0]
    return math.sqrt(a*a + b*b)

n = int(math.exp(xlim))
a, b, c = 0, 100, nbpts
t = [a+k*(b-a)/c for k in range(c)]
plt.ylim(0,0.2)
plt.grid(True)
plt.xticks(range(0,100,10), fontsize=6)
plt.plot(t, [abs(z(tt)) for tt in t])
plt.show()
```

--- pmvdp2.py All L16 (Python ElDoc)
Wrote /home/denise/Bureau/pmvdp2.py

Liens vers les programmes en python de Lumo et Mistral pour le calcul des premiers zéros de la fonction ζ de Riemann :

<https://denisevellachemla.eu/zeta-lumo-20261005.pdf>

<https://denisevellachemla.eu/zeta-mistral-20261005.pdf>

Réponse de l'ia claude :

Bonjour Denise. Non, les deux calculs ne sont pas équivalents : ils ne jouent pas le même rôle.

Ton programme python de la modélisation des zéros de ζ par van der Pol. Avec $x = e^u$, on a l'identité classique (pour $0 < \Re s < 1$) :

$$\int e^{-su} e^u du = \frac{-\zeta(s)}{s}$$

En prenant $s = \frac{1}{2} + it$, ton intégrale est exactement $\int e^{-u/2} e^u e^{-itu} du$, donc

$$|z(t)| \approx \frac{|\zeta\left(\frac{1}{2} + i\right)|}{\left|\frac{1}{2} + it\right|}$$

Ton dessin est donc le module de ζ sur la droite critique, divisé par $|s|$, et les creux à

$$14.13 ; 21.02 ; 25.01 ; 30.4 ; 32.9 ; 37.6 ; \dots$$

sont les zéros. Les pics parasites à droite viennent de quad (le calcul de l'intégrale se fait par la fonction quad en python) avec limit=200 ; l'intégrale ne peut pas résoudre une dent de scie qui a environ $e^{10} \approx 22000$ sauts, multipliée par un cosinus qui oscille de plus en plus vite quand t grandit, d'où le bruit croissant vers la droite du dessin. La troncature à xlim = 10 quant à elle donne un petit terme d'erreur de l'ordre de e^{-5} qui empêche les creux de descendre vraiment jusqu'à 0 (pile sur l'axe des abscisses).

La fonction $\rho(x) = e^{x/2}/(2 \sinh x)$. À ma connaissance (je n'ai pas le code Rust sous les yeux), c'est le noyau du terme archimédien de la formule explicite de Weil, celui qui vient du facteur Γ . ρ sert aux intégrales α, β, γ de la partie que le code appelle "archimédienne", et les nombres premiers entrent par un autre terme (la somme sur les puissances de premiers $\leq \lambda^2$). La matrice est

$$\tau = \text{pôle} - \text{archimédien} - \text{premiers}.$$

Que ρ vienne du facteur Γ reste une interprétation plausible que le code ne démontre pas.

Les zéros n'apparaissent pas par une transformée de Fourier de ρ : ils sortent de la forme quadratique de Weil, dont on calcule les valeurs propres sur un espace de dimension finie, et les vecteurs propres de plus petite valeur propre localisent les zéros.

La plus petite valeur propre ε_N est seulement un nombre minuscule.

Les zéros sont ceux de la fonction

$$R(z) = \sum \frac{\xi_j}{z - \frac{2\pi j}{L}},$$

construite avec le vecteur propre ξ associé ($L = \ln \lambda^2$).

Et pour $\frac{0,5}{\sin x}$ que tu as choisi d'utiliser "pour voir" : l'intégrale porte sur $]0, L[$, donc la condition est $L < \pi$, c'est-à-dire $\lambda^2 < e^\pi \approx 23$. Au-delà, sin s'annule dans l'intervalle et il y a un pôle que ρ n'a pas.

La transformée de Fourier de $y(x)$, la fonction utilisée pour calculer les zéros par van der Pol est $\frac{\zeta(s)}{s}$ tout entière, alors que Weil et Connes la découpent en termes distincts. van der Pol obtient ζ d'un seul bloc par une transformée tandis que Connes et al. construisent une matrice finie à partir des morceaux (pôle, archimédien, premiers).

À quoi ressemble ρ ?

- près de 0, c'est une hyperbole : $\rho(x) = \frac{1}{2x} + \frac{1}{4} + O(x)$.
- pour $x \rightarrow +\infty$, elle décroît comme $e^{-x/2}$.
- pour $x \rightarrow \infty$, elle décroît comme $e^{3x/2}$.

C'est donc un pôle en $\frac{1}{2x}$ adouci par des queues exponentielles.

Cela explique que $\frac{0,5}{\sin(x)}$ “marche pas mal” :

$$\frac{1}{2 \sin x} = \frac{1}{2x} + \frac{x}{12} + \dots$$

a la même singularité en 0, et ne diffère que par la constante 1/4 et des termes réguliers. Cela ne tient que tant que x reste dans $]0, \pi[$, car $\sin$ a ensuite d'autres pôles que ρ n'a pas.