

Werk

Titel: Dirichletsche Reihen [Vorlesung], Hamburg, 1922

Autor: Hecke, Erich

Ort: Hamburg

Jahr: 1922

Kollektion: fid.mathematica; nachlaesse

Signatur: Cod. Ms. E. Hecke Abd 5

Werk Id: DE-611-HS-3193104

PURL: <http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PID=DE-611-HS-3193104> | DE-611-HS-3193104

Terms and Conditions

The Goettingen State and University Library provides access to digitized documents strictly for noncommercial educational, research and private purposes and makes no warranty with regard to their use for other purposes. Some of our collections are protected by copyright. Publication and/or broadcast in any form (including electronic) requires prior written permission from the Goettingen State- and University Library.

Each copy of any part of this document must contain there Terms and Conditions. With the usage of the library's online system to access or download a digitized document you accept the Terms and Conditions.

Reproductions of material on the web site may not be made for or donated to other repositories, nor may be further reproduced without written permission from the Goettingen State- and University Library.

For reproduction requests and permissions, please contact us. If citing materials, please give proper attribution of the source.

Contact

Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen
Georg-August-Universität Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen
Germany
Email: gdz@sub.uni-goettingen.de

1. Dirichletsche Reihen.

Jeder Körper bestimmt eine Dirichl. Reihe.

Klassenzahlformel.

Interpretation.

a) Bestimmung der Klassenzahl.

Quadratischer Körper $- p = 4n + 1$,

$$x^2 - py^2 = +4,$$

$$\varepsilon^h = \eta, \quad \eta = \frac{\pi(1 - \varepsilon^n)}{\pi(1 - \varepsilon^n)}$$

b) Unendlich viele Primzahlen.

Umformung:

$$\log \zeta_K(s) = + \sum \frac{1}{N(\mathfrak{p})^s} + f(s)$$

~~a) Quadratischer Körper: Unendlich viele $\left(\frac{x}{p}\right) = +1$.~~

b) Kreiskörper: $e^{\frac{2\pi i}{m}}$;

$$p = m \cdot x + 1$$

Klassenzahlformel u. Reziprozitätsgesetze.

Genauere Diskussion bei der gewöhnlichen ζ -Funktion
durch Riemann: 1859

$$\zeta(s) = \sum \frac{1}{n^s}$$

Ganze Anzahl d. Primzahlen, wenn man die Nullstellen kennt.

Neue Wissenschaft: Analytische Zahlentheorie; (1893)

Bestes Beispiel für allgemeine Funktionentheorie

Sätze, Neure Funktionentheorie; ganze transzendente

Funktion, Poincaréscher Satz (Wertbereich einer Funktion)

Funktionentheorie hat hier wertvollste Anregungen und Problemstellungen von der Zahlentheorie erhalten.

14

Diese Funktionen bieten nun auch vom Standpunkte der
Funktionsentheorie ein erhebliches Interesse dar,
sie stehen - wie bei einer Variablen - mit den
höheren ~~Thetefunktionen~~ ^{in nahem Zusammenhang.}
~~ist~~ Diese ^{allgemeinen} ~~Venen~~ ^{Modulfunktionen} von Variablen mit
wenigen ^{nur} ~~wenigen~~ ^{einigen} ~~Perspielen~~ ^{Punkten}
mehrerer Variablen, welche man wieder beherrscht.

Folgerung:

Die nachstehende Gesetzmäßigkeit, von welcher ich hier
vermutet habe eine Vorstellung zu geben, beruht nicht nur
völlig gar nicht auf allgemeinen algebraischen Zahlkörpern,
sondern immer nur auf Ableiten oder relativ-Ableiten Zahl-
körper. Es ist auch gar keine Rücksicht vorhanden, dass dies
mit irgendwie ändern wird. Dies hat seinen guten Grund. Ich
möchte als vielleicht die fundamentalste Erkenntnis
der neueren Zahlentheorie den Satz bezeichnen, dass die einzigen
Körper, welche zahlentheoretisch überhaupt ein besonderes Interesse
darbieten, die relativ-Ableiten Körper sind. Dieser Satz gestattet
eine durchaus ^{vernünftige} ~~präzise~~ ^{Formulierung}. Man kann ihn auch so
aussprechen: Alle Gesetze, welche in einem beliebigen algebr.
Zahlkörper bestehen, kann man finden, indem man alle in
Bezug auf diesen ~~Ableiten~~ ^{relativ-Ableiten} Körper aufzustellen sucht.

Vandervers dieses Problem ~~mag~~ ^{mit seinen} ~~aber~~ ^{durch} sich durch
theoretische Mittel angreifen.

Überblickt man den Reichtum der Beziehungen, welche hier herrschen,
so sieht man, dass die Zahlentheorie, von diesem Punkte ausgeht,
durchaus mit den übrigen Disziplinen konkurrieren kann. Doch
sind ihr ist sie ^{noch} durch viele andere Bande mit der übrigen Mathematik
verknüpft, ich erinnere an die Untersuchungen Minkowskis, welche
das geometrische Element mit so reichem Erfolg in die Zahlentheorie
eingeführt hat; auch scheint in den letzten Jahren die Physik durch
ihre atomistische Betrachtungsweise mehr und mehr auch zahlentheoretische
Methoden zu befragen; ~~und~~ ^{da} ~~jedemfalls~~ ^{ist} ~~ist~~ ^{den} ~~letzten~~ ^{Jahren} ~~Jahren~~
der Vorwurf unbegründet, den man der Zahlentheorie vielfach gemacht
hat, dass sie ^{die} ~~ist~~ ^{zu} ~~mit~~ ^{allen} ~~allen~~ ^{anderen} ~~zweigen~~ ^{zweigen} der Mathematik in der reinen
aber dünnen Luft klarer Abstraktionen in achterlicher Dasein friste.

2. Periodische Funktionen

2

a) Exponentialfunktion $e^{2\pi i z} = f(z)$.

Abelsche Gleichung in $\mathbb{R}$.

War ist Abel'sch?

Bedeutungsvoll erst durch die Umkehrung.

b) Nächste Funktionsklasse:

Elliptische und Modulfunktion, gehörig zum Körper

$$\mathbb{K}(\sqrt{-D})$$

Relativ-Abelsche Gleichungen

Wieder Alle

Beweismethode. Wo kommen die Gleichungen her?

$$f\left(\frac{z}{a}\right)^n - f(z) = 0.$$

Nun Frage: Nach welchem Gesichtspunkt sind die Abelschen Körper danach diese Funktionen zusammengefasst?

Nicht etwa Abelsche Körper vom Primzahlpotenzgrad, also wirklich erste Bausteine, sondern ganz anders.

Hier hat umgekehrt Zahlentheorie einen neuen Anstoß von der Funkt.-Th. bekommen.

c) Wie sieht der einfachste Körper $\mathbb{K}$ bei b) aus?

$\mathbb{K}$, Gruppe = Klassegruppe, Hauptideale; Vor allem aber

I. Zerlegung von g nur von der Klasse abhängig

II. Relativediskriminante = 1.

Die hier zu Grunde liegende allgemeine Gesetzmäßigkeit zuerst von Hilbert erkannt und formuliert:

Es gibt zu jedem Körper genau einen

Körper heißt der Klassenkörper.

in allgemeine Zahlentheorie ist bekannt, dass in jedem Körper ein Hauptideal existiert.

Die ganze weitere Entwicklung der Zahlentheorie vollzieht sich nun zwischen den Klassenkörpern.

Nachdem der Existenzbeweis durch Furtw. geführt worden ist, dass man erkannt, dass Begriff mit allgemeinem Löst. durch a) und b) werden immer Klassenkörper gegeben.

d) Es steht nicht aber das allgemeine Problem: Alle Klassenkörper durch Funktionen zu finden.

Hier erscheint nun die Ballentheorie in charakteristischer
Abhängigkeit von dem jeweiligen Stande der Funktionentheorie. 3
Glücklicherweise hat man aber die ^{erkenntnis} ~~Erkenntnis~~ gewonnen, dass
die Ballentheorie nicht in dieser Weise gebunden ist, sondern
dass sie von sich aus mit ihren Mitteln zu Definition
solcher Funktionen gelangen kann.

3. Im ~~Folgenden~~ engsten Zusammenhang damit steht die Erkenntnis,
dass die beiden durch die ξ -Funktion und die Modulfunktion charakteri-
sieren Anwendungsweisen gar nicht so voneinander verschieden sind,
sondern dass ^{mit aller Sicherheit} ~~das~~ ξ -Funktion der f ~~steht~~ ^{angehört} als dem übergeordneten
Gedanken zurückführen lässt.
Der Schlüssel dazu ist wieder die Klassenzahlformel.

a) einfachster Fall: $\varepsilon h = \eta$.

η ~~ist~~ ^{ist} Logarithmalausdruck, auf einmal da.

~~Man~~ $\xi_k(\tau)$ durch die Berührungseigenschaft bestimmt.

b) Allgemeine Ausdruck für die Klassenzahl bei Kreiskörpern.

c) Der nächsthöhere Fall ist die Kronecker'sche Grenzformel.

Führt direkt auf $\mathcal{D}$ -Produkte, d. h. auf Modulfunktionen.

Allgemeines Prinzip: Um die Funktionen in einem Klassenkörper zu
finden, bestreicht man seine Klassenzahl, d. h. das Residuum
reiner ξ -Funktion zu finden. ~~Es~~ ^{Es} ~~folgt~~ ^{folgt} man dann auf die
richtigen Funktionen geführt.

~~Es ist dieses Gedanke einmal mit Erfolg durchgeführt.~~

Es gelingt in der Tat durch solchen Ansatz weiterzukommen
und hier sind es dann naturgemäss Funktionen mehrerer
Variablen, welche auftreten. ~~So~~ ^{Im} ~~einzelnen~~ ^{einfachsten} Fall
sind Modulfunktionen von 2 Variablen, welche folgende Invarianz-
eigenschaft haben: -

$$f(x, x') = f\left(\frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}, \frac{\alpha' x' + \beta'}{\gamma' x' + \delta'}\right)$$

Kap. I Spezielle Dirichlet-Reihen.

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s} = \mathcal{G}(s)$. Wenn Konvergenz f. $s = \sigma + it$, dann auch Konvergenz f. $\Re(s) > \Re(s_0)$, gleichmäßige Konvergenz f. $\Re(s) > \Re(s_0) + \delta$, $|\delta| < \delta$.

$$\mathcal{G}(n) = \sum_{m=1}^n \frac{a_m}{m^{s_0}}$$

$$\mathcal{G}(n) - \mathcal{G}(n-1) = \frac{a_n}{n^{s_0}}$$

$$\sum_{n=p}^q \frac{\mathcal{G}(n) - \mathcal{G}(n-1)}{n^{s-s_0}} = \frac{-\mathcal{G}(p-1)}{p^{s-s_0}} + \mathcal{G}(p) \left(\frac{1}{p^{s-s_0}} - \frac{1}{(p+1)^{s-s_0}} \right)$$

$$+ \dots + \mathcal{G}(q-1) \left(\frac{1}{(q-1)^{s-s_0}} - \frac{1}{q^{s-s_0}} \right) + \frac{\mathcal{G}(q)}{q^{s-s_0}}$$

$$s = \sigma + it$$

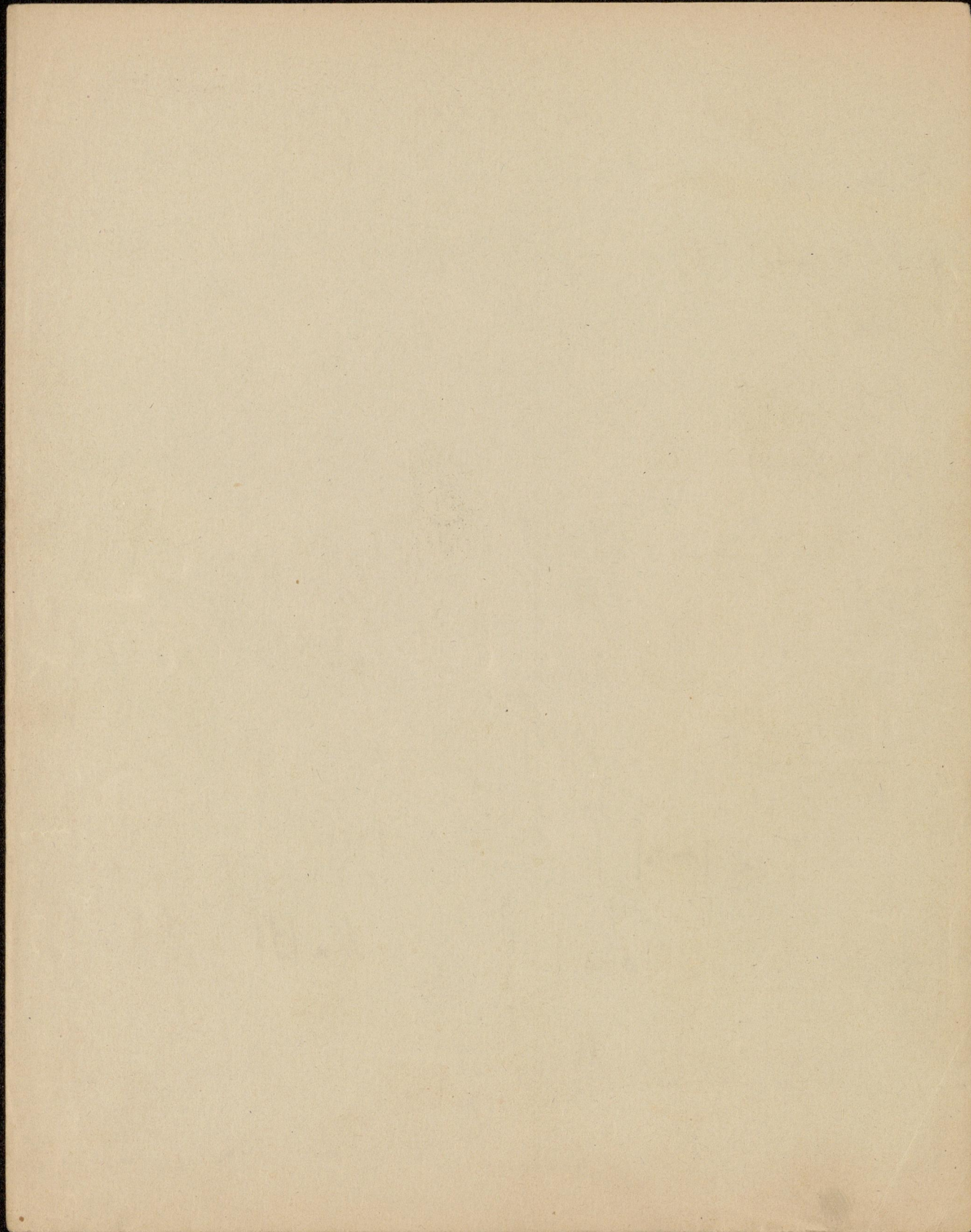
$$\frac{1}{p^{s-s_0}} - \frac{1}{(p+1)^{s-s_0}} = \frac{(s-s_0)}{p^{s-s_0+1}} \int_p^{p+1} \frac{dx}{x^{s-s_0+1}}$$

$$| \dots | < |s-s_0| \int_p^{p+1} \frac{dx}{x^{\sigma-\sigma_0+1}} = |s-s_0| \int_p^{p+1} \frac{dx}{x^{\sigma-\sigma_0+1}}$$

$$\left| \sum_{n=p}^q \frac{\mathcal{G}(n) - \mathcal{G}(n-1)}{n^{s-s_0}} \right| < |s-s_0| \int_p^q \frac{dx}{x^{\sigma-\sigma_0+1}} \cdot \text{Max. } |\mathcal{G}| + \frac{\delta}{q^{\sigma-\sigma_0}} + \frac{\delta}{p^{\sigma-\sigma_0}}$$

$$< \frac{|s-s_0|}{\sigma-\sigma_0} \frac{M}{p^{\sigma-\sigma_0}} + \frac{A}{p^{\sigma-\sigma_0}}$$

Konvergenzhalbebene. Analytische Funktion. Konvergenzabszisse



$$\sum_{n \leq x} a_n = O(x^{k+\delta}) \quad \text{für jedes } \delta > 0, \text{ aber für kein } \delta < 0. \quad 12$$

1) Konvergenz für $\sigma > k$, $\sigma > k + \frac{\delta}{2}$

$$\begin{aligned} y(x) &= \sum_{n=1}^x a_n \\ \left| \sum_{n=p}^q \frac{a_n}{n^\sigma} \right| &< \left| \frac{y(p-1)}{p^\sigma} \right| + \cancel{y(p)} \cdot \sum_{n=p}^{q-1} n^{k+\delta} \left(\frac{1}{n^{\sigma_n}} - \frac{1}{(n+1)^\sigma} \right) \\ &\quad + \frac{y(q)^{k+\delta}}{q^\sigma} \\ &< \frac{q}{p^{\sigma-k-\delta}} + \frac{q}{q^{\sigma-k-\delta}} + q \sum_{n=p}^{q-1} n^{k+\delta} \int_n^{n+1} \frac{du}{u^{\sigma+1}} \cdot \sigma \\ &< \frac{2q}{p^{\sigma-k-\delta}} + q \sigma \sum_{n=p}^{q-1} \int_n^{n+1} \left(\frac{n}{u} \right)^{k+\delta} \frac{du}{u^{\sigma-k-\delta+1}} \end{aligned}$$

2) Wenn $\mathcal{Y}(s)$ konvergent für σ_0 , dann $\sum_{n \leq x} a_n = O(x^{\sigma_0})$, wenn $\sigma_0 \geq 0$.

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^x a_n &= \sum_{n=1}^x \frac{a_n}{n^{\sigma_0}} n^{\sigma_0} = \sum_{n=1}^x (\mathcal{Y}(n) - \mathcal{Y}(n-1)) n^{\sigma_0} \\ &= \mathcal{Y} \sum_{n=1}^{x-1} (n^{\sigma_0} - (n+1)^{\sigma_0}) + \mathcal{Y}(x) x^{\sigma_0} \\ &< q \sum_{n=1}^{x-1} (n^{\sigma_0} - (n+1)^{\sigma_0}) + q x^{\sigma_0} < A x^{\sigma_0} = O(x^{\sigma_0}) \end{aligned}$$

Ist k_0 die untere Grenze der k , wofür $\sum_{n=1}^x a_n = O(x^k)$, so ist

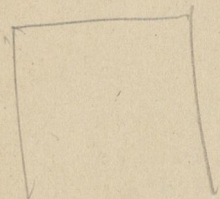
Konvergenzabszisse $\gamma \leq k_0$.

$k_0 \leq \gamma$, wenn $\gamma \geq 0$, also dann $\gamma = k_0$.

Beispiel: $\sum \frac{1}{n^s}$, $\sum \frac{(-1)^n}{n^s}$

$$\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \frac{x^s}{s^k} ds = \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \dots + \frac{\partial}{\partial k-1}$$

$x \geq 1$



$$\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty}$$

Bedingte u. absolute Konvergenz.

Wenn Konvergenz für σ_0 , dann absolute Konvergenz für $\kappa(\sigma) > \sigma_0 + 1$.

$$\frac{a_n}{n^{\sigma_0}} \rightarrow 0, \quad \left| \sum \frac{a_n}{n^{\sigma_0+1}} \right| \leq \sum \left| \frac{a_n}{n^{\sigma_0}} \right| \frac{1}{n}$$

§ 2. Singuläre Stellen auf der ~~Kante~~ Konvergenzgrenze

Satz v. Dirichlet:

Wenn $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n a_k = \kappa$ (~~ist~~)

dann $\lim_{s \rightarrow \gamma} (s - \gamma) \zeta(s) = \kappa$

1) $a_n = 1, \quad \kappa = 1.$

~~ist~~ $\frac{1}{n^s} < \int_{n-1}^n \frac{du}{u^s} < \frac{1}{(n-1)^s}$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^s} < \int_1^{\infty} \frac{du}{u^s} < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

$$\int_1^{\infty} \frac{du}{u^s} < \zeta(s) < 1 + \int_1^{\infty} \frac{du}{u^s}$$

$$\frac{1}{s-1} < \zeta(s) < 1 + \frac{1}{s-1}$$

$$1 < (s-1) \zeta(s) < s.$$

$\lim_{s \rightarrow 1} (s-1) \zeta(s) = 1.$ { Auch aus der
Regelmäßigkeit
 $1 - \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} - \dots$
 $= \sum \frac{(-1)^{n+1}}{n^s}$

2) $f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n - \kappa}{n^s} = \zeta(s) - \kappa \zeta(s).$

$$f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\epsilon_n n - \epsilon_{n-1} (n-1)}{n^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \epsilon_n n \left(\frac{1}{n^s} - \frac{1}{(n+1)^s} \right)$$

$\alpha \Omega = \Omega M$

$\Omega' \alpha = \cancel{M' \Omega}$

Ω'

$M' \Omega'$

$$(s-1)f(s) = (s-1) \sum_1^{k-1} \varepsilon_n n \left(\frac{1}{n^s} - \frac{1}{(n+1)^s} \right) \quad (= \underline{I})$$

$$+ (s-1) \sum_k^\infty \varepsilon_n n \left(\frac{1}{n^s} - \frac{1}{(n+1)^s} \right) \quad (= \underline{II}).$$

$$|\varepsilon_n| < \delta'(k) \quad n > k$$

$$|\underline{II}| < (s-1) \cdot \varepsilon \sum_k^\infty n \left(\frac{1}{n^s} - \frac{1}{(n+1)^s} \right) \\ = (s-1) \cdot \varepsilon \frac{1}{k^{s-1}} + (s-1) \varepsilon \sum_k^\infty \frac{1}{n^s}$$

$$< \frac{(s-1)\varepsilon}{k^{s-1}} + \varepsilon (s-1) \zeta(s)$$

$$|\underline{I}| < |s-1| \cdot M \sum_1^k \frac{1}{n^s}$$

Leibniz'scher Satz: $a_n \geq 0$
 Wenn $\zeta(s) = \sum_{n=1}^\infty \frac{a_n}{n^s}$ konvergiert für $\Re(s) > \sigma_1$, dann. f. $\Re(s) < \sigma_0$, da
 ist σ_0 ein regulärer Punkt.

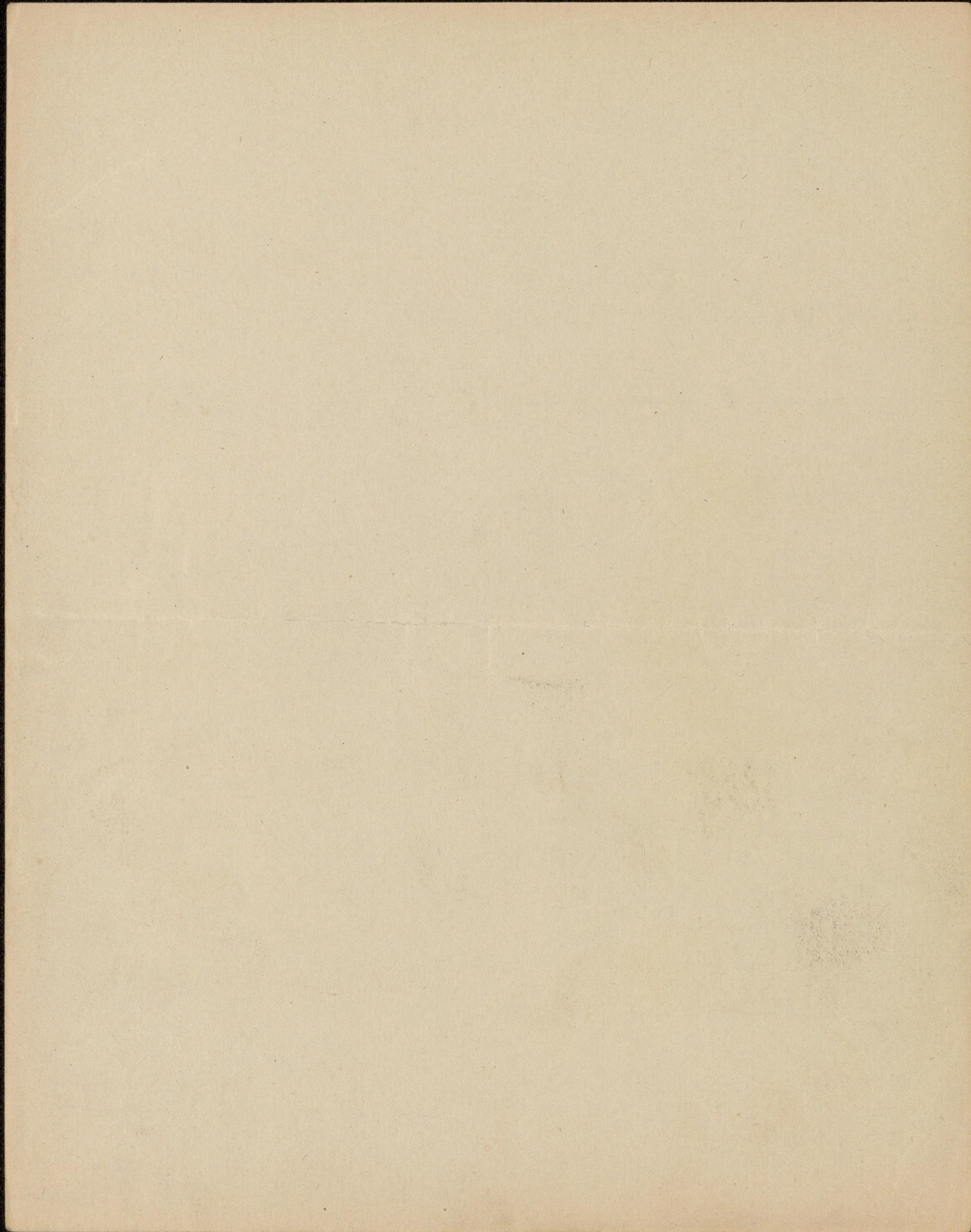
für σ_1 Potenzreihe für $s - \sigma_1$, $\sigma_1 > \sigma_0$.

$$\zeta(s) = \sum_v \frac{\zeta^{(v)}(\sigma_1)}{v!} (s - \sigma_1)^v. \quad \zeta^{(v)}(\sigma_1) = (-1)^v \sum_{n=1}^\infty \frac{a_n (\log n)^v}{n^{\sigma_1}}$$

$$= \sum_v \frac{(s - \sigma_1)^v}{v!} (-1)^v \sum_{n=1}^\infty \frac{a_n (\log n)^v}{n^{\sigma_1}}. \quad \text{Falls Konvergenz in } \sigma < \sigma_0, \text{ so}$$

konvergiert

$$\sum_v \frac{(s - \sigma)^v}{v!} \sum_{n=1}^\infty \frac{a_n (\log n)^v}{n^{\sigma_1}} = \sum_{v, n} = \sum_n \frac{a_n}{n^{\sigma_1}} \sum_v \frac{(\sigma_1 - \sigma)^v (\log n)^v}{v!} \\ = \sum_n \frac{a_n}{n^{\sigma_1}} e^{(\sigma_1 - \sigma) \log n} = \sum_{n=1}^\infty \frac{a_n}{n^{\sigma}} \quad \text{in der Divergenzstellung}$$



Genannte Lemma gilt auch für Potenzreihen $\sum a_n x^n$.

15

Eindeigkeitsatz:

Wann $\Re(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s} = 0$ für $\Re(s) > \sigma_0$, und $\Im(s_k) = 0$
für $s_k = \sigma_k + it_k$, $\lim \sigma_k = \infty$, dann alle $a_n = 0$.

Sei $|a_n| < \delta$. $a_1 = a_2 = \dots = a_p = 0$, $a_p \neq 0$.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$$

$$g(s) = \frac{a_p}{p^s} + \sum_{n=p+1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$$

$$0 = p^{s_k} g(s_k) = a_p + \sum_{n=p+1}^{\infty} a_n \left(\frac{p}{n}\right)^{s_k}$$

$$\left| \sum_{n=p+1}^{\infty} a_n \left(\frac{p}{n}\right)^{s_k} \right| < \delta \sum_{n=p+1}^{\infty} \left(\frac{p}{n}\right)^{\sigma_k} < \delta \sum_{n=p+1}^M + \delta \sum_{M+1}^{\infty}$$

$$< \delta p \sum_{n=p+1}^M \left(\frac{p}{n}\right)^{\sigma_k} + \delta p^{\sigma_k} \int_1^{\infty} \frac{du}{u^{\sigma_k}}$$

$$< \delta \sum_{n=p+1}^M \left(\frac{p}{n}\right)^{\sigma_k} + \delta \frac{p^{\sigma_k}}{M^{\sigma_k-1}} \int_1^{\infty} \frac{du}{u^{\sigma_k}}$$

$$< \delta \cdot M \cdot \left(\frac{p}{p+1}\right)^{\sigma_k} + \delta \frac{1}{p^{\sigma_k-2}}$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=p+1}^{\infty} a_n \left(\frac{p}{n}\right)^{s_k} = 0.$$

$$a_p = 0.$$

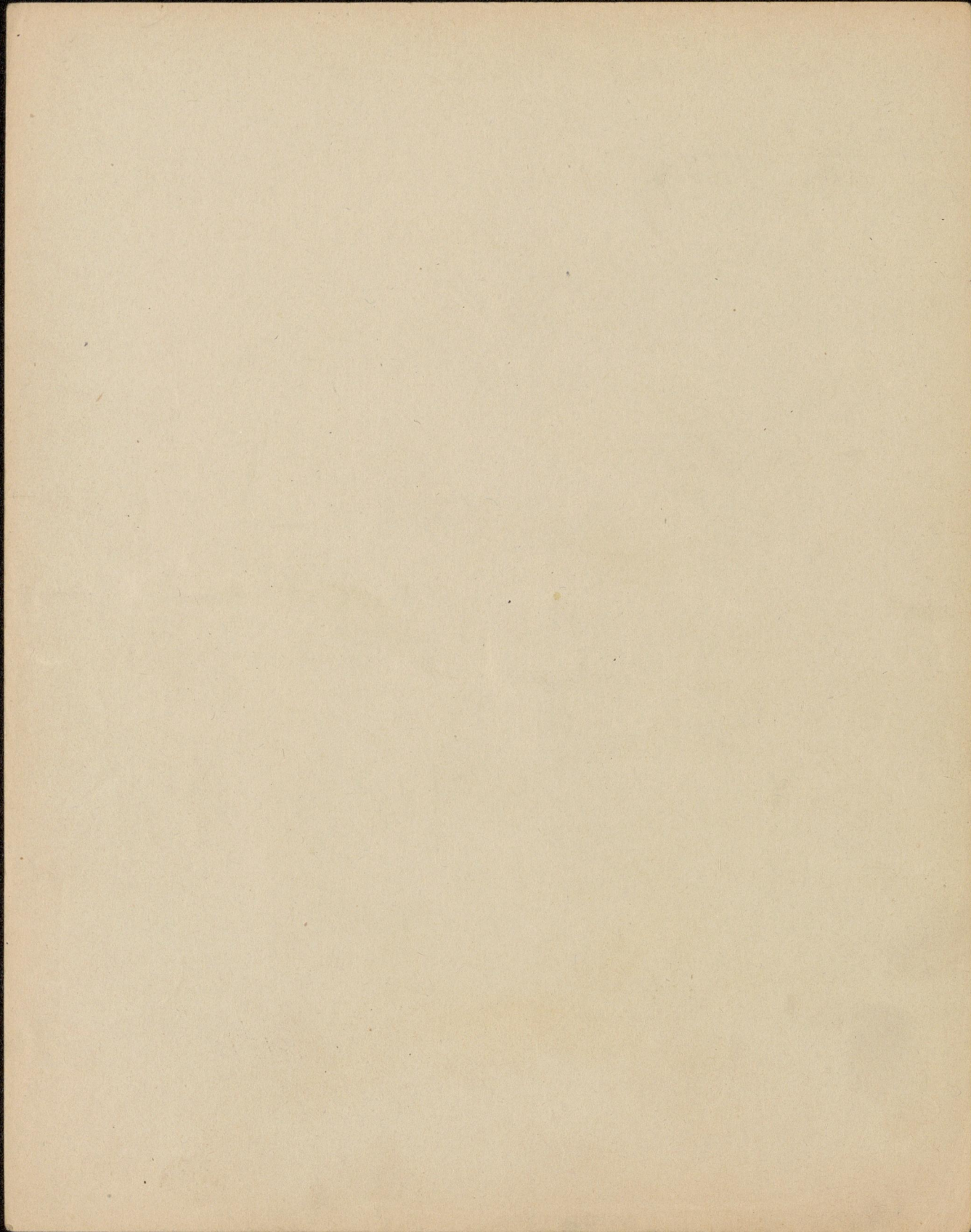
$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{p}{n}\right)^{\sigma} < \frac{p^{\sigma}}{p^{\sigma-1}} \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^{\sigma}} = \frac{p}{\sigma} \rightarrow 0 \text{ für } \sigma \rightarrow \infty$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\sigma}} < \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^{\sigma}} = \frac{1}{\sigma-1}$$

$$M = p^2$$

$$M^{\sigma_k-1} = p^{2\sigma_k-2}$$

$$= p^{\sigma_k + \sigma_k - 2}$$



Abelscher Stetigkeitsatz:

16

Wenn $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$ für s_0 konvergent, so ist $\lim_{s \rightarrow s_0} \mathcal{J}(s) = \mathcal{J}(s_0)$

bei Annäherung von rechts.

$$\sum_{n=1}^N \frac{a_n}{n^s} = \mathcal{J}(N) \quad \mathcal{J}(0) = 0. \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{J}(n) = \mathcal{J}(s_0) = \kappa. \quad \mathcal{J}(n) = \kappa + \varepsilon_n$$

$$\mathcal{J}(s_0 + h) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathcal{J}(n) - \mathcal{J}(n-1)}{n^h} = \sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{J}(n) \left(\frac{1}{n^h} - \frac{1}{(n+1)^h} \right)$$

$$= \kappa \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^h} - \frac{1}{(n+1)^h} \right) + \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n \left(\frac{1}{n^h} - \frac{1}{(n+1)^h} \right)$$

$$= \kappa + \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n \left(\frac{1}{n^h} - \frac{1}{(n+1)^h} \right)$$

$$|\mathcal{J}(s_0 + h) - \mathcal{J}(s_0)| < \kappa \sum_{n=1}^M \left(\frac{1}{n^h} - \frac{1}{(n+1)^h} \right) + \sum_{n=M+1}^{\infty} \varepsilon_n \left| \frac{1}{n^h} - \frac{1}{(n+1)^h} \right|$$

$$< \kappa \cdot \left(1 - \frac{1}{(M+1)^h} \right) + \frac{\delta}{(M+1)^h}$$

$$\varepsilon_n < \delta \text{ für } n \geq M(\delta)$$

$$< \kappa \left(1 - \frac{1}{(M+1)^h} \right) + \delta$$

$$1 - x^h = (1-x) \frac{d(x^h)}{dx}$$

$$< \kappa \cdot \left(1 - \frac{1}{M+1} \right) h \cdot \frac{1}{(M+1)^{h-1}} + \delta$$

$$< \kappa \cdot h \cdot (M+1) + \delta < 2\delta \text{ für}$$

$$h < \frac{\delta}{\kappa \cdot (M+1)}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \mathcal{J}(s_0 + h) = \mathcal{J}(s_0).$$

Falls eigentliche Divergenz stattfindet: $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^n \frac{a_n}{n^s} = +\infty$, dann $\lim_{h \rightarrow 0} \mathcal{J}(s_0 + h) = +\infty$.

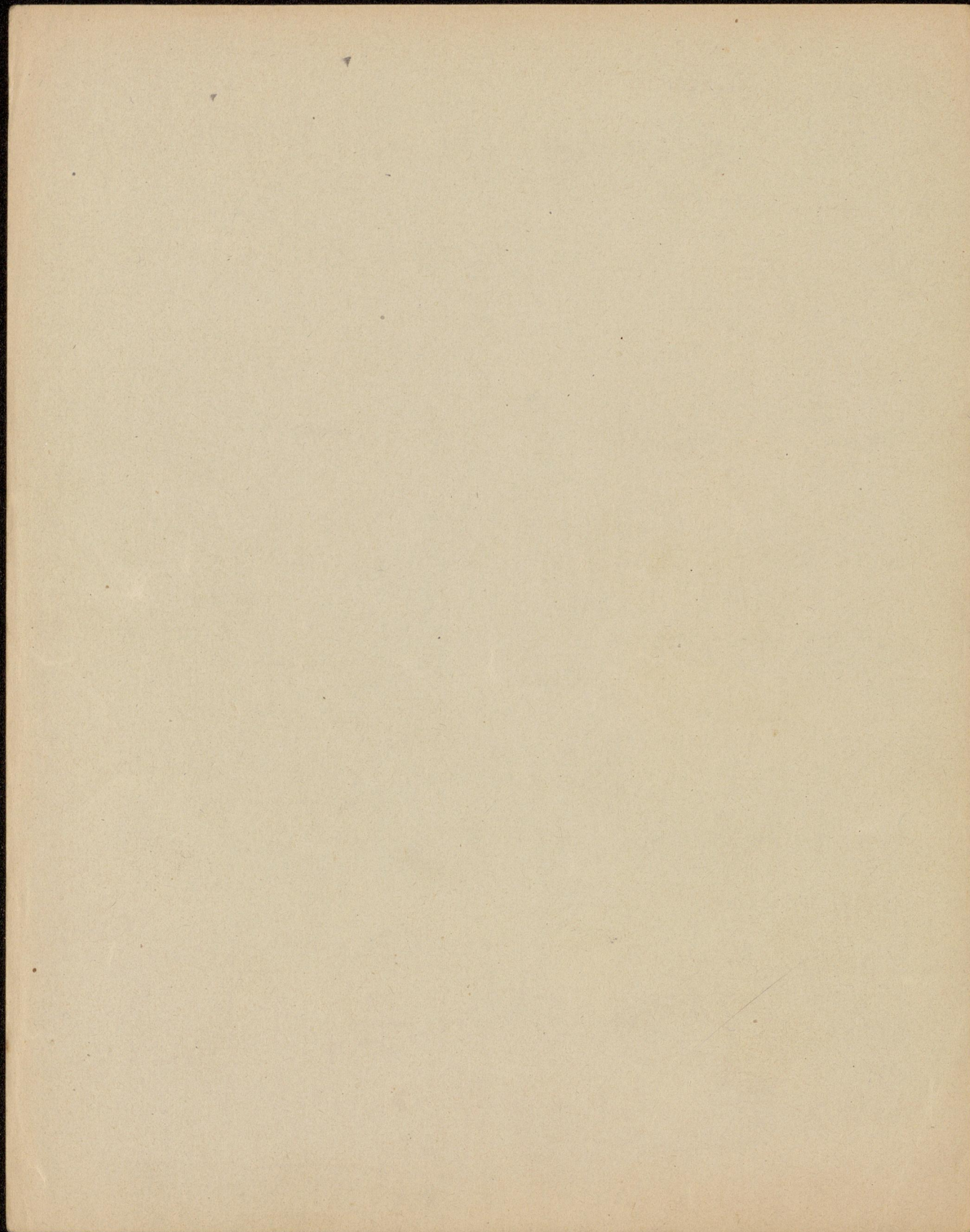
Wenn Konvergenz für $s_0 + h$ ist

$$\mathcal{J}(s_0 + h) = \lim_{N \rightarrow \infty} \left\{ \sum_{n=1}^{N-1} \mathcal{J}(n) \left(\frac{1}{n^h} - \frac{1}{(n+1)^h} \right) + \frac{\mathcal{J}(N)}{N^h} \right\}$$

$$\mathcal{J}(n) \geq \eta \text{ für } n > k$$

$$\mathcal{J}(s_0 + h) > \sum_{n=1}^{k-1} \mathcal{J}(n) \left(\frac{1}{n^h} - \frac{1}{(n+1)^h} \right) + \frac{\mathcal{J}(N)}{N^h} - \varepsilon \text{ für } N \geq N_0(h).$$

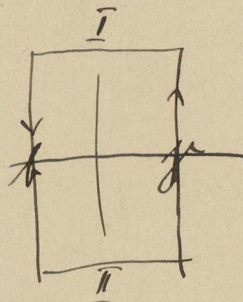
$$> \sum_{n=1}^k \mathcal{J}(n) \left(\frac{1}{n^h} - \frac{1}{(n+1)^h} \right) + \mathcal{J} \left(\frac{1}{(N/k)^h} - \frac{1}{N^h} \right) - \varepsilon$$



Die Koeffizientensumme des $D(s)$.

$$1) \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \frac{x^s}{s} ds \text{ konvergent und } \begin{cases} 0 & \text{für } 0 < x < 1 \\ 1 & \text{für } 1 < x \end{cases} \quad (x > 0)$$

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\omega}^{\gamma+i\omega} \frac{x^s}{s} ds = \frac{1}{2} \quad \text{für } x=1.$$



a) $x > 1$

$$\int_{\gamma-i\omega}^{\gamma+i\omega} \frac{x^s}{s} ds - 2\pi i = \int_{\text{I}} + \int_{\text{II}} + \int_{\text{III}} \frac{x^s}{s} ds$$

$$\left| \int_{\text{I}} \right| = \left| \int_{\gamma-i\omega}^{\gamma+i\omega} \frac{x^s}{s} ds \right| < \int_{\gamma-i\omega}^{\gamma+i\omega} x^{\sigma} d\sigma = \frac{x^{\gamma} - x^{\gamma-i\omega}}{\omega \log x}$$

$$\left| \int_{\text{II}} \right| < \frac{x^{\gamma}}{\omega \log x} \quad \left| \int_{\text{III}} \right| < x^{\gamma} \int_{-\omega}^{+\omega} \frac{dt}{1+t^2}$$

$$\left| \int_{\gamma-i\omega}^{\gamma+i\omega} \frac{x^s}{s} ds - 2\pi i \right| < \frac{2x^{\gamma}}{\omega \log x} \quad x > 1.$$

$t = \gamma + it'$
 $\omega = \gamma + i\omega'$

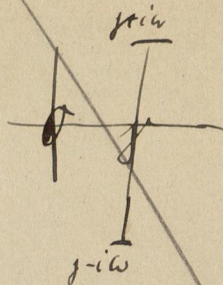
b) $x < 1$

$$\left| \int_{\gamma-i\omega}^{\gamma+i\omega} \frac{x^s}{s} ds \right| < \frac{2x^{\gamma}}{\omega \log x} \quad (0 < x < 1)$$

$$\begin{aligned} c) \int_{\gamma-i\omega}^{\gamma+i\omega} \frac{ds}{s} &= i \int_0^{\omega} \left(\frac{1}{\gamma+it} + \frac{1}{\gamma-it} \right) dt = 2iy \int_0^{\omega} \frac{dt}{\gamma^2+t^2} = 2iy \int_0^{\frac{\omega}{\gamma}} \frac{du}{1+u^2} \\ &= 2iy \int_0^{\frac{\omega}{\gamma}} \frac{du}{1+u^2} = 2iy \left[\arctan u \right]_0^{\frac{\omega}{\gamma}} = 2iy \arctan \frac{\omega}{\gamma} \end{aligned}$$

Die Bestimmung der Koeffizientensumme.

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\omega}^{\gamma+i\omega} \frac{x^s}{s} ds = \begin{cases} 0 & 0 < x < 1 \\ x & x > 1 \end{cases}$$



1) Das Integral konvergiert für jedes positive $x = e^u$.

$$\int_{\gamma-i\omega}^{\gamma+i\omega} = i \int_{-\omega}^{\omega} e^{u\gamma} \left(\frac{e^{iut}}{\gamma+it} + \frac{e^{-iut}}{\gamma-it} \right) dt$$

$$= i e^{u\gamma} \int_{-\omega}^{\omega} \frac{e^{iut} (\gamma-it) + e^{-iut} (\gamma+it)}{\gamma^2 + t^2} dt$$

$$= i e^{u\gamma} \int_{-\omega}^{\omega} \frac{e^{iut} - e^{-iut}}{\gamma^2 + t^2} dt + 2i e^{u\gamma} \int_0^{\omega} \frac{A \sin ut}{\gamma^2 + t^2} dt$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{u}} \frac{A \sin ut}{\gamma^2 + t^2} dt = \sum_{k=0}^{N-1} \int_{\frac{k\pi}{u}}^{\frac{(k+1)\pi}{u}} \frac{A \sin ut}{\gamma^2 + t^2} dt$$

$$= \sum_{k=0}^{N-1} \int_0^{\frac{\pi}{u}} \frac{(A + k\frac{\pi}{u}) \sin(ut + k\pi)}{\gamma^2 + (t + k\frac{\pi}{u})^2} dt = \int_0^{\frac{\pi}{u}} \left(\sum_{k=0}^{N-1} (-1)^k \frac{A + k\frac{\pi}{u}}{\gamma^2 + (t + k\frac{\pi}{u})^2} \right) \sin ut dt$$

$\frac{A}{\gamma^2 + t^2}$ ist eine monoton gegen Null abnehmende Funktion von t für $A > \gamma$

$$\frac{(\gamma^2 + t^2) - 2t^2}{(\gamma^2 + t^2)^2} = \frac{\gamma^2 - t^2}{(\gamma^2 + t^2)^2}$$

$\gamma \geq 0$

18

W. $\mathcal{G}(s)$ für $\mathcal{K}(s) = \gamma$ absolut konvergiert, $\gamma > 1$

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\omega}^{\gamma+i\omega} \frac{x^s}{s} \mathcal{G}(s) ds = \sum_{n \leq x} a_n \quad \left(x \text{ ganz. } \sum_{n=1}^x a_n = a_1 + \dots + a_{x-1} + \frac{1}{2} a_x \right)$$

$$\int_{\gamma-i\omega}^{\gamma+i\omega} \frac{x^s}{s} \mathcal{G}(s) ds = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_{\gamma-i\omega}^{\gamma+i\omega} \left(\frac{x}{n}\right)^s ds$$

$$= 2\pi i \sum_{n \leq x} a_n + \mathcal{F}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} |\mathcal{F}| &< \frac{2}{\omega} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x}{n}\right)^{\gamma} \frac{|a_n|}{|\log \frac{x}{n}|} + \left\{ \frac{2|a_x| x^{\gamma}}{\omega} \right\} \\ &< \frac{2}{\omega} \frac{x^{\gamma}}{\min_{n \leq x} \left(\log \frac{x}{n}\right)^{\gamma}} \sum_{n=1}^x \frac{|a_n|}{n^{\gamma}} + \frac{2|a_x| x^{\gamma}}{\omega} \end{aligned}$$

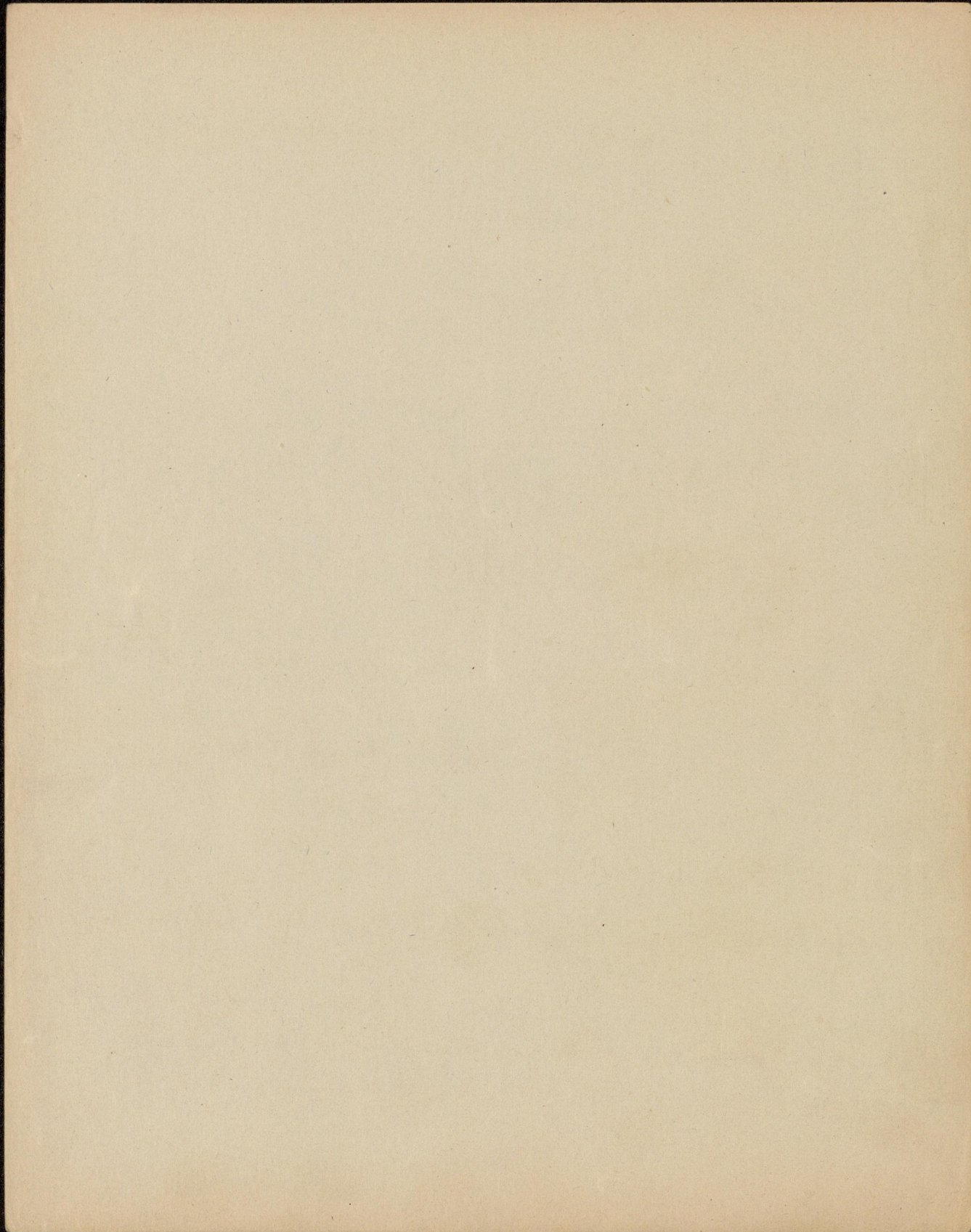
$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \mathcal{F} = 0.$$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\omega}^{\gamma+i\omega} \frac{x^s}{s} \mathcal{G}(s) ds = \sum_{n=1}^x a_n \quad \text{im absoluten Konvergenzgebiet.}$$

Das ist eine unstetige Funktion in x .

Notwendige Bedingungen für die Entwickelbarkeit einer analyt. Funkt. in eine Dirichletsche Reihe:

Das Integral muss konvergieren für ein gewisses γ und eine in jedem Intervall $x < x < x+1$ stetige konstante Funktion darstellen, die für den ganzen Zahlen x je eine Sprungstelle hat, deren Wert gleich dem arithmet. Mittel ist.



Verallgemeinerung des Störkennwertfaktors.

a) Logarithmische Mittel. $k-1$ k ganze Zahl > 1

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \frac{x^s}{s^k} ds = \begin{cases} \frac{(\log x)^{k-1}}{(k-1)!} & x \geq 1 \\ 0 & x \leq 1. \end{cases} = F(x, k).$$

$\gamma > 0$

absolut konvergentes Integral.

$$\left| \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \frac{x^s}{s^k} ds - 2\pi i \text{ Res.} \right| < \frac{2x^\gamma}{\omega^k |\log x|} \quad (x \neq 1).$$

$$\left| \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \frac{ds}{s^k} - \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \frac{ds}{s^k} \right| = \left| \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \frac{ds}{s^k} \right| \leq \left| \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \frac{ds}{s^k} \right| + \left| \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \frac{ds}{s^k} \right|$$

$$\leq \frac{2}{(k-1) \omega^{k-1}}$$

$F(x, k)$ ist eine stetige Funktion von x für $k \geq 2$.

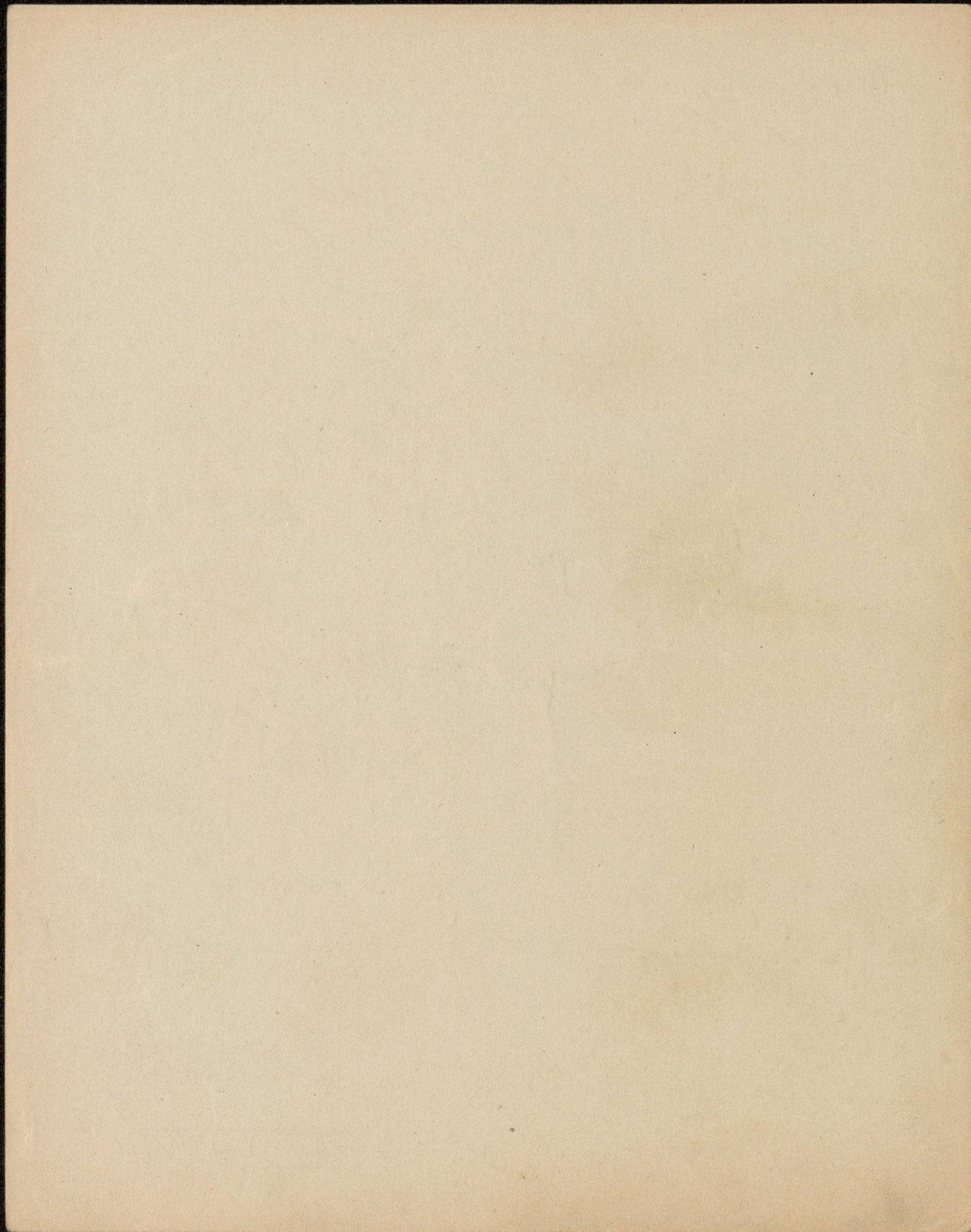
$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \frac{x^s}{s^k} f(s) ds = \frac{1}{(k-1)!} \sum_{n=1}^x a_n \left(\log \frac{x}{n} \right)^{k-1}$$

stetig in x .

$$f) \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \frac{x^s}{s(s+1)(s+2) \dots (s+k-1)} ds = \begin{cases} 0 & 0 < x \leq 1. \\ \sum \text{Res.} = \sum_{v=0}^{k-1} \frac{C_v}{x^v} & x \geq 1. \end{cases} = \frac{1}{(k-1)!} \sum_{v=0}^{k-1} \frac{1}{v!} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^{k-1}$$

$$\frac{1}{s(s+1) \dots (s+k-1)} = \sum_{v=0}^{k-1} \frac{C_v}{s+v} \quad C_v = \frac{1}{f'(-v)} = \frac{1}{-v \cdot (-v+1) \cdot \dots \cdot (-v+k-1)}$$

$$\sum \text{Res.} = \sum_{v=0}^{k-1} \frac{C_v}{x^v} = \frac{1}{(k-1)!} \sum_{v=0}^{k-1} (-1)^v \binom{k-1}{v} x^{-v} = \frac{(-1)^{k-1}}{v! (k-1-v)!} = (-1)^{k-1} \binom{k-1}{v} \frac{1}{(k-1)!}$$



$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \frac{x^s \mathcal{L}(s)}{s(s+1)\cdots(s+k-1)} ds = \frac{1}{(k-1)!} \sum_{n=1}^x a_n \left(1 - \frac{n}{x}\right)^{k-1} \quad (k \geq 2)$$

$$= \frac{1}{(k-1)!} \frac{\sum_{n=1}^x a_n (x-n)^{k-1}}{x^{k-1}} \quad \gamma > 0.$$

10

Lebender Teil über reguläre Stellen
 $\Delta x^{s-1} \mathcal{L}(s)$

Das Verhalten der Dirichletschen Reihe
 bei wachsenden Ordinaten

1) Ist σ_1 die absolute Konvergenzabszisse, so ist
 $\mathcal{L}(\sigma + iA) = O(1)$ für $\sigma > \sigma_1 + \delta$, $|A| \rightarrow \infty$.

2) Im Streifen bedingter Konvergenz
 Konvergenzabszisse σ_0 . $\sigma > \sigma_0 + \varepsilon$

$$\varepsilon = \frac{\sigma - \sigma_0}{2}$$

$$\sigma_1 = \sigma_0 - \varepsilon$$

$$A > 0 \quad \left| \begin{array}{l} 0 < \sigma_1 < 1 \end{array} \right.$$

$$a_n =$$

$$\mathcal{L}(\sigma + iA) = \mathcal{L}(\sigma_0 + \varepsilon + (\sigma - \sigma_0 - \varepsilon) + iA)$$

$$q(n) = \sum_{m=1}^n \frac{a_m}{m^{\sigma_0 + \varepsilon}} \quad a_n = O(n^{\sigma_0 + \varepsilon})$$

$$\mathcal{L}(\sigma + iA) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^{\sigma + iA}} = \sum_{n=1}^A \frac{a_n}{n^{\sigma + iA}} + \sum_{A+1}^{\infty} \frac{q(n) - q(n-1)}{n^{\sigma + iA} n^{\sigma_0 - \varepsilon}}$$

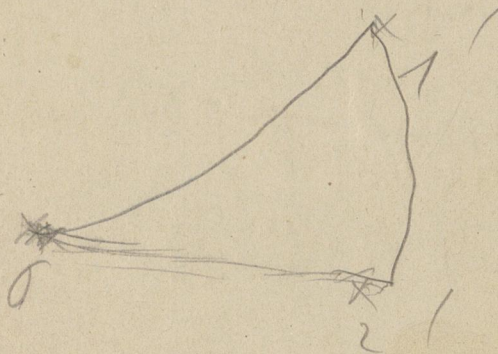
$$= O\left(\sum_{n=1}^A \frac{n^{\sigma_0 + \varepsilon}}{n^{\sigma}}\right) + O\left(\frac{q(A)}{A^{\sigma + iA}}\right) + \sum_{A+1}^{\infty} q(n) \left(\frac{1}{n^{\sigma + iA}} - \frac{1}{(n+1)^{\sigma + iA}}\right)$$

$$= O\left(\sum_{n=1}^A \frac{1}{n^{\sigma - \sigma_0 - \varepsilon}}\right) + O(1) + \frac{1}{A^{\sigma + iA}} \sum_{A+1}^{\infty} q(n) \int_n^{\infty} \frac{du}{u^{\sigma + iA + 1}}$$

$$= O(A^{1 - \sigma_1}) + O\left(A \int_{A+1}^{\infty} \frac{du}{u^{1 + \sigma_1}}\right) = O(A^{1 - \sigma_1}) = O(A^{1 - \sigma_0 + \varepsilon})$$

$$\lambda' = \frac{1}{\lambda}$$

X
0

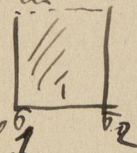


Satz von Phragmén - Lindelöf (1908)

Analys. Funkt. in der Nähe einer rechteck. singuläre Stelle

1) Wenn $f(s) = O(e^{a|t|})$ ($a > 0$) in $\mathcal{H}$ gleichmäßig

und auf dem Rande $|f(s)| < b$, dann in Innen auch $f(s) < b$



$$s^2(\sigma_2 + iA) = \sigma_2^2 - A^2 - 2iA\sigma_2$$

$$\varphi(s) = f(s) e^{-\varepsilon \left(\frac{\sigma_2 - \sigma_1}{2}\right)^2} = O(e^{a|t| - \varepsilon t^2})$$

$\lim_{|t| \rightarrow \infty} \varphi(s) = 0$, also $|\varphi(s)| < b |e^{-\varepsilon s^2}| < b e^{-\varepsilon \left(\frac{\sigma_2 - \sigma_1}{2}\right)^2}$ auf dem

ganzen Rande + Querbalcken, also

$$\left| f(s) e^{\varepsilon \left(\frac{\sigma_2 - \sigma_1}{2}\right)^2} \right| < b e^{\varepsilon \left(\frac{\sigma_2 - \sigma_1}{2}\right)^2} \text{ auch in Innen}$$

$$|f(s)| < b e^{\varepsilon \left(\frac{\sigma_2 - \sigma_1}{2}\right)^2} |e^{-\varepsilon \left(\frac{\sigma_2 - \sigma_1}{2}\right)^2}| \text{ für jedes } \varepsilon > 0, \text{ d. h.}$$

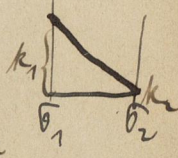
$$|f(s)| \leq b \text{ auch in Innen.}$$

2) $\sigma_1 < \sigma_2$. $f(\sigma_1 + iA) = O(|A|^{k_1})$ $f(\sigma_2 + iA) = O(|A|^{k_2})$

$f(\sigma + iA) = O(e^{a|t|})$ gleichmäßig für $\sigma_1 \leq \sigma \leq \sigma_2$.

Dann $f(\sigma + iA) = O(|A|^{\mu(\sigma)})$ gleichmäßig

$$\mu(\sigma) = \frac{k_2 - k_1}{\sigma_2 - \sigma_1} (\sigma - \sigma_1) + k_1$$



Beweis: Es gibt eine reguläre Funktion $g(s) \neq 0$ sodass

$$g(s) = O(|A|^{\mu(\sigma)}) \quad \sigma_1 \leq \sigma \leq \sigma_2$$

$$A > 0.$$

$\frac{f(s)}{g(s)}$ erfüllt 1), also $f(s) = O(|A|^{\mu(\sigma)})$

Wende!

Gegenbeispiel für Fol. in unendl. Grenzwert

$$f(z) = e^{e^{-iz}} \quad -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq +\frac{\pi}{2}$$

$$f(\sigma + it) = e^{e^{-i\sigma + t}} = e^{e^t (\cos \sigma - i \sin \sigma)}$$

$$\left. \begin{aligned} f\left(\frac{\pi}{2} + it\right) &= e^{-iet} \\ f\left(-\frac{\pi}{2} + it\right) &= e^{iet} \end{aligned} \right\} \text{ Beh. 1.}$$

$$\text{Aber } f(0 + it) = e^{e^t} \rightarrow \infty$$

α, a reelle Konstanten

$$g(s) = A e^{cs+a - \frac{ic\pi}{2}s}$$

$A > 0$

$$\frac{\boxed{\phantom{0 < \Im(\log s) < \pi}}}{0 < \Im(\log s) < \pi}$$

12

$$= e^{(cs+a) \log(\sigma+it) - \frac{ic\pi}{2}s}$$

$$= e^{(cs+a) (\log A + \log(i + \frac{\sigma}{A})) - \frac{ic\pi}{2}s}$$

$$= e^{(cs+a) \left\{ \log A + \frac{i\pi}{2} + \log\left(1 - \frac{i\sigma}{A}\right) \right\} - \frac{ic\pi}{2}(\sigma+it)}$$

$$= O\left(A^{c\sigma+a} e^{(cs+a) \frac{u\sigma^2}{A^2}}\right) = O\left(A^{c\sigma+a}\right) \text{ gleichm\"a\ss} \text{ im Inneren}$$

Ähnlich für $A < 0$,

Folgerung: Wenn an Rande eines Vertikalstreifens $f(s) = O(|A|^{ml.})$ und in Inneren $O(e^{a/|A|})$, dann im Inneren auch gleichmäßig $O(|A|^{ml.})$.
nimmt man für jedes σ die untere Grenze $\lambda(\sigma)$ der Exponenten.
dann ist $\lambda = \lambda(\sigma)$ eine nach unten konvexe Kurve.

Wachstumskurve eine Funktion.

$\mathcal{I}(s)$ im Streifen bedingte Konvergenz $\sigma_0 \leq \sigma \leq \sigma_1$

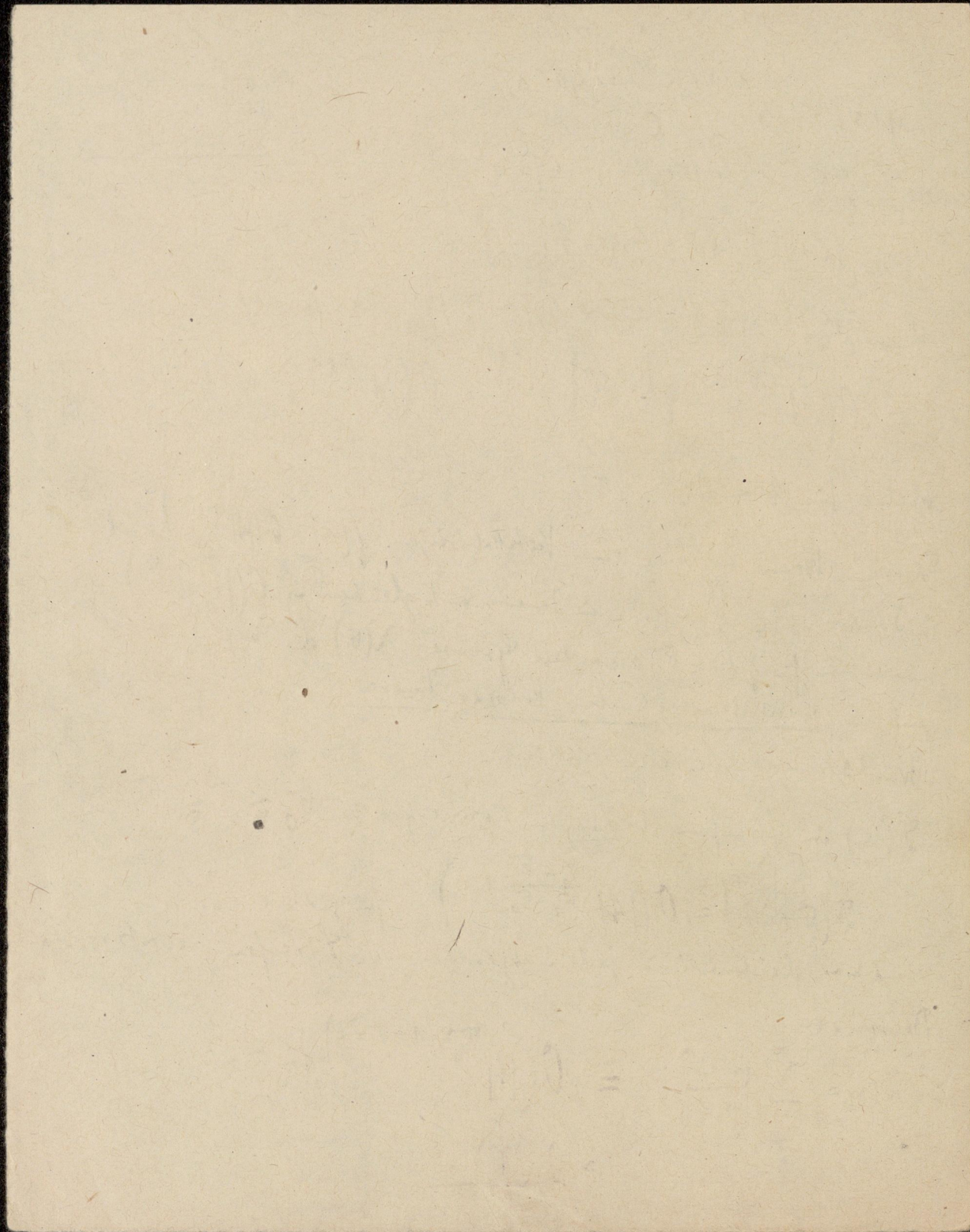
$$\mathcal{I}(\sigma+it) = O\left(|A|^{\frac{\sigma_1 - \sigma}{\sigma_1 - \sigma_0} + \varepsilon}\right) \text{ für jedes } \varepsilon > 0.$$

und zwar gleichmäßig in jedem abgeklommenen Streifen rechts von σ_0 .

Beispiel:

$$\mathcal{I}(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^s} = O\left(|A|^{\sqrt{s} \cdot 1 - \sigma + \varepsilon}\right) \quad 1 > \sigma > 0$$

$$= O(1)$$



Hilfssätze aus der Funktionen Theorie.

113

Schwarzes Lemma:

Wenn $|f(z)| \leq 1$ auf $|z|=1$ und dort regulär, $f(0) = 0$, dann ist

$$|f(z)| \leq |z| \quad \text{für } |z| \leq 1.$$

Transformation des Satzes:

Man führe man φ ein durch $\varphi = \frac{-2A}{f}$ $\varphi = \frac{-2A f(z)}{1 - f(z)}$

$$f(z) = \frac{\varphi(z) + A}{\varphi(z) - 2A} \quad \text{A reell } > 0$$

$|f| \leq 1$ ist gleichbedeutend mit $\Re \varphi(z) \leq A$

$f = -1$ entspricht $\varphi = A$.

$f = 0$ — $\varphi = 0$.

Satz von Carathéodory:

Sei $\varphi(0) = 0$, $\Re(\varphi(z))$ regulär für $|z| \leq 1$ und $\Re \varphi(z) \leq A$ auf $|z|=1$.

Dann ist

$\frac{\varphi(z)}{\varphi(z) - 2A}$ regulär auf $|z| \leq 1$ auf $|z|=1$ und daher

$$\left| \frac{\varphi(z)}{\varphi(z) - 2A} \right| \leq |z|, \quad |\varphi(z)| \leq |z| |\varphi(z) - 2A| \leq |z| |\varphi(z)| + 2A|z|$$

$$|\varphi(z)| \leq \frac{2A|z|}{1 - |z|}$$

Man setze $\varphi: \varphi \rightarrow \varphi(0)$

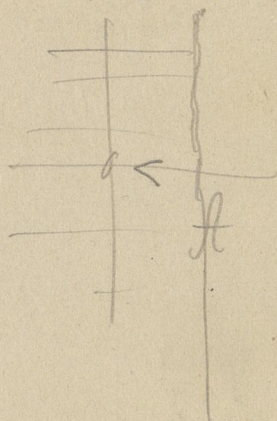
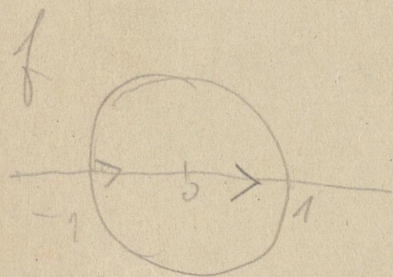
$$|\varphi(z) - \varphi(0)| \leq \frac{2(A - \Re(\varphi(0)))|z|}{1 - |z|}; \quad \text{Allgemein} \quad |\varphi(z) - \varphi(z_0)| \leq \frac{2(A - \Re(\varphi(z_0)))|z - z_0|}{\Re - |z_0| - |z|}$$

$$f = \frac{\varphi}{\varphi - 2A}$$

$$\varphi = \frac{2Af}{f-1}$$

$$f = \frac{-1}{0} \rightarrow 1$$

$$\varphi = \frac{A}{0} \rightarrow \infty$$



$$|\varphi(s)| \leq |\varphi(s_0)| + 2|s-s_0| \frac{A - \Re(\varphi(s_0))}{R - |s-s_0|} \quad \text{für } |s-s_0| < R$$

wenn $\Re(\varphi(s)) \leq A$ auf $|s-s_0|=R$ und φ regulär im Inneren

Insbesondere auch

$$|\Re(\varphi(s))| \leq |\Re(\varphi(s_0))| + 2|s-s_0| \frac{A - \Re(\varphi(s_0))}{R - |s-s_0|}$$

Die Abschätzung von $|\Re \varphi|$, wenn $\Re \varphi$ bekannt und $\Re \varphi$ nur nach oben durch A begrenzt.

Hier folgt 13a, b, c

Γ -Integral

und Mellin'sches Integral

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty e^{-x} x^{s-1} dx \quad \Gamma(s+1) = s \Gamma(s)$$

$$|\Gamma(s+it)| = O\left(e^{-\frac{\pi}{2}|t|} |t|^{s-\frac{1}{2}}\right)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^s}$$

$$(-1)^n$$

$$\Re(e^{-t}) = O\left(\frac{1}{t^{\alpha+1}}\right)$$

$$\alpha \geq \alpha + 1 \text{ da}$$

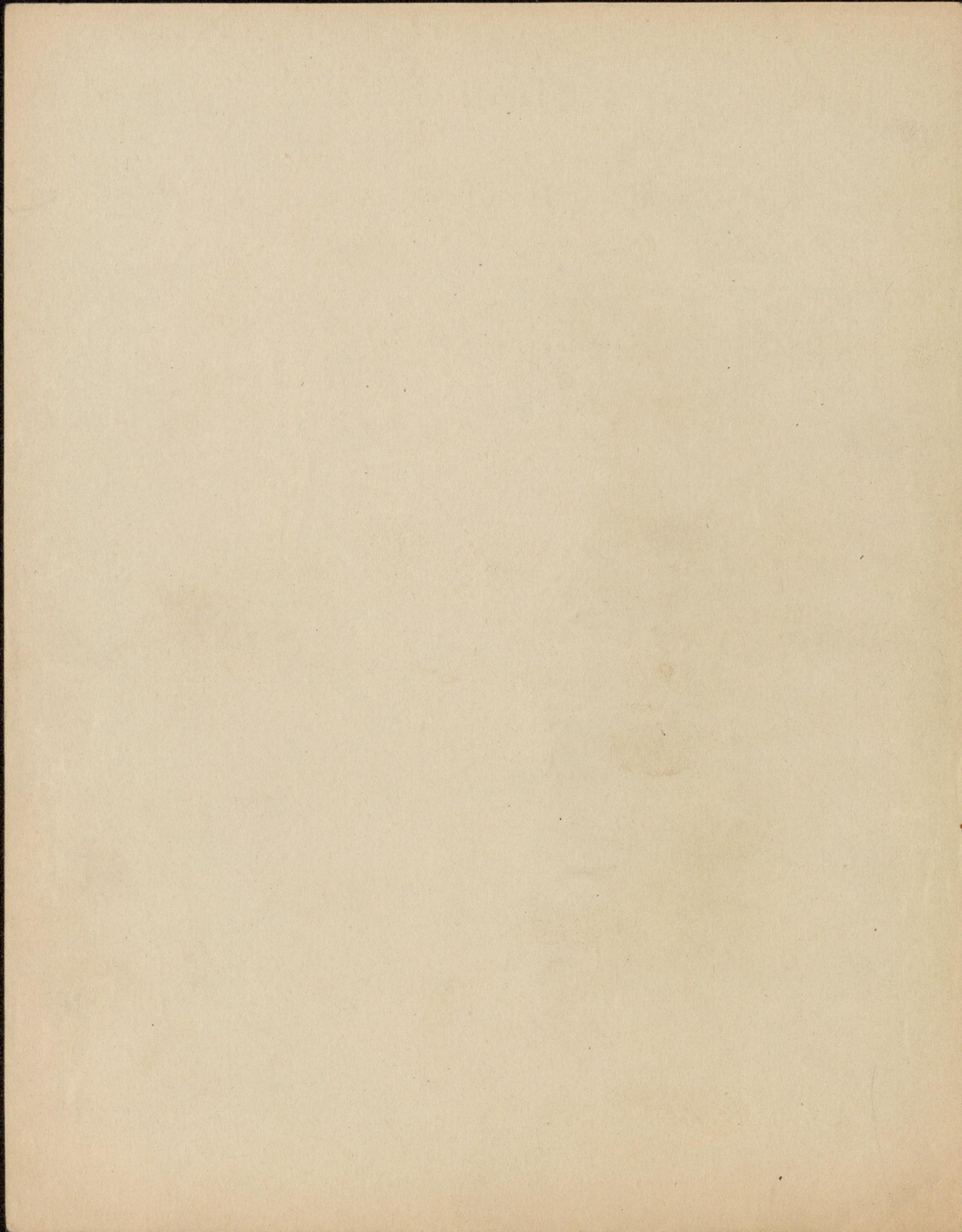
$$\Gamma(-n+\varepsilon) = \frac{(-1)^n \pi}{n! \varepsilon} \Gamma(n)$$

$$t^{\alpha-\alpha-1-1}$$

$$\Gamma(n+1-\varepsilon) \Gamma(-n+\varepsilon) = \frac{\pi}{\sin(n-\varepsilon)\pi}$$

$$\Gamma(s) \Gamma(1-s) = \frac{\pi}{\sin s \pi}$$

$$= \frac{(-1)^n \pi}{n! \varepsilon}$$



115

Schluss von den Mitteln höherer Ordnung
auf die Koeffizientensumme selbst.

London 1908. f. Beiträge zur analyt. Zahlentheorie. Rendic. Palermo 26.
(Zwei neue Verletzungen (Berlin Ber.))

Hilfssatz über reelle Funktionen:

Wenn $F(x)$ reell, $F'(x)$ für alle $x \neq$ ganze Zahl existiert

und $F'_+(n)$ für ganze n existiert

und $F'_+(x) \geq 0$, $x F'_+(x)$ nicht abnehmend

dann folgt aus $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{F(x)}{x} = \kappa$ auch $\lim_{x \rightarrow \infty} F'_+(x) \text{ vorhanden} = \kappa$

Beweis: Einfacher Fall: $F'(x)$ durchweg differenzierbar.

$$\text{Ann } \delta > 0 \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{F(x)}{x} = \kappa \quad \text{folgt} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{F(x+\delta x)}{x+\delta x} = \kappa(1+\delta)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{F(x+\delta x) - F(x)}{\delta x} = \kappa \delta$$

Nach dem Mittelwertsatz ist

$$0 < \delta < 1$$

$$\frac{F(x+\delta x) - F(x)}{\delta x} = F'(x + \vartheta \delta x)$$

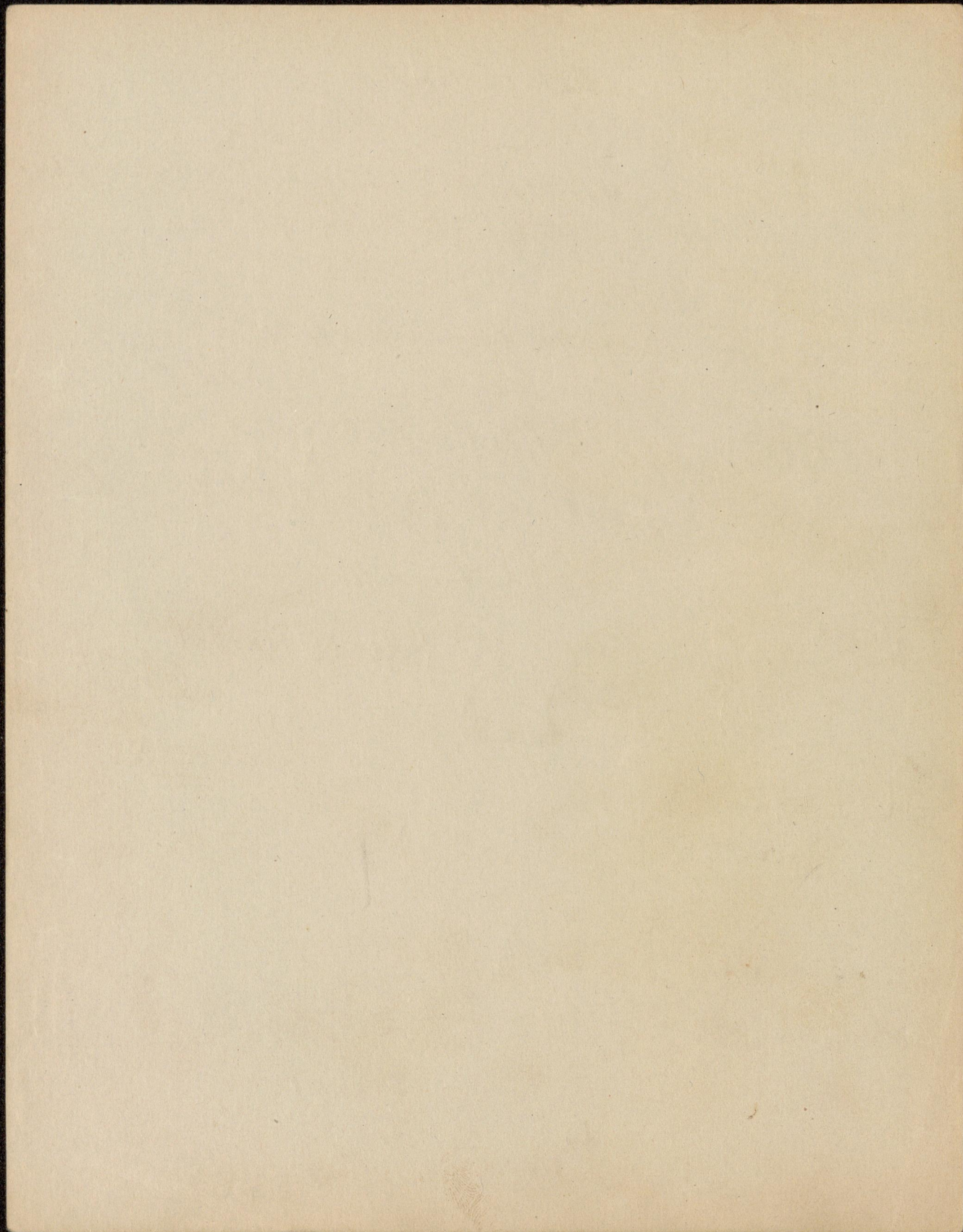
Weil $x F'(x)$ nicht abnehmend ist

$$(x+\delta x) F'(x+\delta x) \geq (x+\vartheta \delta x) F'(x+\vartheta \delta x) \geq x F'(x)$$

$$(1+\delta) F'(x+\delta x) > F'(x+\vartheta \delta x) \geq \frac{F'(x)}{1+\vartheta \delta} \geq \frac{F'(x)}{1+\delta}$$

$$(1+\delta) F'(x+\delta x) \geq \frac{F(x+\delta x) - F(x)}{\delta x} \geq \frac{F'(x)}{1+\delta}$$

$$\text{Id. h. } \frac{F(x) - F(x-\delta x)}{\delta x} < F'(x) < \frac{F(x+\delta x) - F(x)}{\delta x} \cdot \frac{(1+\delta)}{1+\vartheta \delta} \rightarrow \frac{\kappa(1+\delta)}{1+\vartheta \delta}$$



da $F'(x)$ ist nicht mehr gegen $\infty(1+\delta)$ und $\frac{\epsilon}{1+\delta}$ konvergierende Folge eingeschlossen, also $F'(x) \rightarrow \infty$.

116

Wenn nur $F'_+(x)$ existiert, muss man die Zwischenwerte für sich berücksichtigen. Seien $g_1 < g_2 < \dots < g_n$ die zum besten $x < g < x+\delta x$

$$F(x+\delta x) - F(g_n) = (x+\delta x - g_n) F'(\eta_n)$$

$$F(g_n) - F(g_{n-1}) = (g_n - g_{n-1}) F'(\eta_{n-1})$$

$$F(g_2) - F(g_1) = (g_2 - g_1) F'(\eta_1)$$

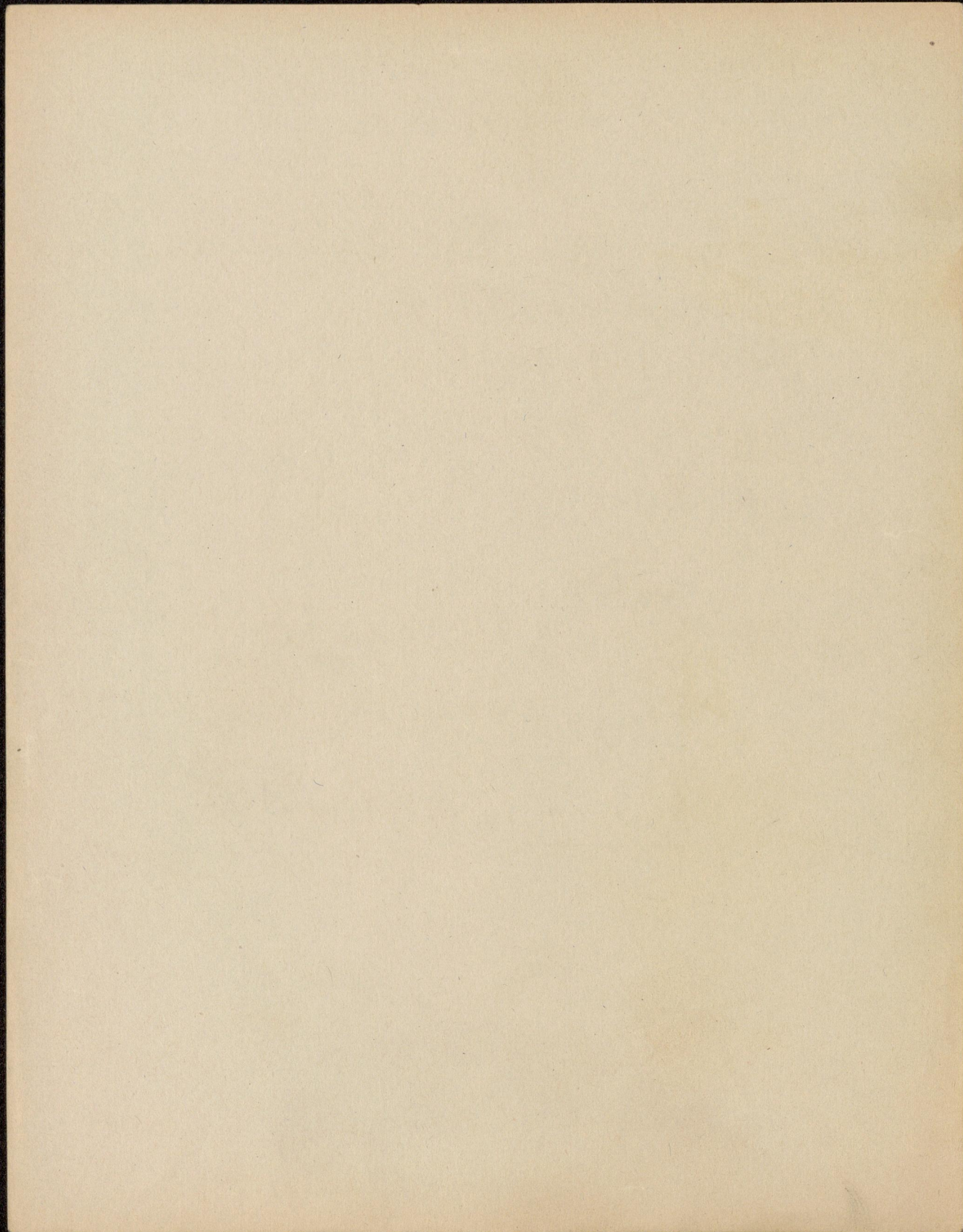
$$F(g_1) - F(x) = (g_1 - x) F'(\eta_0)$$

Man ist

$$x F'_+(x) \leq \eta_{v-1} F'(\eta_{v-1}) \leq \eta_v F'(\eta_v) \leq \eta_{v+1} F'(\eta_{v+1}) \leq (x+\delta x) F'_+(x+\delta x)$$

$$\frac{1}{1+\delta} \frac{x}{\eta_{v-1}} F'_+(x) \leq F'(\eta_v) \leq \frac{x+\delta x}{\eta_v} F'_+(x+\delta x) \leq (1+\delta) F'_+(x+\delta x)$$

$$\frac{1}{1+\delta} F'_+(x) \leq \frac{F(x+\delta x) - F(x)}{\delta x} \leq (1+\delta) F'_+(x+\delta x)$$



Wenn $a_n \geq 0$ und

117

$$\frac{\frac{1}{k!} \sum_{n=1}^x a_n \left(\log \frac{x}{n}\right)^k}{x} \quad \forall x = \frac{f(x)}{x} \rightarrow c, \text{ für } k \geq 1,$$

dann auch

$$\frac{\sum_{n=1}^x a_n}{x} \rightarrow c.$$

Wenn für $k \geq 1$ ist bei nicht ganzem x

$$f'(x) = \frac{1}{(k-1)!} \frac{1}{x} \sum_{n \leq x} a_n \left(\log \frac{x}{n}\right)^{k-1} \geq 0$$

und bei ganzem x

$$\begin{aligned} f'_+(x) &= \frac{1}{(k-1)!} \sum_{n \leq x} a_n \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \frac{1}{(k-1)!} \frac{1}{x} \sum_{n \leq x} a_n \left(\log \frac{x}{n}\right)^{k-1} \quad (= f'_-(x), \text{ wenn } k \geq 2) \end{aligned}$$

$x f'_+(x)$ zunehmend, also

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f'_+(x) = \frac{1}{(k-1)!} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sum_{n \leq x} a_n \left(\log \frac{x}{n}\right)^{k-1}}{x} = c.$$

2⁵ · 6! · ¹²⁶~~72~~ · 240

= Ordg. der Automorphismen-Gruppe

der G_8 mit Determin.

(wie 17T 39)

29.

Die Multiplikation Dirichletscher Reihen.

18

$$A(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}, \quad B(s) = \sum_{q=1}^{\infty} \frac{b_q}{q^s}$$

Wenn bei s_0 absolut konvergent, dann

$$A(s_0) \cdot B(s_0) = \sum_{n,q} \frac{a_n b_q}{(nq)^{s_0}} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{c_m}{m^{s_0}} = C(s_0)$$

$$c_m = \sum_{q|m} b_q \frac{a_{m/q}}{1}$$

Dirichletsche Multiplikation zweier Reihen.

Die Reihe $C(s)$ hat ein grösses oder kleineres Konvergenzgebiet als A, B haben.

Formales Produkt konvergiert jedenfalls und zwar absolut in dem gemeinsamen Gebiet absoluter Konvergenz beider Reihen.

Satz: Wenn $\sum |a_n|$ absolut konv. und $\sum b_n$ konv., dann

$$\sum c_n \text{ konv. und } = A \cdot B.$$

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{q|n} b_q a_{n/q} &= \sum_{1 \leq m \cdot q \leq \infty} b_q \cdot a_m = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sum_{q=1}^{\infty} b_q \\ &= \sum_{n=1}^{\sqrt{x}} a_n \sum_{q=1}^{\frac{x}{n}} b_q + \sum_{n > \sqrt{x}} a_n \sum_{q=1}^{\frac{x}{n}} b_q \\ &= \sum_{n=1}^{\sqrt{x}} a_n \sum_{q=1}^{\sqrt{x}} b_q + \sum_{n=1}^{\sqrt{x}} a_n \sum_{q > \sqrt{x}}^{\frac{x}{n}} b_q + \sum_{n > \sqrt{x}}^x a_n \sum_{q=1}^{\frac{x}{n}} b_q \\ &= \left(\sum_{n=1}^{\sqrt{x}} a_n \right) \left(\sum_{q=1}^{\sqrt{x}} b_q \right) + \left(< \sum_{n=1}^{\sqrt{x}} |a_n| \cdot o(1) + \sum_{n > \sqrt{x}}^x |a_n| o(1) \right) \end{aligned}$$

11

Satz: Wenn $\sum a_n$, $\sum b_n$ und $\sum c_n$ konvergieren, dann

19

$$\sum c_n = (\sum a_n) (\sum b_n)$$

Wenn für n weit die Dirichletsche Reihe konvergiert, ist sie stetig nach rechts. Ist α, β, γ die Konvergenzabszissen, mit $\gamma \leq 0, \alpha \leq 0, \beta \leq 0$.

Aber ist wegen absoluter Konvergenz

$$A(s) B(s) = C(s) \quad \text{für } \Re(s) > 1$$

Die Funktionen sind also regulär (als konvergente Dirichletsche Reihe) und daher gilt es auch für $\Re(s) > 0$. Man ist

$$A(0) = \lim_{s \rightarrow 0} A(s), \quad B(0) =, \quad C(0) =$$

$$\text{Aber } A(0) \cdot B(0) = C(0).$$

Vertiefung des ersten Satzes:

Wenn $A(s), B(s)$ für $\Re(s) > \sigma$ konvergieren, dann $C(s)$ für $\Re(s) > \sigma + \frac{1}{2}$

$$\sum_{n=1}^x \frac{a_n}{n^{\sigma+\frac{1}{2}+\delta}} = \left(\sum_{n=1}^{\sqrt{x}} \frac{a_n}{n^{\sigma+\frac{1}{2}+\delta}} \right) \left(\sum_{q=1}^{\sqrt{x}} \frac{b_q}{q^{\sigma+\frac{1}{2}+\delta}} \right)$$

$$+ \sum_{n=1}^{\sqrt{x}} \frac{a_n}{n^{\sigma+\frac{1}{2}+\delta}} \sum_{q>\sqrt{x}}^x \frac{b_q}{q^{\sigma+\frac{1}{2}+\delta}} \quad \text{I}$$

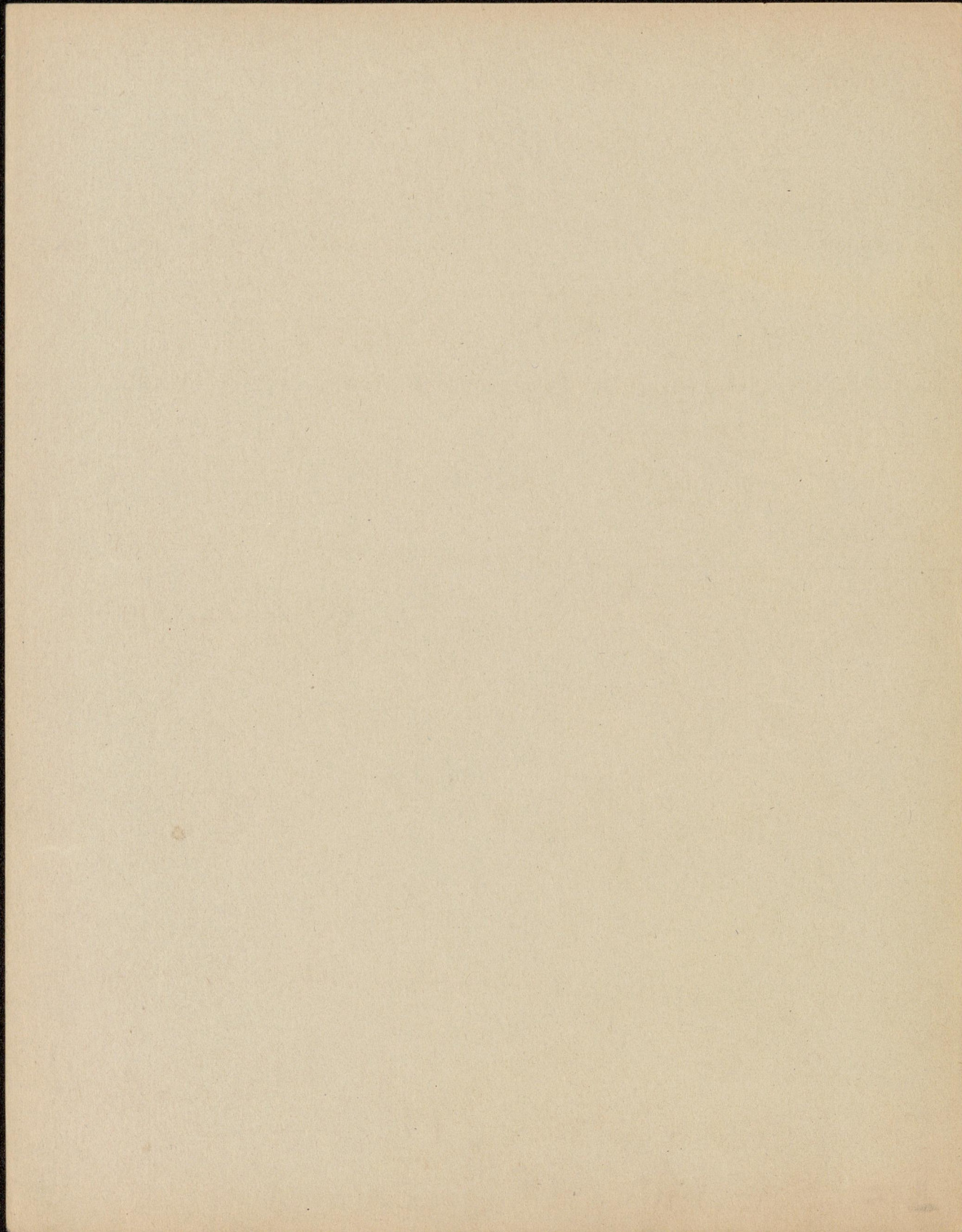
$$+ \sum_{n>\sqrt{x}}^x \frac{a_n}{n^{\sigma+\frac{1}{2}+\delta}} \sum_{q=1}^{\sqrt{x}} \frac{b_q}{q^{\sigma+\frac{1}{2}+\delta}} \quad \text{II.}$$

Durch partielle Summation folgt eben für Dirichletsche Reihen, dass für σ_0 konvergieren, dass bei σ

$$\sum_{n=m}^{\infty} \frac{a_n}{n^{\sigma_0+k}} = O\left(\frac{1}{m^k}\right)$$

$$|I| < \sum_{n=1}^{\sqrt{x}} \left| \frac{a_n}{n^{\sigma+\frac{1}{2}+\delta}} \right| \cdot O\left(\frac{1}{\sqrt{x}^{\sigma+\frac{1}{2}+\delta}}\right) = O\left(\frac{1}{\sqrt{x}^{\delta}}\right) \sum_{n=1}^{\sqrt{x}} \frac{|a_n|}{n^{\sigma+1+\delta}} = O(x^{-\frac{\delta}{2}})$$

$$|II| \leq \left(\sum_{n=1}^{\sqrt{x}} \frac{a_n}{n^{\sigma+\frac{1}{2}+\delta}} \right) \cdot O\left(\frac{1}{\sqrt{x}^{\sigma+\frac{1}{2}+\delta}}\right) \cdot \sum_{n>\sqrt{x}}^x \sum_{\frac{x}{n} < q < \sqrt{x}} \frac{b_q}{q^{\sigma+\frac{1}{2}+\delta}}$$



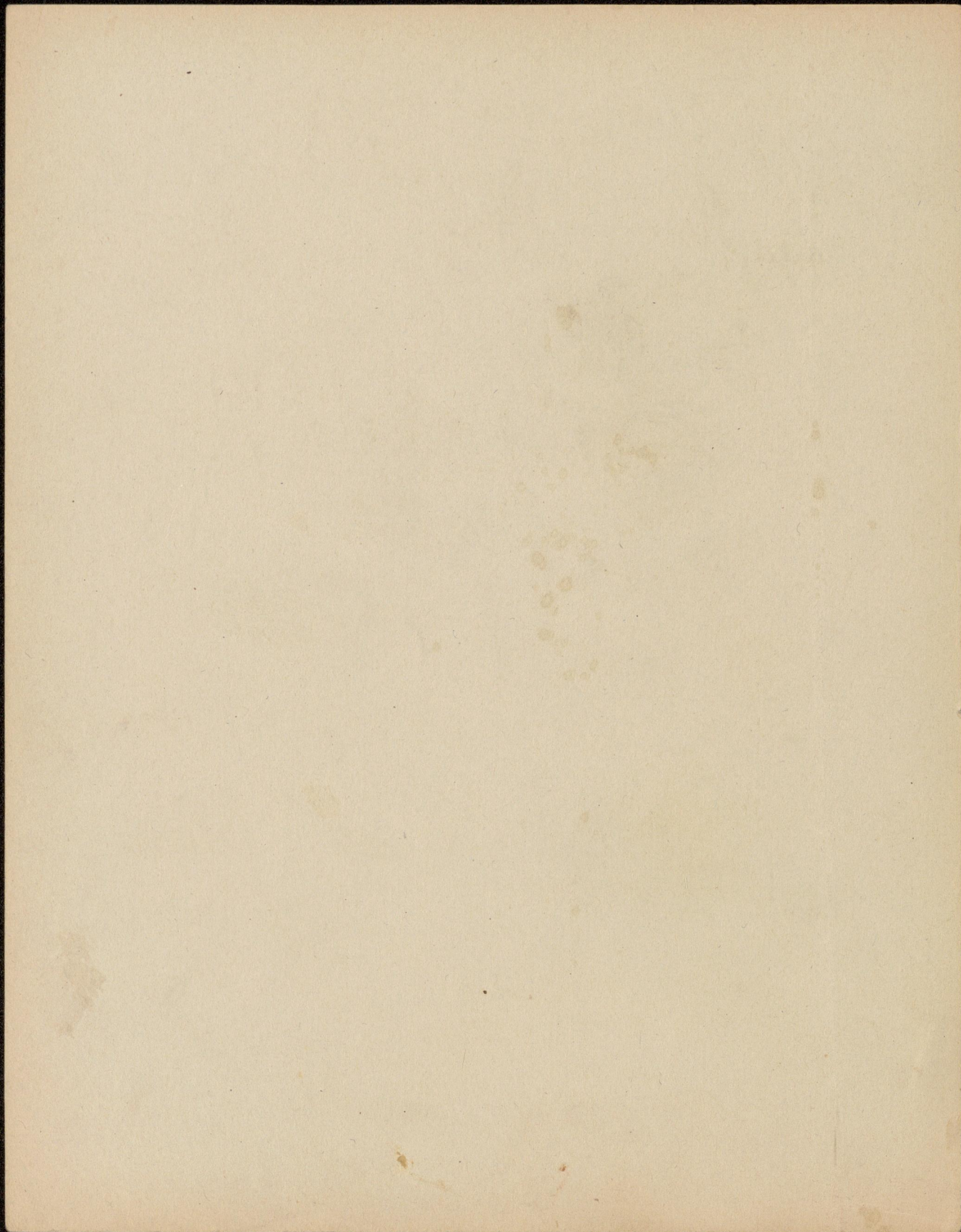
$$\overline{\Pi} = \sum_{\substack{\sqrt{x} < n \leq x \\ 1 \leq q \leq \frac{x}{n}}} = \sum_{\substack{ng \leq x \\ \sqrt{x} < n}} = \sum_{\substack{\sqrt{x} < n \leq \frac{x}{q} \\ q < \sqrt{x}}}$$

$$= \sum_{q < \sqrt{x}} \sum_{n=1}^{\frac{x}{q}} \frac{a_n}{n^{s+\frac{1}{2}+\sigma}} = \sum_{n > \sqrt{x}} \sum_{\substack{q=1 \\ q < \sqrt{x}}}^{\frac{x}{n}} \frac{a_n}{n^{s+\frac{1}{2}+\sigma}}$$

$$= \sum_{q=1}^{\sqrt{x}} \frac{b_q}{q^{s+\frac{1}{2}+\sigma}} O\left(\frac{1}{\sqrt{x}^{\frac{1}{2}+\sigma}}\right)$$

$$|\overline{\Pi}| \leq \lim_{x \rightarrow \infty} \sum_{q=1}^{\sqrt{x}} \frac{b_q}{q^{s+\frac{1}{2}+\sigma}} \frac{1}{(\sqrt{x})^{\frac{1}{2}+\sigma}} < \frac{\lim_{x \rightarrow \infty}}{\sqrt{x}^\sigma} \sum_{q=1}^{\sqrt{x}} \frac{|b_q|}{q^{s+\frac{1}{2}+\sigma}} = O(x^{-\frac{\sigma}{2}})$$

20



Die Riemannsche ζ -Funkt. und die Verteilung der Primzahlen.

21

$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ definiert eine für $\Re(s) > 1$ reguläre analytische Funktion. Man kann man beliebig machen und man $p_1, p_2, \dots$ die verschiedenen Primzahlen sind, so ist

$$\begin{aligned}\zeta(s) &= \prod_p \left(1 + \frac{1}{p^s} + \frac{1}{p^{2s}} + \dots \right) \\ &= \prod_p \frac{1}{1 - \frac{1}{p^s}}\end{aligned}$$

Denn entweder gibt es nur endlich viele p , das trivial, oder es gibt unendlich viele p , das ist

$$\left| \prod_{p \leq x} \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{p^s}} \right) - \sum_{n \leq x} \frac{1}{n^s} \right| < \sum_{n > x} \frac{1}{|n|^s} = o(1) \text{ für } x \rightarrow \infty$$

In dem trivialen Gebiet $\Re(s) > 1$ folgt aus dem analyt. Verhalten von $\zeta(s)$ nichts über die Verteilung der p .

Aber:

I. Aus dem Verhalten bei $s=1$ folgt: Es gibt unendlich viele p , das $\sum \frac{1}{p}$ divergent ist, aber jedenfalls unendlich viele p .

$$\text{für } \lim_{s \rightarrow 1} \zeta(s) = \infty, \text{ d.h. } \lim_{p \rightarrow 1} \prod_p \frac{1}{1 - \frac{1}{p^s}} = \infty, \text{ also unendl. viele } p$$

Folgt man.

Wäre nun $\sum \frac{1}{p}$ konvergent, so auch $\prod \left(1 - \frac{1}{p^s} \right) \neq 0$ für $\Re(s) \geq 1$ und stetig nach rechts.

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{(n+1)^2} - \frac{1}{n^2} \right) = -\frac{1}{2^2}$$

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-\lambda} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-\lambda}{k} \frac{1}{n^k}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \binom{-\lambda}{k} \frac{1}{n^{k+1}} = -\frac{1}{2^2}$$

$$-\frac{1}{2^2} = \sum_{k=1}^{\infty} \binom{-\lambda}{k} \left\{ \xi(\lambda+k) - 1 \right\}$$

$$= \binom{-\lambda}{1} \left(\xi(\lambda+1) - 1 \right) + \binom{-\lambda}{2}$$

II. $\log \zeta(s)$ ist eine für $\Re(s) > 1$ reguläre analyt. Fkt., die mit einer Dirichletsreihe entwickelt wird:

$$\log \zeta(s) = - \sum_p \frac{1}{m} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{p^{mn}} = \sum_{mp} \frac{1}{mp^{ms}}$$

$$\log \zeta(s) + \sum_p \frac{1}{p^s} = \varphi(s)$$

$\varphi(s)$ regulär für $\Re(s) > \frac{1}{2}$. Denn

$$\varphi(s) = \sum_p \left(\frac{1}{2p^{2s}} + \frac{1}{3p^{3s}} + \dots \right)$$

hat eine für $\Re(s) > \frac{1}{2}$ konvergente Majorante:

$$\sum_p \left(\frac{1}{p^{2\sigma}} + \frac{1}{p^{3\sigma}} + \dots \right) = \sum_p \frac{1}{p^{2\sigma} \left(1 - \frac{1}{p^{\sigma}} \right)}$$

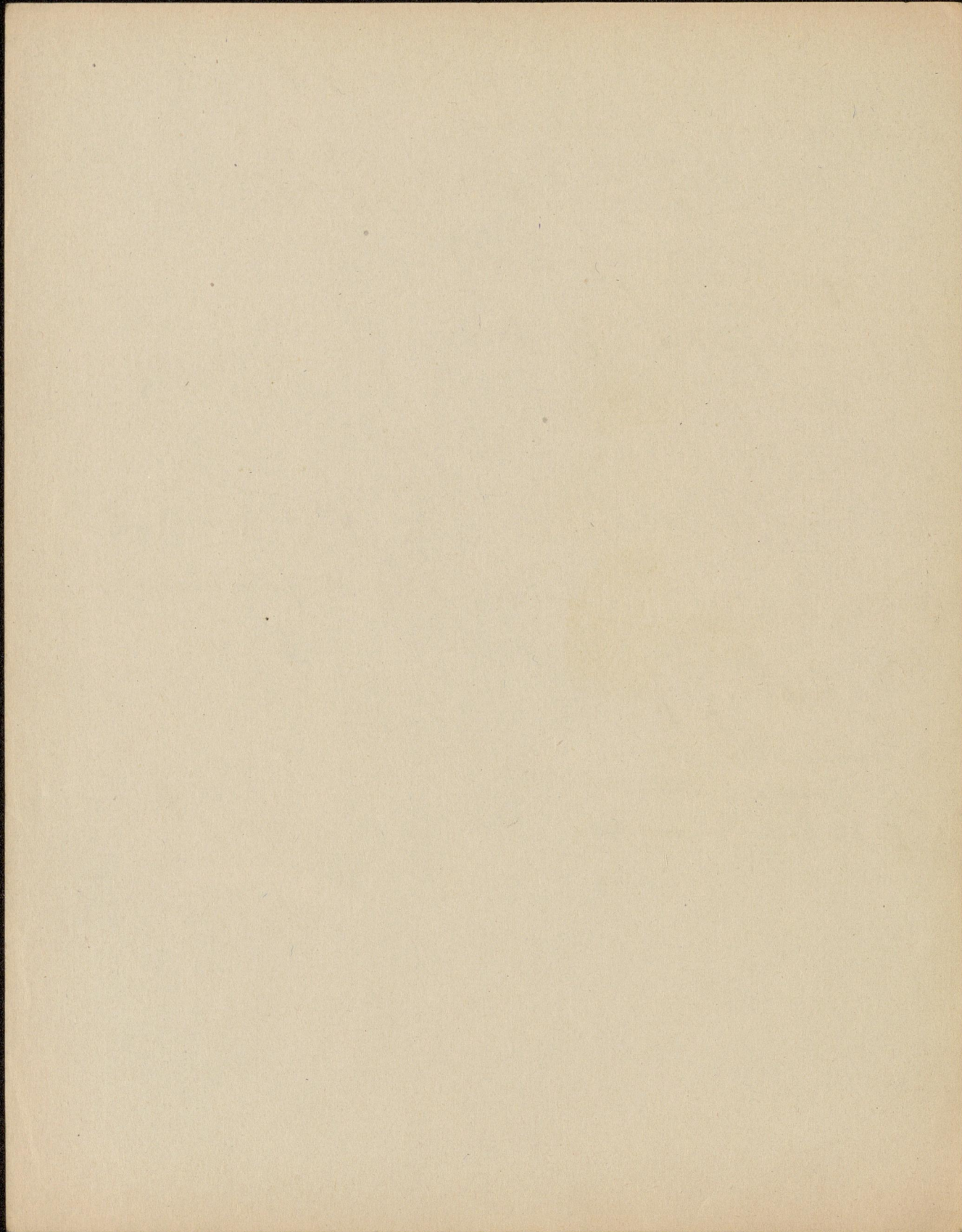
III. Falls aber $\zeta(s)$ in die Halbebene $\Re(s) > \frac{1}{2}$ fortgesetzt ist,

hat

$$Q(s) = \sum_p \frac{1}{p^s}$$

2. reguläre Stellen nur

- 1) Die singulären Stellen von $\zeta(s)$, also $s=1$.
- 2) Die Nullstellen von $\zeta(s)$.



Fortsetzbarkeit von $\zeta(s)$.

23

I. Beweis:

$$\zeta(s) = \sum \frac{1}{n^s}, \quad \zeta(s) = \sum \frac{1}{n^s} = (1 - 2^{1-s}) \zeta(s).$$

$$\zeta(s) \text{ regulär für } \Re(s) > 0 \text{ außer } s = 1 + \frac{2k\pi i}{\log 2}.$$

II. Beweis:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_n^{n+1} \frac{du}{u^s} = \int_1^{\infty} \frac{du}{u^s} = \frac{1}{s-1} \text{ ist ein für } \Re(s) > 1 \text{ konvergente Reihe}$$

$$\zeta(s) - \frac{1}{s-1} = 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{(n+1)^s} - \int_n^{n+1} \frac{du}{u^s} \right)$$

Durch partielle Integration folgt

$$\int_n^{n+1} \frac{du}{u^s} = \int_n^{n+1} \frac{d(u-n)}{u^s} = \left. \frac{u-n}{u^s} \right|_n^{n+1} + s \int_n^{n+1} \frac{(u-n) du}{u^{s+1}}$$

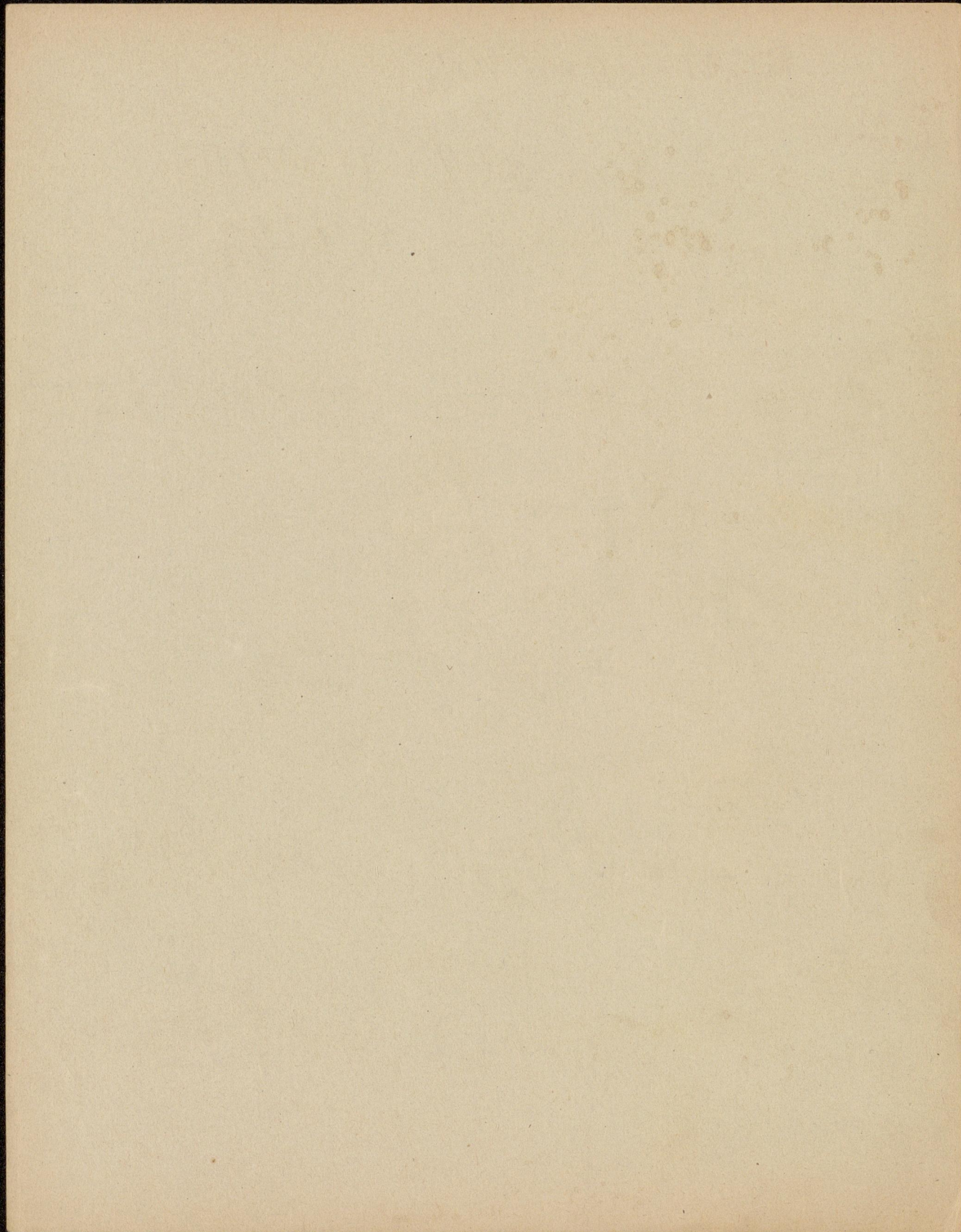
$$= \frac{1}{(n+1)^s} + s \int_n^{n+1} \frac{(u-n) du}{u^{s+1}}$$

$$\zeta(s) - \frac{1}{s-1} = 1 - s \sum_{n=2}^{\infty} \int_n^{n+1} \frac{(u-n) du}{u^{s+1}}.$$

Regulär für $\Re(s) > 0$.

$$\int_n^{n+1} \frac{(u-n)^2 du}{u^{s+2}} = \left. \frac{1}{2} \frac{(u-n)^2}{u^{s+1}} \right|_n^{n+1} - \frac{(s+1)}{2} \int_n^{n+1} \frac{(u-n) du}{u^{s+2}}$$

$$\zeta(s) - \frac{1}{s-1} = 1 = \frac{s}{2} \left(\zeta(s+1) - 1 \right) - \frac{s(s+1)}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \int_n^{n+1} \frac{(u-n) du}{u^{s+2}}$$



III. Beweis. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s} \rightarrow \sum a_n x^n$

$\Gamma(s) = \int_0^{\infty} e^{-x} x^{s-1} dx$ ist f. $\Re(s) > 0$ regulär

$\Gamma(s+1) = s \Gamma(s)$ Pole 1. Ord. bei $s=0, -1, -2, \dots$

$\Gamma(s) \Gamma(1-s) = \frac{\pi}{\sin s\pi}$

$\frac{1}{n^s} = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{\infty} e^{-nx} x^{s-1} dx$ $s > 0$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s} = \frac{1}{\Gamma(s)} \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_0^{\infty} e^{-nx} x^{s-1} dx$

$= \frac{1}{\Gamma(s)} \sum_n a_n \sum_{k=0}^{\infty} \int_{k+1}^{\infty} e^{-nx} x^{s-1} dx$

in jedem
absoluten
Konvergenz

$s > s_1 > 0$

$= \frac{1}{\Gamma(s)} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_n a_n \int_k^{\infty} e^{-nx} x^{s-1} dx$

$= \frac{1}{\Gamma(s)} \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_0^{\infty} e^{-nx} x^{s-1} dx$

aber
ist konvergent für $x > 0$

$+ \frac{1}{\Gamma(s)} \int_1^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-nx} x^{s-1} dx$

falls $\sum a_n e^{-nx}$
konv. für $|e^{-x}| \leq e^{-1}$

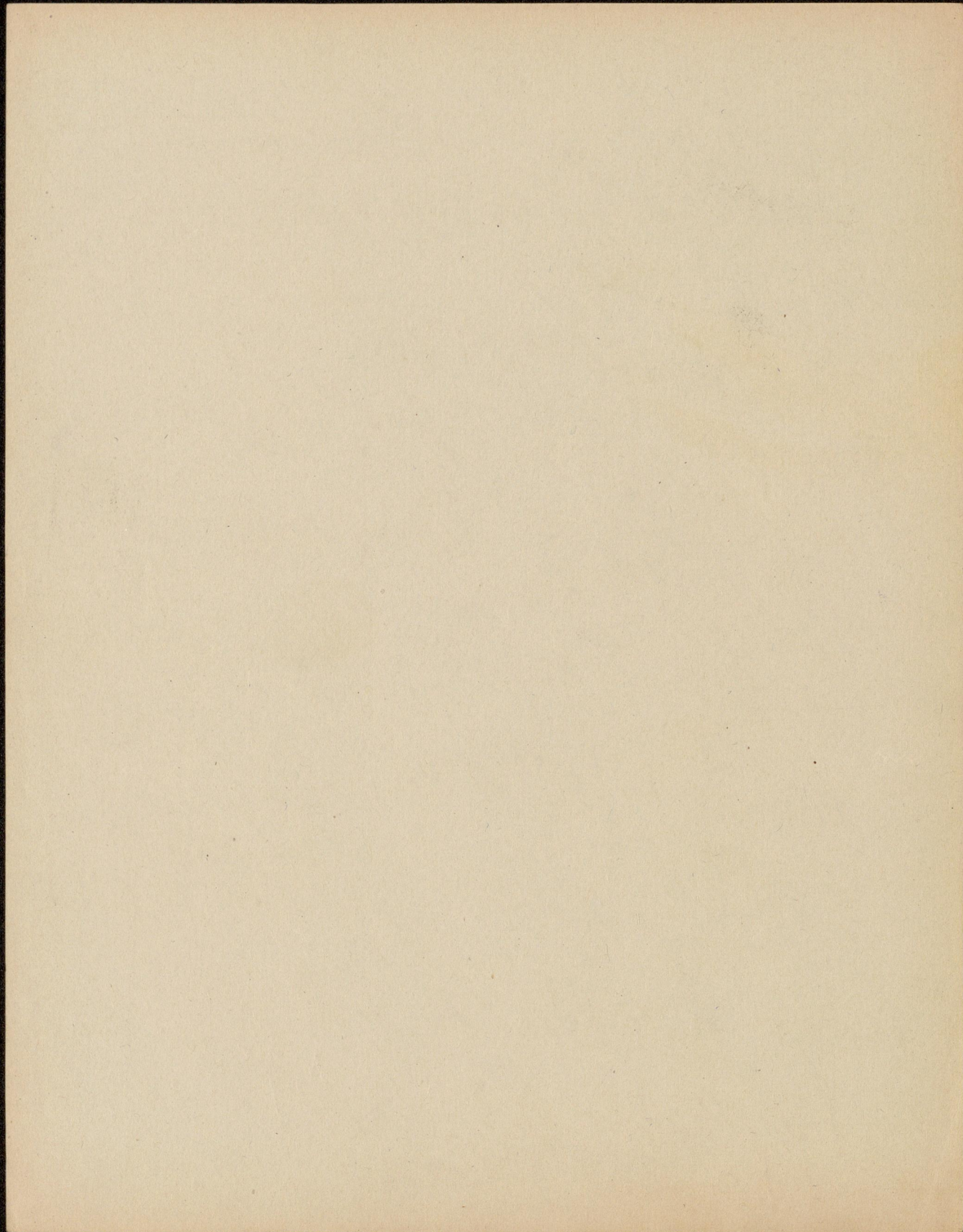
alle $a_n = 1$.

$\zeta(s) \Gamma(s) = \int_1^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-nx}}{1-e^{-x}} x^{s-1} dx + \sum_{n=1}^{\infty} \int_1^{\infty} e^{-nx} x^{s-1} dx$

$\int_0^1 \sum_n = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon}^1 \sum_n \geq \sum_n \int_{\varepsilon}^1$

$\int_{\varepsilon-n\varepsilon}^{\infty} e^{-nx} dx$

$\sum_n q_n(\varepsilon)$



$$\Gamma(s) \zeta(s) = \int_0^{\infty} \frac{e^{-x}}{1-e^{-x}} x^{s-1} dx = \int_0^{\infty} \frac{1}{e^x - 1} x^{s-1} dx$$

$$= \int_0^{\infty} f(x) x^{s-1} dx.$$

25

$x f(x)$ ist regulär für $|x| \leq \alpha$.

$$|f(x)| < \frac{2}{x} e^x \text{ für } x \geq \alpha$$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n x^{n-1}}{\alpha^n}$$

$$\Gamma(s) \zeta(s) = \int_0^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+s-2} dx + \int_{\alpha}^{\infty} f(x) x^{s-1} dx$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} c_n \int_0^{\alpha} x^{n+s-2} dx + g(s) \quad \text{neue Fkt.}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n+s-1} \alpha^{n+s-1} + g(s)$$

$$= \alpha^{s-1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n \alpha^n}{n+s} + g(s)$$

$(s-1) \zeta(s)$ ist eine ganze Funktion; hat Nullstellen bei $s=$

$$f(x) = \frac{1}{e^x - 1}, \quad f(-x) = \frac{1}{e^{-x} - 1} = \frac{e^x}{1 - e^x} = -1 + \frac{1}{1 - e^x} = -1 + f(x)$$

$$f(x) = \sum c_n x^{n-1}$$

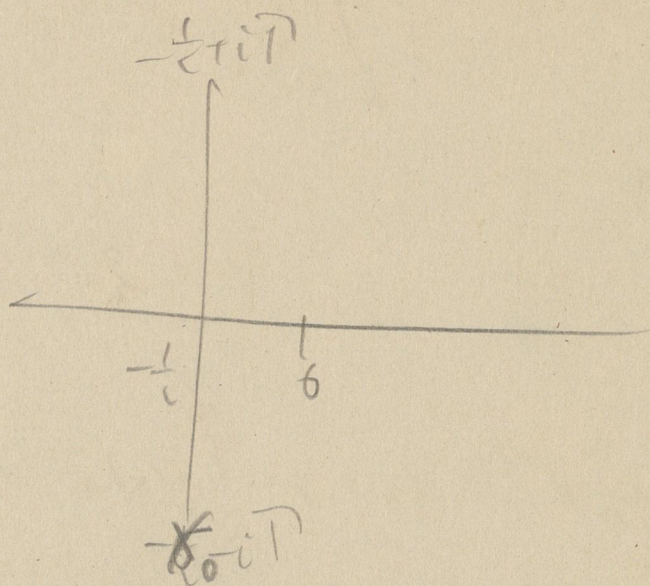
$$f(-x) = \sum (-1)^{n-1} c_n x^{n-1} = -1 - \sum c_n x^{n-1} \quad \left| \begin{array}{l} n=1: c_1 = -1 - c_1 \\ c_1 = -\frac{1}{2} \end{array} \right.$$

$$-c_n = (-1)^{n-1} c_n, \quad c_n = (-1)^n c_n, \quad n \neq 1.$$

$$c_{2k+1} = 0, \quad k=1, 2, \dots$$

$$f(x) = \frac{c_0}{x} - \frac{1}{2} + c_2 x + c_4 x^3 + \dots$$

$$\Gamma(s) \zeta(s) = \left\{ \frac{c_0 \alpha^{s-1}}{s} - \frac{\alpha^{s-1}}{2(s+1)} + \frac{c_2 \alpha^{s+1}}{s+2} + \frac{c_4 \alpha^{s+3}}{s+4} + \dots \right\} \alpha^{s-1} + g(s).$$



$$\begin{aligned}
 & (x_0 + iy)^{5-1+it} \\
 & \quad i\tau \\
 & \int \frac{(x + iT)^{5-1+it} dx}{x_0 + iT \left(e^{\frac{i\tau + x}{*}} - 1 \right)} \\
 & \quad 0 \\
 & \int_{x_0}^{\infty} \frac{dx}{\left(\sqrt{x^2 + T^2} \right)^{1-\sigma} (e^x + 1)}
 \end{aligned}$$

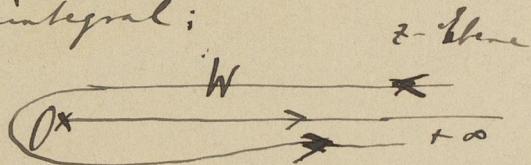
Funktionalgleichung der $\zeta(s)$.

26

1. Riemanns Beweis (1859).

$$P(s)\zeta(s) = q(s) = \int_0^{\infty} \frac{1}{e^z - 1} z^{s-1} dz = \int_0^{\infty} f(z) z^{s-1} dz$$

Schleifenintegral:



$\int_W f(z) z^{s-1} dz$ unabh. von W wegen des Cauchy'schen Satzes; an W

$$z^{s-1} = e^{(s-1) \log z} \quad 0 < \Im(\log z) < 2\pi$$

Für $\Re(s) > 2$ kann man W nach $0 \rightarrow \infty$ zusammenziehen lassen. und

$$\int_W = \int_{\infty}^0 \left(f(z) z^{s-1} \right)_{\underline{I}} dz + \int_0^{\infty} \left(f(z) z^{s-1} \right)_{\underline{II}} dz$$

$$(\)_{\underline{II}} = e^{2\pi i(s-1)} (\)_{\underline{I}}$$

$$\int_W = (e^{2\pi i s} - 1) \int_0^{\infty} f(z) z^{s-1} dz$$

$$q(s) = \frac{1}{e^{2\pi i s} - 1} \int_W f(z) z^{s-1} dz \quad \left| \int_W \text{ ist eine ganze Fkt. von } s. \right.$$

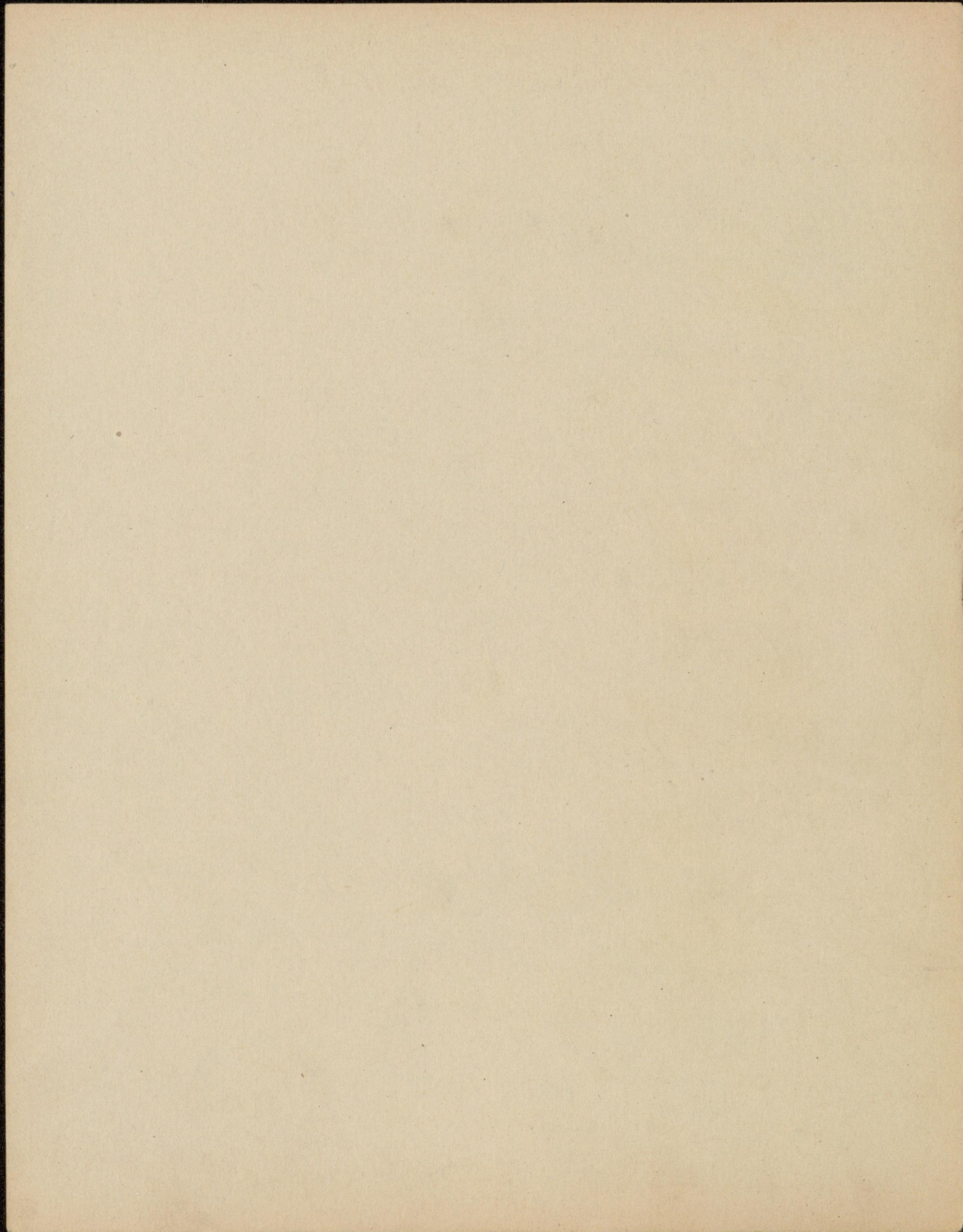
Nenner $\neq 0$, wenn $s = 0, -1, -2, \dots$, also $\zeta(s)$ hier regulär, mit $P(s)$ Pol.

$s=1$: $\int_W = 2\pi i \cdot \text{Res. von } f \text{ bei } z=0$, also $\neq 0$, d.h. $\zeta(s)$ bei $s=1$ Pol 1. Ordnung.

Nun sei $\Re(s) < -1$. Dann ist

$$\int_W = -2\pi i \sum \text{Res. innerhalb.} = -2\pi i \sum_{k=1}^{\infty} (2k\pi i)^{s-1}$$

$$f(z) = \frac{1}{e^z - 1} \quad \left| \quad = -2\pi i \sum_{k=1}^{\infty} (2k\pi)^{s-1} \left(e^{\frac{\pi i}{2}(s-1)} + e^{\frac{3\pi i}{2}(s-1)} \right) \right.$$



$$\begin{aligned}
 \int_W &= -2\pi i e^{\frac{\pi i}{2}(s-1)} (1 - e^{\pi i s}) \zeta(1-s) \cdot (2\pi)^{s-1} \\
 &= -4\pi e^{\frac{\pi i}{2}s} \cos \pi s \zeta(1-s) \\
 &= -(2\pi)^s e^{\frac{\pi i}{2}s} (1 - e^{\pi i s}) \zeta(1-s) \\
 &= (2\pi)^s e^{\frac{\pi i}{2}s} (e^{\pi i s} - 1) \zeta(1-s)
 \end{aligned}$$

$$\Gamma(s) \zeta(s) = (2\pi)^s \frac{e^{\frac{\pi i s}{2}}}{e^{\pi i s} + 1} \zeta(1-s)$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{(2\pi)^s \zeta(1-s)}{2 \cos \frac{\pi s}{2}} = (2\pi)^{s-1} \frac{\pi}{\sin \pi(\frac{1}{2} - \frac{s}{2})} \zeta(1-s) \\
 &= (2\pi)^{s-1} \Gamma\left(\frac{1}{2} + \frac{s}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2} - \frac{s}{2}\right) \zeta(1-s)
 \end{aligned}$$

then in 12

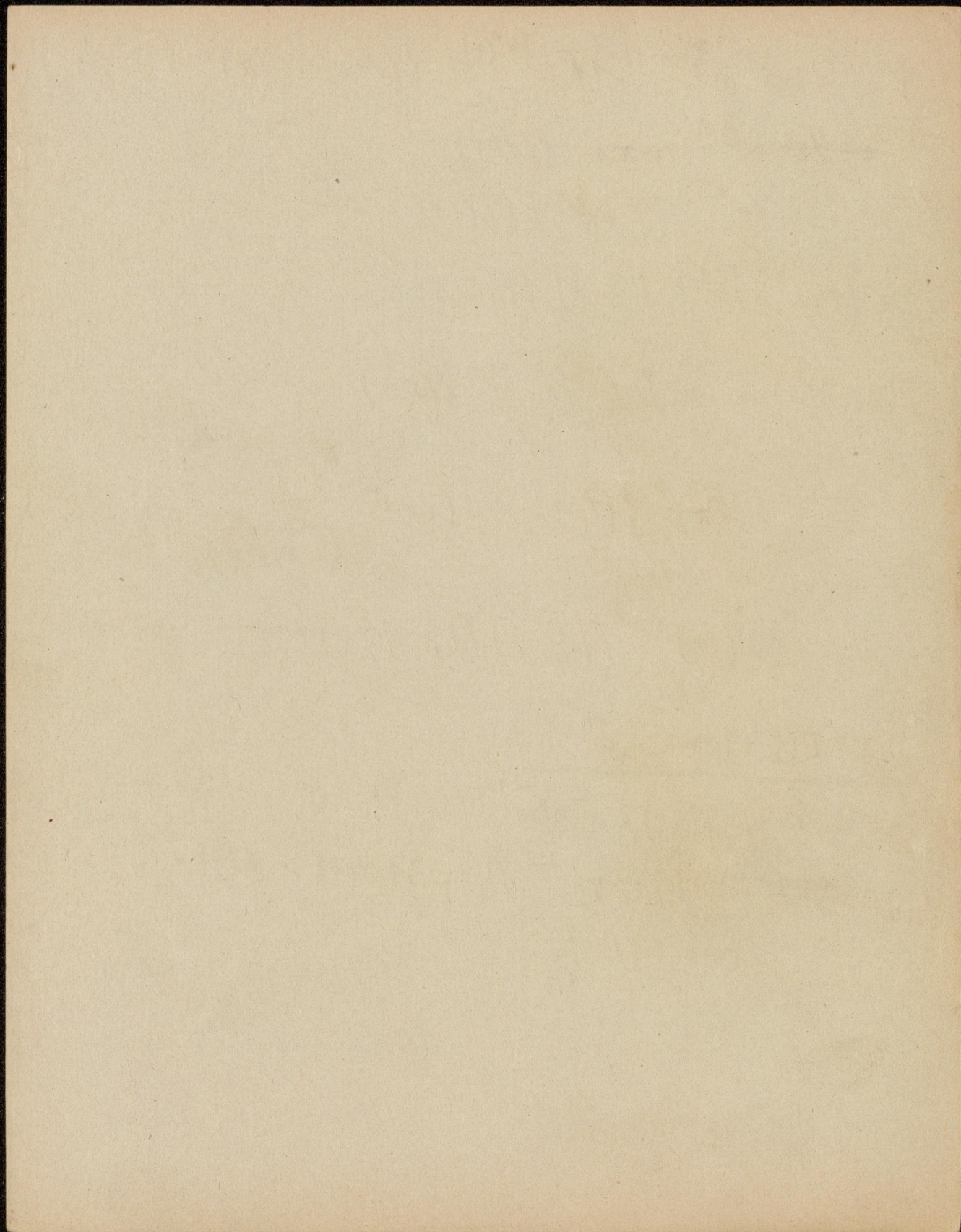
$$\Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \Gamma\left(\frac{s}{2} + \frac{1}{2}\right) = \pi^{\frac{1}{2}} 2^{1-s} \Gamma(s)$$

$$2^{s-1} \pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta(s) = (2\pi)^{s-1} \Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right) \zeta(1-s)$$

$$h(s) = \pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta(s) = \pi^{-\frac{1-s}{2}} \Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right) \zeta(1-s) = h(1-s)$$

$$h(s) = h(1-s)$$

27



II. Riemannsche Beweis für die Funktionalgleichung,

128

$$\frac{\pi^{-\frac{1}{2}} \Gamma(\frac{1}{2})}{n^{\frac{1}{2}}} = \int_0^{\infty} e^{-n^2 x \pi} x^{\frac{1}{2}-1} dx$$

$$h(s) = \pi^{-\frac{1}{2}} \Gamma(\frac{1}{2}) \zeta(s) = \int_0^{\infty} \left(\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi n^2 x} \right) x^{\frac{s}{2}-1} dx.$$

$$\vartheta(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-\pi n^2 x}$$

$$\vartheta(u; x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-\pi (n+u)^2 x}$$

$$\vartheta(u+1) = \vartheta(u) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{2\pi i k u}$$

$$a_k = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi u^2 x - 2\pi i k u} du = \frac{1}{\sqrt{\pi x}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2 - \frac{24\pi i k u}{\sqrt{x}}} du$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi x}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(u + k\sqrt{\frac{\pi}{x}} i)^2} du \cdot e^{-\frac{\pi k^2}{x}}$$

$$= \frac{e^{-\frac{\pi k^2}{x}}}{\sqrt{\pi x}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2} du = \frac{e^{-\frac{\pi k^2}{x}}}{\sqrt{x}}$$

$$\vartheta(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \vartheta\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$h(s) = \frac{1}{2} \int_0^1 (\vartheta(x) - 1) x^{\frac{s}{2}-1} dx + \frac{1}{2} \int_1^{\infty} (\vartheta(x) - 1) x^{\frac{s}{2}-1} dx$$

$$= \frac{1}{2} \int_1^{\infty} \left(\vartheta\left(\frac{1}{x}\right) - 1 \right) x^{-\frac{s}{2}-1} dx + \dots = \frac{1}{2} \int_1^{\infty} \left(\vartheta\left(\frac{1}{x}\right) - 1 \right) x^{\frac{1-s}{2}-1} dx + \frac{1}{2} \int_1^{\infty} (\vartheta(x) - 1) x^{\frac{s}{2}-1} dx$$

$$* = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{s} = \frac{1}{s(1-s)} = \frac{-1}{s(1-s)} + \frac{1}{2} \int_1^{\infty} (\vartheta(x) - 1) \left(x^{\frac{s}{2}} + x^{\frac{1-s}{2}} \right) \frac{dx}{x}$$

$$f(x) \cdot f(u) \cdot \frac{f(x)}{f(u)}$$

$$\int_k^\infty e^{-x} dx = \int_k^1 + \int_1^\infty e^{-x} dx$$

$$e^{-k} = e^{-x} \left(\frac{x}{k} - 1 \right)$$

$$\int_0^\infty e^{-x} dx$$

$\Gamma(s)$ und $\xi(s)$ in einer Vertikalstreife.

29

Für $\Gamma(s)$ gilt

$$\lim_{|A| \rightarrow \infty} \frac{\Gamma(\sigma + iA)}{e^{-\frac{\pi}{2}|A|} |A|^{\sigma - \frac{1}{2}}} = \sqrt{2\pi} \quad \text{gleichmäßig für } \sigma_1 \leq \sigma \leq \sigma_2$$

$$\Gamma(\sigma + iA) = O\left(e^{-\frac{\pi}{2}|A|} |A|^{\sigma - \frac{1}{2}}\right)$$

Für $\sigma \rightarrow 0$

In jeder Vertikalstreife und $|A| \geq 1$ ist $|h(s)|$ gleichmäßig beschränkt

$$\text{also } \xi(s) = h(s) \pi^{\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right)^{-1} = O\left(e^{\pi|A|}\right) \text{ gleichmäßig}$$

$$\text{Für } \sigma \geq 1 + \varepsilon \text{ ist } \xi(s) = O(1).$$

Für $\sigma \leq -\varepsilon$ ist

$$\xi(\sigma + iA) = h(1-s) \pi^{\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right)^{-1}$$

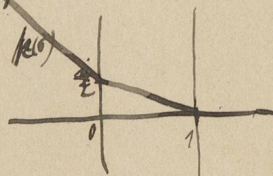
$$= \xi(1-\sigma-iA) \frac{\Gamma\left(\frac{1-\sigma-iA}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\sigma+iA}{2}\right)} O(1) = O\left(e^{-\frac{\pi}{2}|A|} |A|^{\frac{1-\sigma}{2} - \frac{s}{2}}\right) = O(|A|^{\frac{1}{2}-\sigma})$$

$$\xi(-\varepsilon + iA) = O(|A|^{\frac{1}{2} + \varepsilon})$$

$$\xi(1+\varepsilon + iA) = O(|A|), \quad \text{Aber nach Phragmén-Lindelöf:}$$

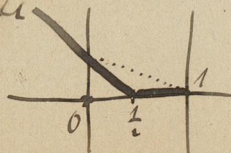
$$\xi(\sigma + iA) = O(|A|^{k(\sigma)})$$

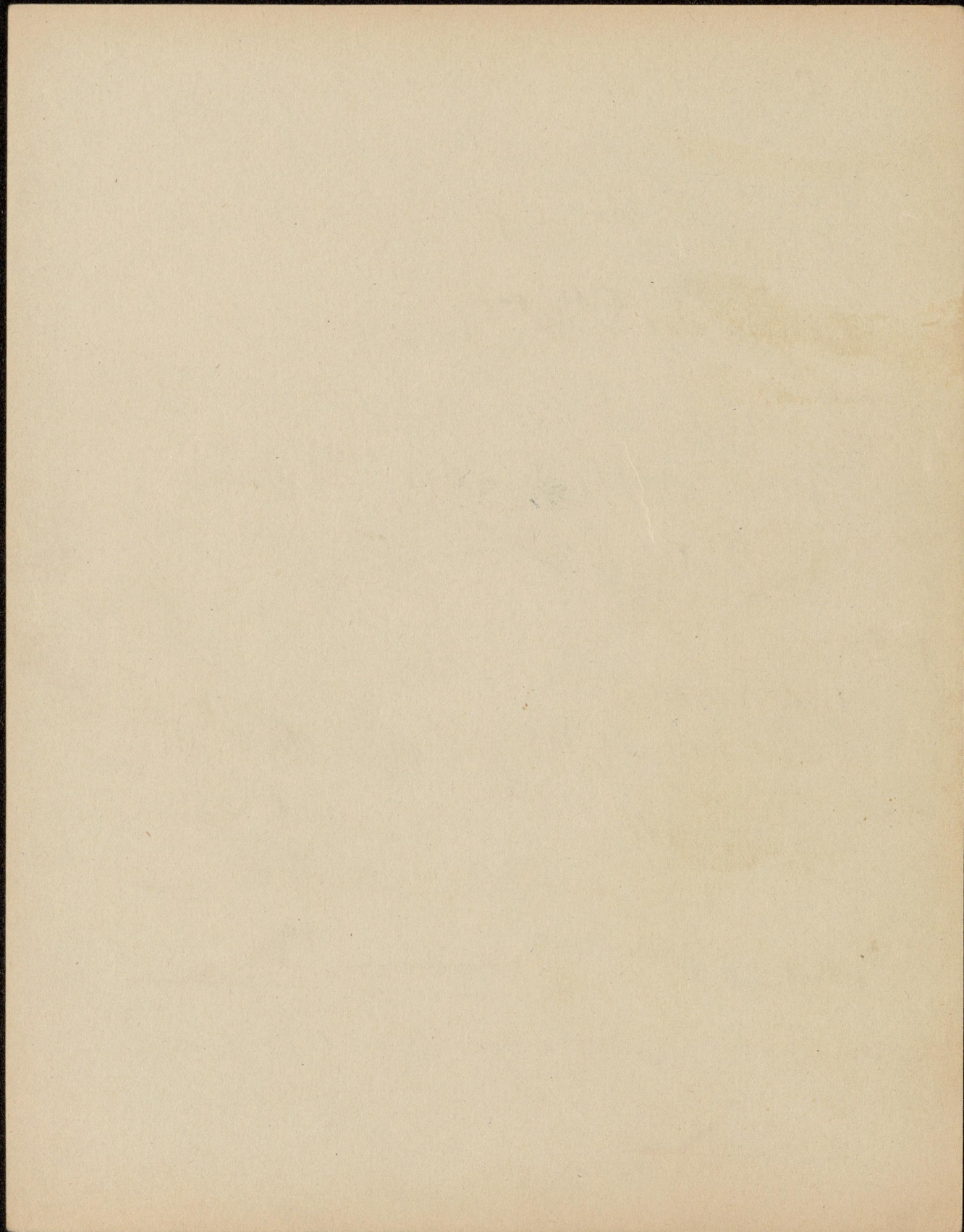
$$-\varepsilon \leq \sigma \leq 1+\varepsilon, \quad k(\sigma) = \frac{1}{2} + \varepsilon$$



Lilienthal hat bewiesen 1912, dass man $\xi(s) \neq 0$ für $\sigma > \frac{1}{2}$, da

$\mu(\sigma)$ so aussieht





Primzahlverteilung und Nullstellen.

130

Sei $\frac{1}{2} < \alpha < 1$ und $\sum_{p \leq x} \frac{1}{p} \neq 0$ für $\sigma > \alpha$, dann ist

$$\pi(x) = \int_2^x \frac{ds}{\log s} + O(x^{\alpha+\varepsilon}) \text{ für jedes } \varepsilon > 0.$$

$$\varphi(s) = \sum_p \frac{1}{p^s}$$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{2-i\omega}^{2+i\omega} \varphi(s) \sum_{p \leq x} \frac{x^s}{s} ds = \sum_{p \leq x} 1 + \cancel{\text{Term}} + F$$

$$|F| < \frac{2x^2}{\omega} \sum_p \frac{1}{p^2} \frac{1}{|\log \frac{x}{p}|} < \frac{2x^2}{\omega} \frac{1}{\log \left| \frac{x}{x+\frac{1}{2}} \right|} \sum \frac{1}{p^2} = O\left(\frac{x^3}{\omega}\right)$$

$$x = \text{große Zahl} + \frac{1}{2} \\ \omega = \omega(x)$$

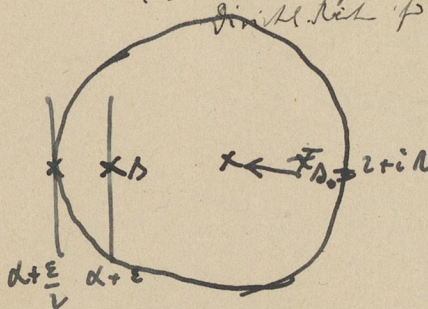
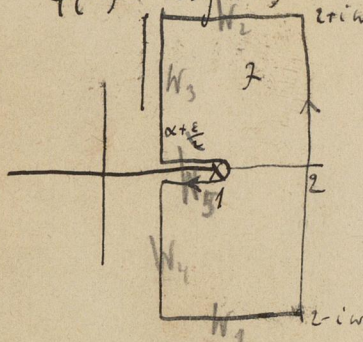
$$\frac{x-p}{p} + 1$$

$$x = p + \frac{1}{2}$$

$$1 + \frac{1}{p}$$

$$\varphi(s) = \log f(s) + g(s)$$

$$g(s) = \text{absolut konvergent für } \sigma > \frac{1}{2}$$



$$\varphi(s) = 2 \log s + f(s)$$

$$|f(s)| < \delta |A|^k \text{ auf } W_1, W_2, W_3, W_4.$$

$$f(s) = \log f(s). \quad R = 2 - (\alpha + \frac{\varepsilon}{2}) \quad |s - \rho| = 2 - (\alpha + \varepsilon) \quad R f(s) < k \log |A|$$

$$|R f(s)| = |\log f(s)| < |f(2 + i\omega)| + 2 \cdot 2 \frac{k \log A + |f(2 + i\omega)|}{\frac{\varepsilon}{2}} = O(\log A)$$

$$A = \left(-\cos \frac{\pi}{m+2}\right) \text{ Form.}$$

$$m+2 = 23$$

n Punkte

Wertigkeit $m+2$



FB $\forall u_i \geq 0$

3. Krid. Spiegelungen.

$u = 4$ / weitere
 6
 7
 8

$$\left| \int_{W_3} \right| < A x^{\alpha+\varepsilon} \int_0^{\omega} \frac{\log t}{|t+i\omega|} dt = O(x^{\alpha+\varepsilon} \log^2 \omega)$$

$$\left| \int_{W_4} \right| = O(x^{\alpha+\varepsilon} \log^2 \omega)$$

$$\left| \int_{W_1} \right| < A \log x \int_{\alpha+\varepsilon+\eta}^2 \frac{x^{\sigma} d\sigma}{|\sigma+i\omega|} < A \frac{x^2}{\omega} \log \omega = O\left(\frac{x^2}{\omega} \log \omega\right)$$

$$\left| \int_{W_2} \right| = O\left(\frac{x^2}{\omega} \log \omega\right)$$

$$\begin{aligned} \oint_{W_5} &= 2\pi i \int_{\frac{x^{\alpha+\varepsilon}}{x^{\frac{1}{2}}}}^1 \frac{x^{\sigma} d\sigma}{\sigma} = 2\pi i \int_{\frac{(\alpha+\varepsilon)\log x}{\log x}}^{\log x} \frac{e^{\sigma} d\sigma}{\sigma} = 2\pi i \int_{x^{\alpha+\varepsilon}}^x \frac{du}{\log u} \\ &= 2\pi i \int_2^x \frac{du}{\log u} + O\left(\int_2^{\frac{x^{\alpha+\varepsilon}}{x^{\frac{1}{2}}}} \frac{du}{\log u}\right) = 2\pi i \int_2^x \frac{du}{\log u} + O(x^{\alpha+\varepsilon}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \pi(x) &= \int_2^x \frac{du}{\log u} + O(x^{\alpha+\varepsilon}) + O\left(\frac{x^3}{\omega}\right) + O\left(\frac{x^2}{\omega} \log \omega\right) \\ &= \text{---} + O(x^{\alpha+\varepsilon}) \quad (\omega = x^3) \end{aligned}$$

$$\sum_{p \leq x} \log p = \sum_{n \leq x} \log n \left(\pi(n) - \pi(n-1) \right)$$

$$= \sum_{n \leq x} \pi(n) (\log n - \log(n-1)) \quad \sum_{n \leq x} O(n^{\alpha+\varepsilon-1})$$

$$= \sum_{n=2}^x \log n \int_{n-1}^n \frac{dx}{\log x} + \sum_{n \leq x} \log n O(n^{\alpha+\varepsilon}) (\log n - \log(n-1)) + O(\log x x^{\alpha+\varepsilon})$$

$$= \sum_{n=2}^{x-1} \log(n+1) \int_n^{n+1} \frac{dx}{\log x} + O(x^{\alpha+\varepsilon} \log x)$$

$$= \int_0^1 \sum_{n=2}^{x-1} \frac{\log(n+1)}{\log(n+e^{-t})} dx = \int_0^1 dx \sum_{n=2}^{x-1} \frac{\log n + O(\frac{1}{n})}{\log n + O(\frac{1}{n})}$$

$$= \int_0^1 \left(1 + O\left(\frac{1}{n \log n}\right) \right) dx = x + O(\log \log x) + O(x^{\alpha+\varepsilon})$$

$$\sum_{p \leq x} \log p = x + O(x^{\alpha+\varepsilon} \log x)$$

$$\sum_{p \leq x} \log p = x + O(x^{\alpha+\varepsilon+1})$$

$\xi(s)$ hat auf $\sigma=1$ keine Nullstellen.

Beweis von de la Vallée Poussin:

$$\sigma > 1. \quad \log \xi(\sigma + iA) = \sum_{m, p} \frac{p^{-i m A}}{m p^{m \sigma}}$$

$$|\xi(\sigma + iA)| = e^{\sum_{m, p} \frac{\cos(mA \log p)}{m p^{m \sigma}}}$$

$$3 + 4 \cos \alpha + \cos 2\alpha = 2(1 + \cos \alpha)^2 \geq 0.$$

$$|\xi(\sigma + iA)|^3 |\xi(\sigma + iA)|^4 |\xi(\sigma + 2iA)| \geq 1$$

$$\sigma = 1 + \varepsilon$$

$$|\xi(1 + \varepsilon)|^3 |\xi(1 + \varepsilon + iA)|^4 |\xi(1 + \varepsilon + 2iA)| \geq 1$$

$$\text{Also } \xi(1 + \varepsilon) \neq 0.$$

$$1 < (s-1)\xi(s) < 10$$

$$|\xi(1 + \varepsilon)| < \frac{2}{\varepsilon}$$

$$|\xi(1 + \varepsilon + iA)|^4 \geq \frac{\varepsilon^3}{8 |\xi(1 + \varepsilon + 2iA)|} \geq \frac{c \varepsilon^3}{|A|^{4/k}}$$

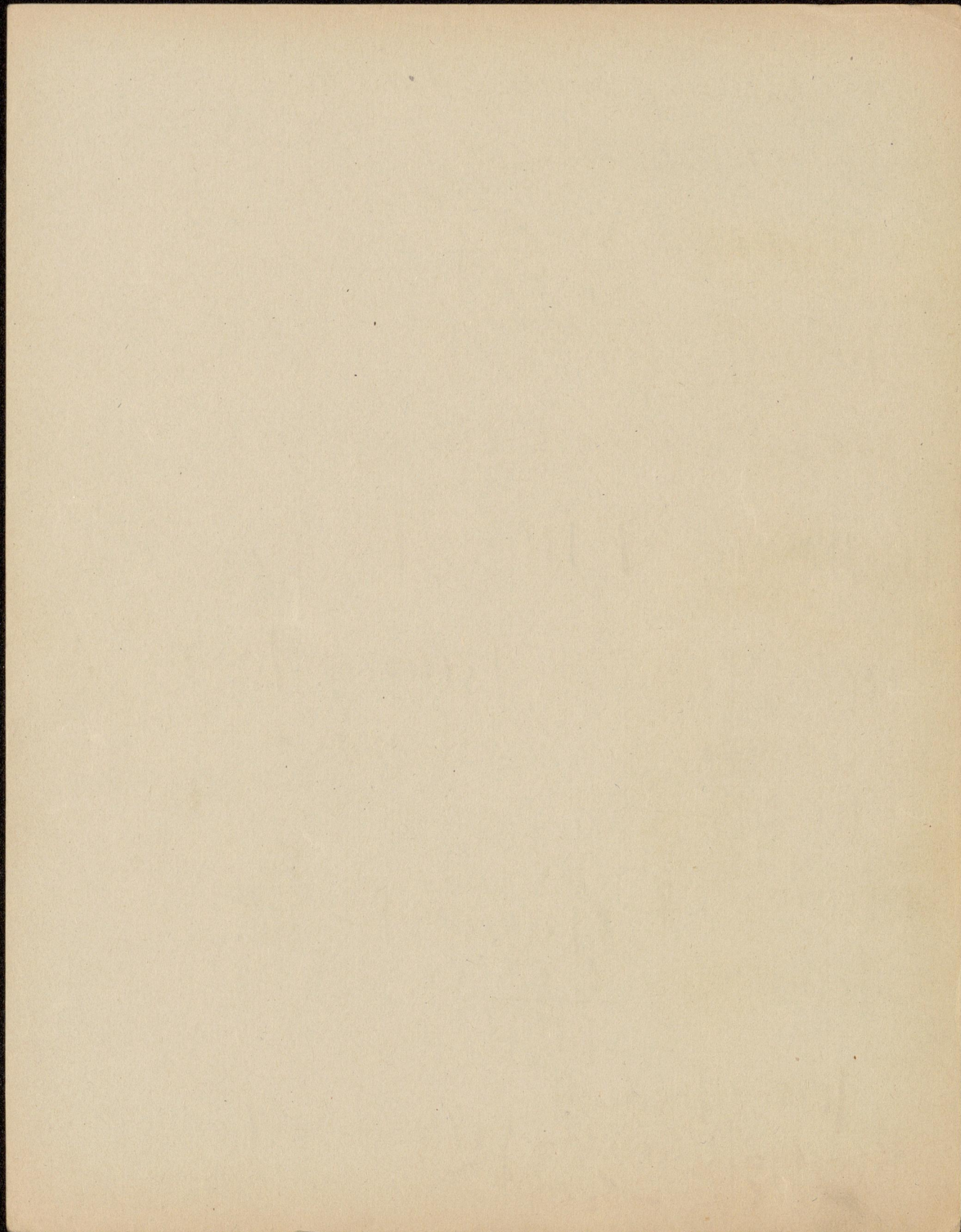
$$|\xi(1 + \varepsilon + iA)| \geq \frac{c_1 \varepsilon^{3/4}}{|A|^{4/k}}$$

$$|\xi'(1 + iA)| < c_2 |A|^{4/k} \varepsilon$$

$$|\xi(1 + iA)| = \left| \xi(1 + \varepsilon + iA) - \int_0^\varepsilon \xi'(1 + \sigma + iA) d\sigma \right|$$

$$\geq c_1 \frac{\varepsilon^{3/4}}{|A|^{4/k}} - c_2 \varepsilon |A|^{4/k}$$

$$\delta \quad \xi'(1 + it) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma - s}^{\sigma + s} \frac{\xi(\sigma)}{\sigma - (1 + it)} d\sigma$$



33

$$|\xi(1+iA)| \geq \varepsilon^{\frac{3}{4}} \left(\frac{C_1}{A^k} - C_2 \varepsilon^{\frac{1}{4}} A^{4k} \right)$$

$$C_2 \varepsilon^{\frac{1}{4}} A^{4k} = \frac{1}{2} \frac{C_1}{A^k}$$

$$\varepsilon^{\frac{1}{4}} = \frac{C_1}{2C_2} \frac{1}{A^{5k}} > 0.$$

$$|\xi(1+iA)| \geq C_3 \frac{1}{A^{15k}} \frac{1}{A^k}$$

$$\left| \frac{1}{\xi(1+iA)} \right| = O(A^{16k})$$

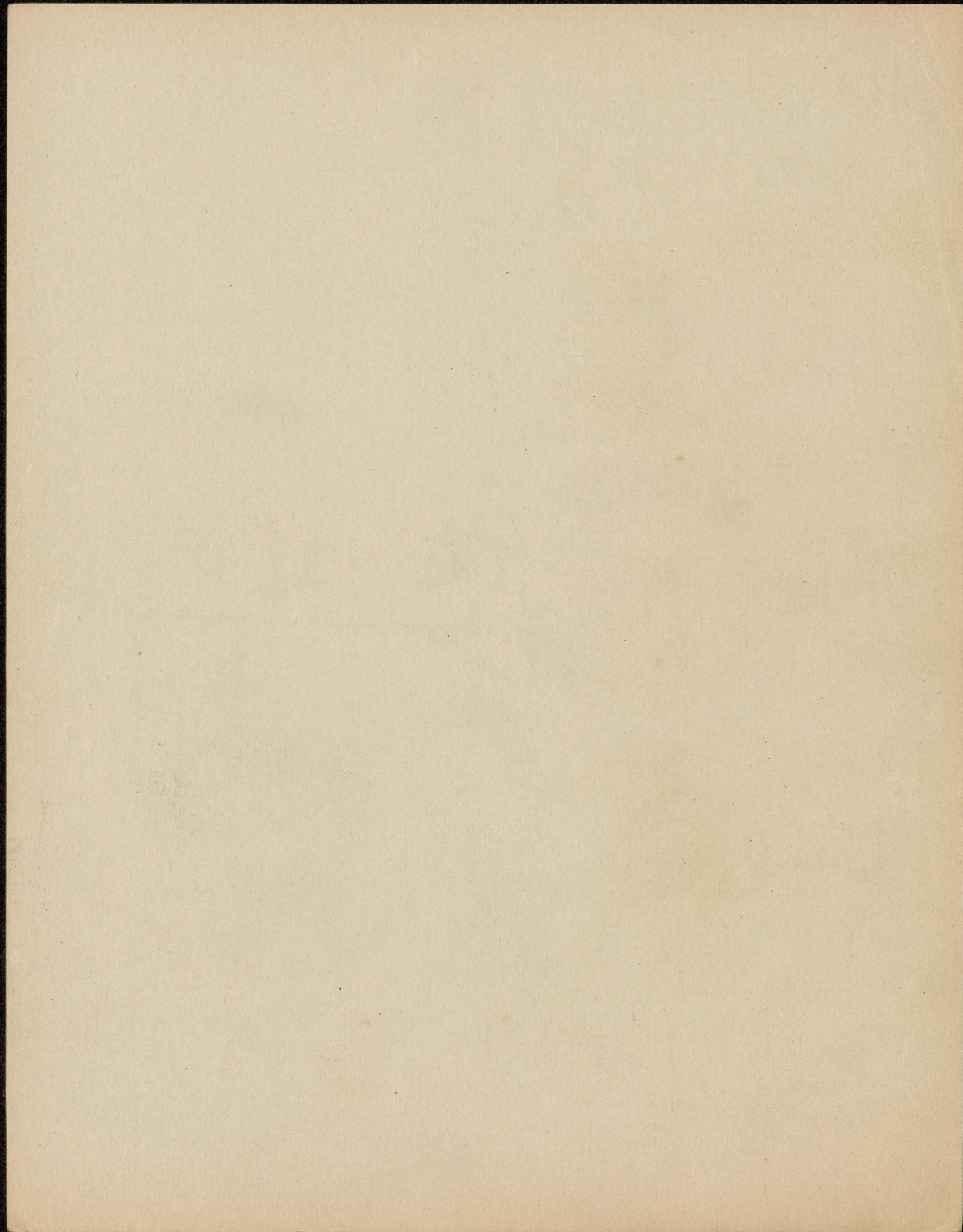
~~$$\begin{aligned} |\xi(1+\varepsilon+iA)| &= \left| \xi(1+iA) - \int_0^\varepsilon \xi'(A+\sigma+iA) d\sigma \right| \\ &\geq \frac{C_3}{A^{16k}} - \varepsilon C_2 A^{4k} \end{aligned}$$~~

Für das Folgende reicht weiter aus

$$\left| \frac{1}{\xi(1+\varepsilon+iA)} \right| \leq \frac{A A^k}{\varepsilon^{\frac{3}{4}}} \quad \varepsilon > 0.$$

$$\left| \frac{\xi'(1+\varepsilon+iA)}{\xi(1+\varepsilon+iA)} \right| \leq \frac{B}{\varepsilon^{\frac{3}{4}}} A^{k_0}$$

$$\left| \frac{\xi'(1+iA)}{\xi(1+iA)} \right| = O(A^{k_0})$$



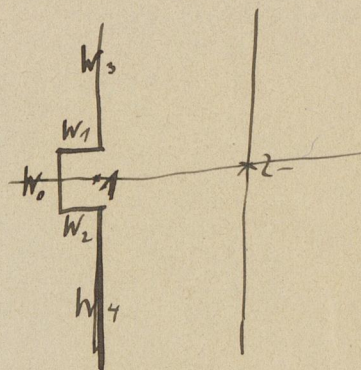
$$-(\log \xi(s))' = -\frac{\xi'(s)}{\xi(s)} = \sum_{p \leq x} \frac{\log p}{p} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s} = \varphi(s) \quad (a_n \geq 0)$$

Sei v eine ganze Zahl $\geq k_0 + 2$ | $|\varphi(1+\varepsilon+i\Lambda)| \leq \frac{BA^{k_0}}{\varepsilon^{\frac{3}{2}}}$ 134

$$\int_{L-i\infty}^{L+i\infty} \frac{x^s}{s^v} \varphi(s) ds = \frac{(2\pi i)^v}{(v-1)!} \sum_{n \leq x} a_n \left(\log \frac{x}{n}\right)^{v-1}$$

$$\int_{L-i\infty}^{L+i\infty} = \int_{L-i\infty}^{L+i\infty} + 2\pi i x$$

$$\int_{W_1} = \int_{1-\delta}^1 \dots d\sigma < \oint_{1-\delta}^1 x^{\sigma} d\sigma < \frac{6x}{\log x}$$



$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \int_{W_1, 2, 0}^{\infty} = 0.$$

Beh. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \int_{A_0}^{\infty} \frac{x^{1+i\Lambda}}{(1+i\Lambda)^v} \varphi(1+i\Lambda) d\Lambda = 0.$

$$\int_1^{\infty} e^{2\pi i y t} \psi(t) dt \rightarrow 0 \text{ für } y \rightarrow \infty, \text{ wenn } \psi(t) \text{ absolut integrierbar und stetig}$$

$$\vartheta(x) = \sum_{p \leq x} \log p$$

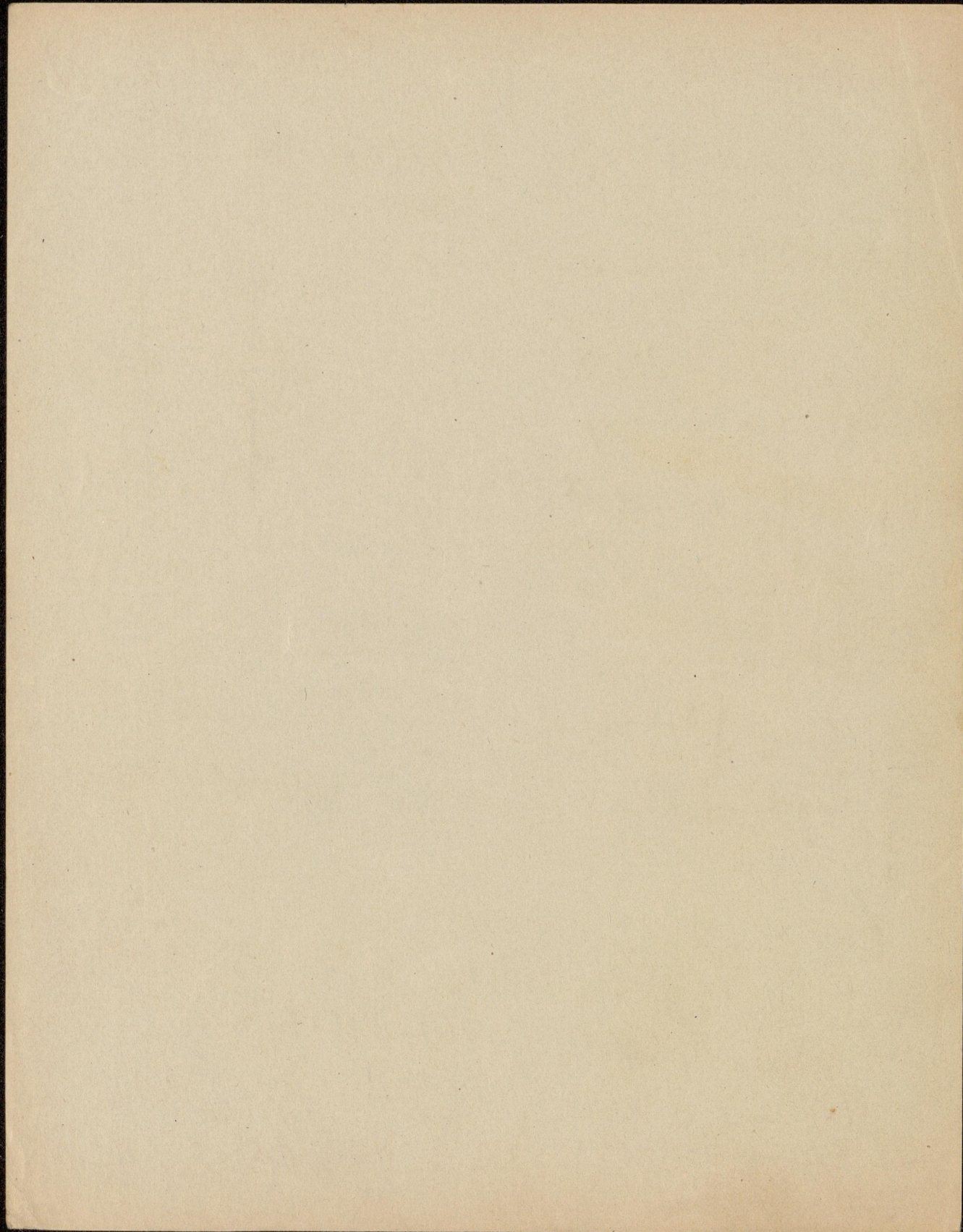
$$\sum_{n \leq x} a_n = \vartheta(x) + \vartheta(\sqrt{x}) + \vartheta(\sqrt[3]{x}) + \dots - \vartheta(\sqrt[2m]{x})$$

$$= \vartheta(x) + O(m \sqrt{x} \log x) = \vartheta(x) + O(\sqrt{x} \log^2 x)$$

$$\frac{\vartheta(x)}{x} \rightarrow 1, \quad \pi(x) = \sum_{n=2}^x \frac{\vartheta(n) - \vartheta(n-1)}{\log n} = -\frac{\vartheta(1)}{\log 2} + \sum_{n=2}^x \vartheta(n) \left(\frac{1}{\log n} - \frac{1}{\log(n+1)} \right)$$

$$\frac{\pi(x) \log x}{x} = \frac{\vartheta(x)}{x} + O\left(\frac{1}{\log x}\right) \rightarrow 1, \quad + \frac{\vartheta(x)}{\log x} = \frac{\vartheta(x)}{\log x} + O\left(\sum_{n=2}^x \frac{1}{\log^2 n}\right) = \frac{\vartheta(x)}{\log x} + O\left(\frac{x}{\log^2 x}\right)$$

$$\frac{m}{Vx} \approx 2, \quad \frac{1}{m} \log x \approx \log 2, \quad m \approx \frac{\log x}{\log 2}$$



Die ~~ersten~~ ^{Existenz} der Nullstellen in kritischen Streife [35]

$$\pi^{-\frac{1}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta(s) \cdot s(1-s) = \psi(s)$$

$\psi(s)$ ist eine ganze Funktion, hat $\psi(s) = \psi(1-s)$ und ergibt für $a > 0$,

$$|\psi(s)| < e^{a|s| \log |s|} \quad \text{für alle } |s| \geq \pi.$$

$$\psi(s) = -1 + s \binom{s-1}{1-1} \int_1^\infty \underbrace{\left(\frac{\vartheta(x)-1}{2}\right) \left(x^{\frac{s}{2}} + x^{\frac{1-s}{2}}\right) \frac{dx}{x}}$$

$\sigma > 0$

$$\left| \int_1^\infty \right| < 2 \int_1^\infty (\vartheta(x)-1) x^{\frac{\sigma}{2}} \frac{dx}{x}$$

$$< 2 \int_1^u + 2 \int_u^\infty$$

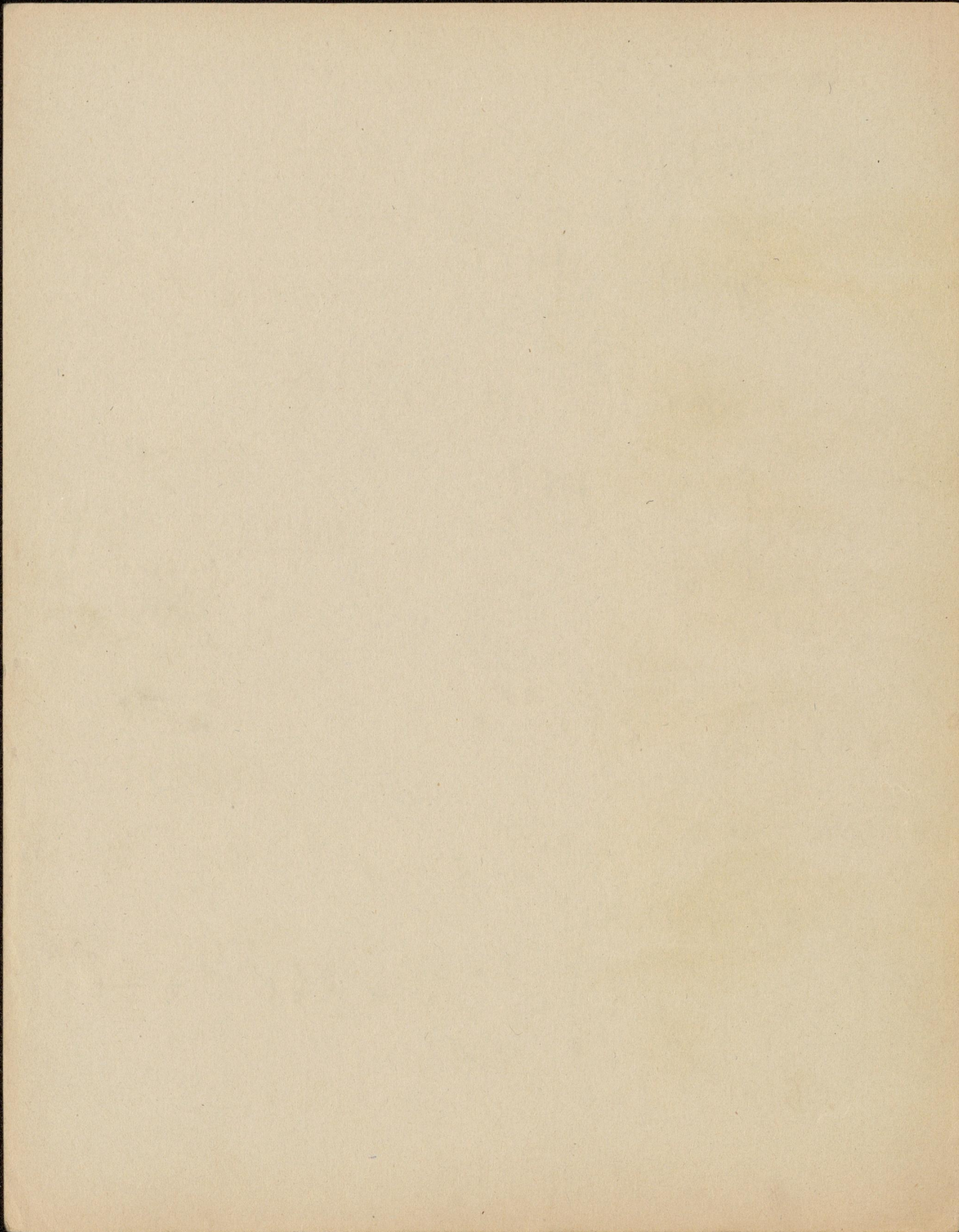
$$< 2 \int_1^u x^{\frac{\sigma}{2}} \frac{dx}{x} + 2 \int_u^\infty e^{-\pi x} x^{\frac{\sigma}{2}} \frac{dx}{x}$$

$$\begin{aligned} \frac{\vartheta(x)-1}{2} &= \sum_{n=1}^\infty e^{-\pi n^2 x} \\ &< \sum_{n=1}^\infty e^{-\pi n x} \\ &< \frac{e}{1-e^{-\pi x}} < 2e^{-\pi x} \quad (x > 1) \\ &\quad \times e^{\frac{\pi}{2} x} \\ &\quad \times \log x < \frac{\pi}{2} x \end{aligned}$$

Man wähle $u \geq \sigma^2$

Für $x \geq u = \sigma^2$, ist $x^{\frac{\sigma}{2}} < e^{\frac{\pi}{2} x}$, denn das heißt $\sigma < \frac{2\pi x}{\log x}$. Wg. $\sigma \leq \sqrt{x}$ ist diese Ungl. erfüllt. Also

$$\begin{aligned} \left| \int_1^\infty \right| &< \frac{2\sigma}{\sigma} |\sigma|^{2\sigma} + 2 \int_\sigma^\infty e^{-\frac{\pi}{2} x} dx < 2\sigma e^{2\sigma \log \sigma} + \frac{2}{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{\pi}{2} \sigma} \\ &= O(e^{2\sigma \log \sigma}) = O(e^{2|s| \log |s|}) \end{aligned}$$



$\psi(s)$ ist keine rationale Funktion. Se für positive $\sigma (\Rightarrow +\infty)$ ist

$$\begin{aligned} -\psi(\sigma) &> -1 + \sigma(\sigma-1) \int_0^{\infty} e^{-\pi x} \left(x^{\frac{\sigma}{2}} \frac{dx}{x} \right) \\ &> -1 + \sigma(\sigma-1) e^{-\pi \sigma} \int_0^{\infty} x^{\frac{\sigma}{2}} \frac{dx}{x} \\ &> -1 + 2(\sigma-1) e^{-\pi \sigma} \frac{1}{\sigma^{\frac{1}{2}}} \sqrt{\pi} \\ &> -1 + 2(\sigma-1) e^{-\pi \sigma + \frac{\sigma}{2} \ln \sigma} \\ |\psi(\sigma)| &> e^{\frac{\sigma}{2} \ln \sigma} \quad \text{für} \quad \frac{\ln \sigma}{2} - \pi > 4 \end{aligned}$$

Nadamerdante Theorie der ganzen konvergenten Funktion

Aus dem Wachstum der Funktion ableitet man auf die Stetigkeit der Nullstellen und die Exponentialgrößen in der Weierstrass-Produktentwicklung;

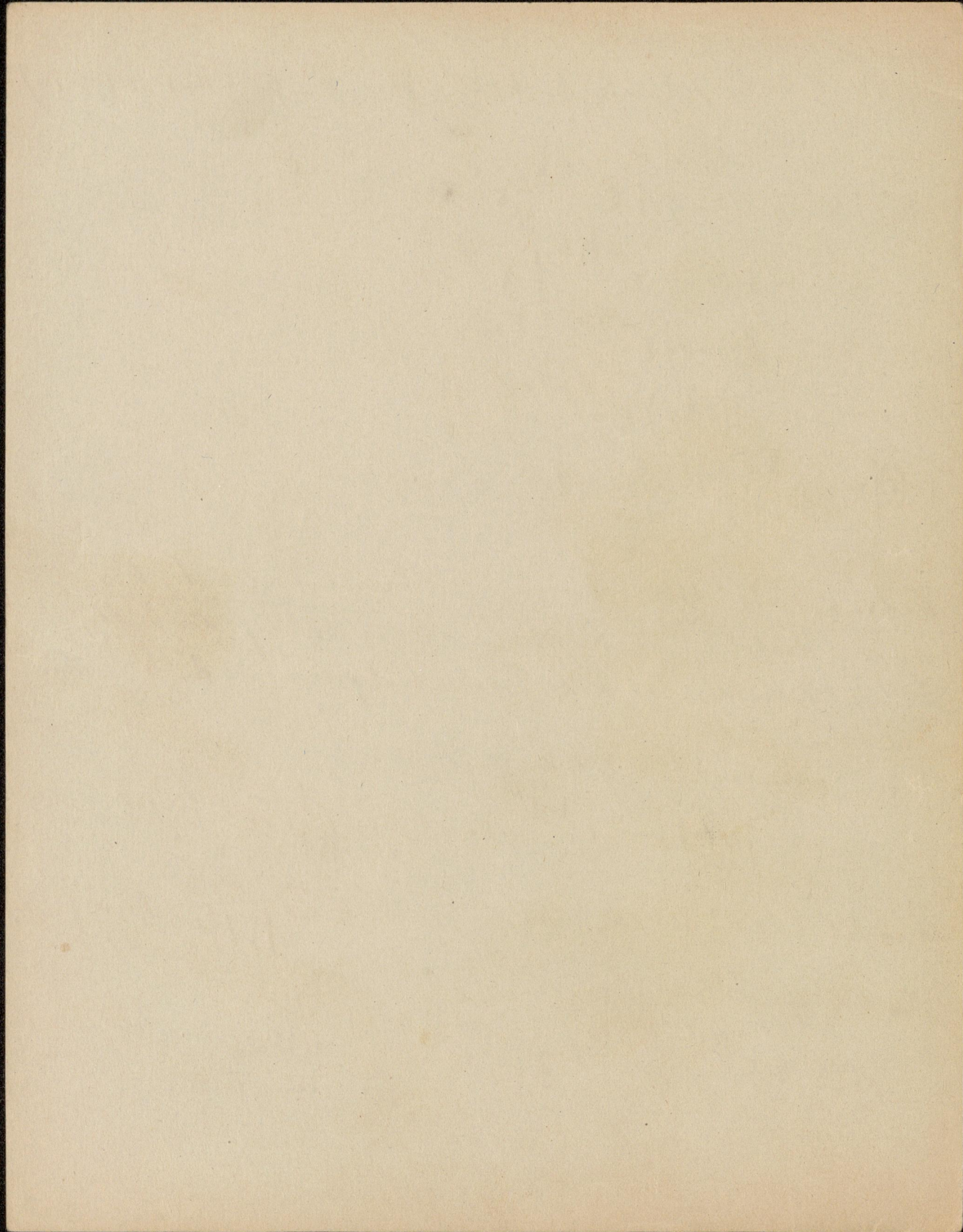
Wenn ρ die Nullst. von $\psi(z)$ durchläuft, und

$$|\psi(z)| < e^{|z|^k}, \quad \text{so ist} \quad \sum_{\rho \neq 0} \frac{1}{|\rho|^{k+\varepsilon}} \quad \text{für jedes } \varepsilon > 0 \quad \text{konvergent.}$$

Also ist für die Nullst. der $\psi(z)$ - Reihe: $\sum \frac{1}{|\rho|^{1+\varepsilon}}$ konv. für alle $\varepsilon > 0$.

Also hat $\psi(z)$ die Form

$$\psi(z) = e^{g(z)} \prod_{\rho} \left\{ \left(1 - \frac{z}{\rho} \right) e^{\frac{z}{\rho}} \right\} \quad \begin{array}{l} g(z) \text{ eine} \\ \text{ganze Funktion} \end{array} \quad (\psi(0) \neq 0).$$



Satz: $\psi(s)$ hat unendl. viele Nullstellen

Wäre $\psi(s) = e^{g(s)} R(s)$, $R(s)$ ein ganz rationales Fkt.

so wäre

$$|\psi(s)| \leq e^{K g(s)} |R(s)|$$

$$K g(s) + \log R(s) \leq \alpha |s| \log |s|$$

$$K g(s) < |s|^{1+\delta} \quad \delta < \frac{1}{10}$$

Aus dem Satze von Littlewood folgt also

~~$$K A$$~~

$$|g(s) - g(0)| \leq \frac{2(r^{1+\delta} - K(g(0)))}{r - |s|} |s| \quad \text{für } |s| < r$$

d.h. $|g(s) - g(0)| \leq r^{1+2\delta} \quad |s| \leq \frac{r}{2}$

$$|g(s) - g(0)| \leq e^{1+2\delta} r^{1+2\delta} \quad |s| = r.$$

also $g(s)$ ein Polynom vom Grade < 2 , d.h. $g(s) = A + B s$ ($A=0$).

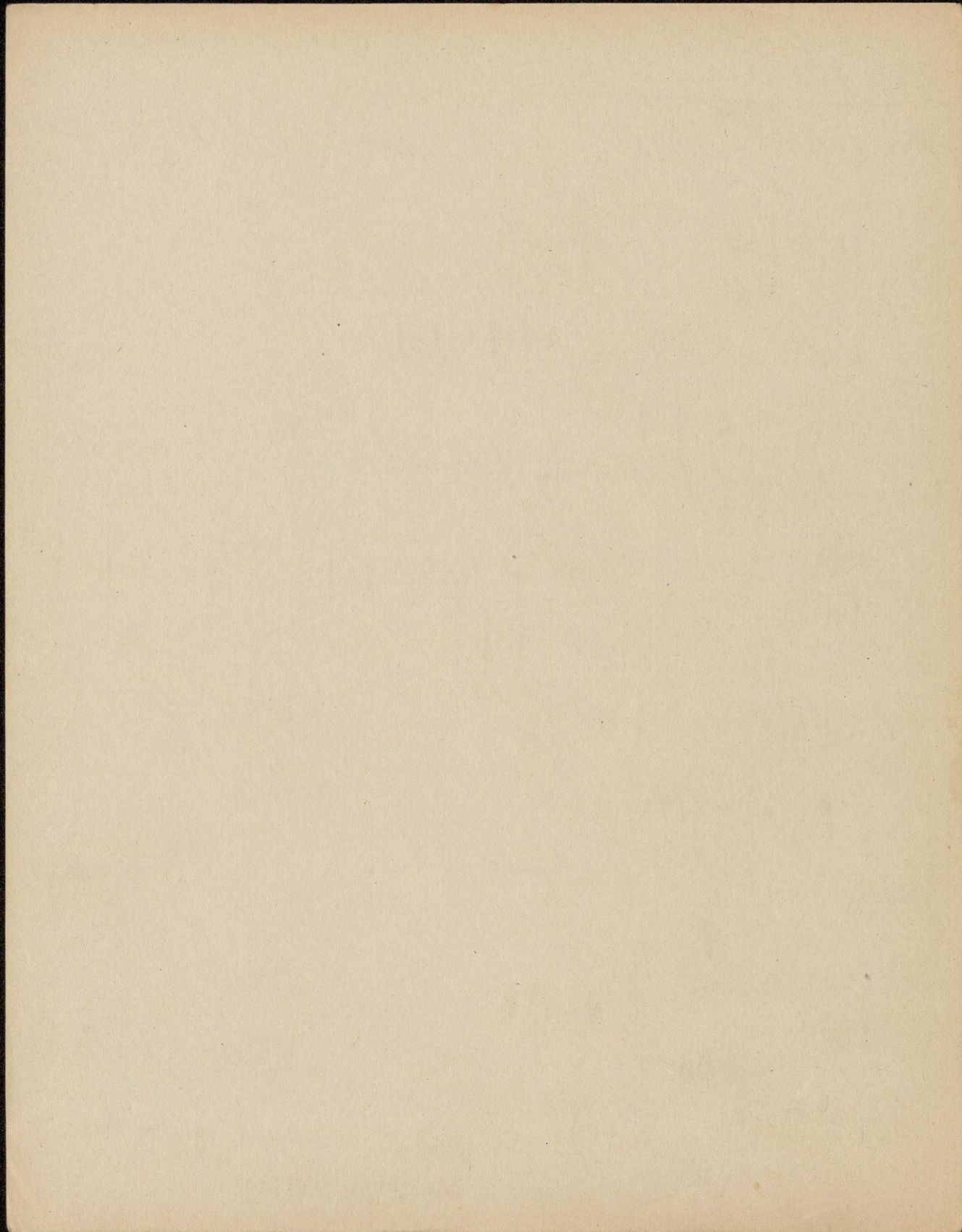
$$\psi(s) = e^{B s} R(s)$$

$$\psi(1-s) = e^{-B s} \underline{R(1-s)} e$$

$$1 = e^{2B s} \frac{R(s)}{R(1-s)} e$$

also $e^{2B s}$ = rat. Fkt., d.h. $B=0$.

$\psi(s)$ wäre rational, gegen die Annahme $\psi(s) \neq 0$.



Auch ohne Fkt. gl., nur aus

38

$|\psi(\sigma)| > e^{\frac{\sigma}{3} \log \sigma}$ für alle positiv große σ
folgt die Existenz unendl. vieler Nullstellen. &

$$e^{R(g(\sigma))} |R(\sigma)| > e^{\frac{\sigma}{3} \log \sigma}$$

$$R(g(\sigma)) + \log |R(\sigma)| > \frac{\sigma}{3} \log \sigma$$

$$R(B\sigma) \neq \frac{\sigma}{3} \log \sigma - O(\log |\sigma|^k)$$

$$R(B) > \frac{\log \sigma}{3} - O\left(\frac{\log |\sigma|^k}{\sigma}\right), \text{ ist falsch für große } \sigma.$$

Sieht man

$\varphi(z) = \psi\left(\frac{1}{2} + z\right) = \psi\left(\frac{1}{2} - z\right)$ ist also eine ganze Fkt.
in z^2 d.h.

$\psi\left(\frac{1}{2} + \sqrt{z}\right) = \varphi(z)$ ist eine ganze Fkt. von z .

Die Nullst. ρ' sind

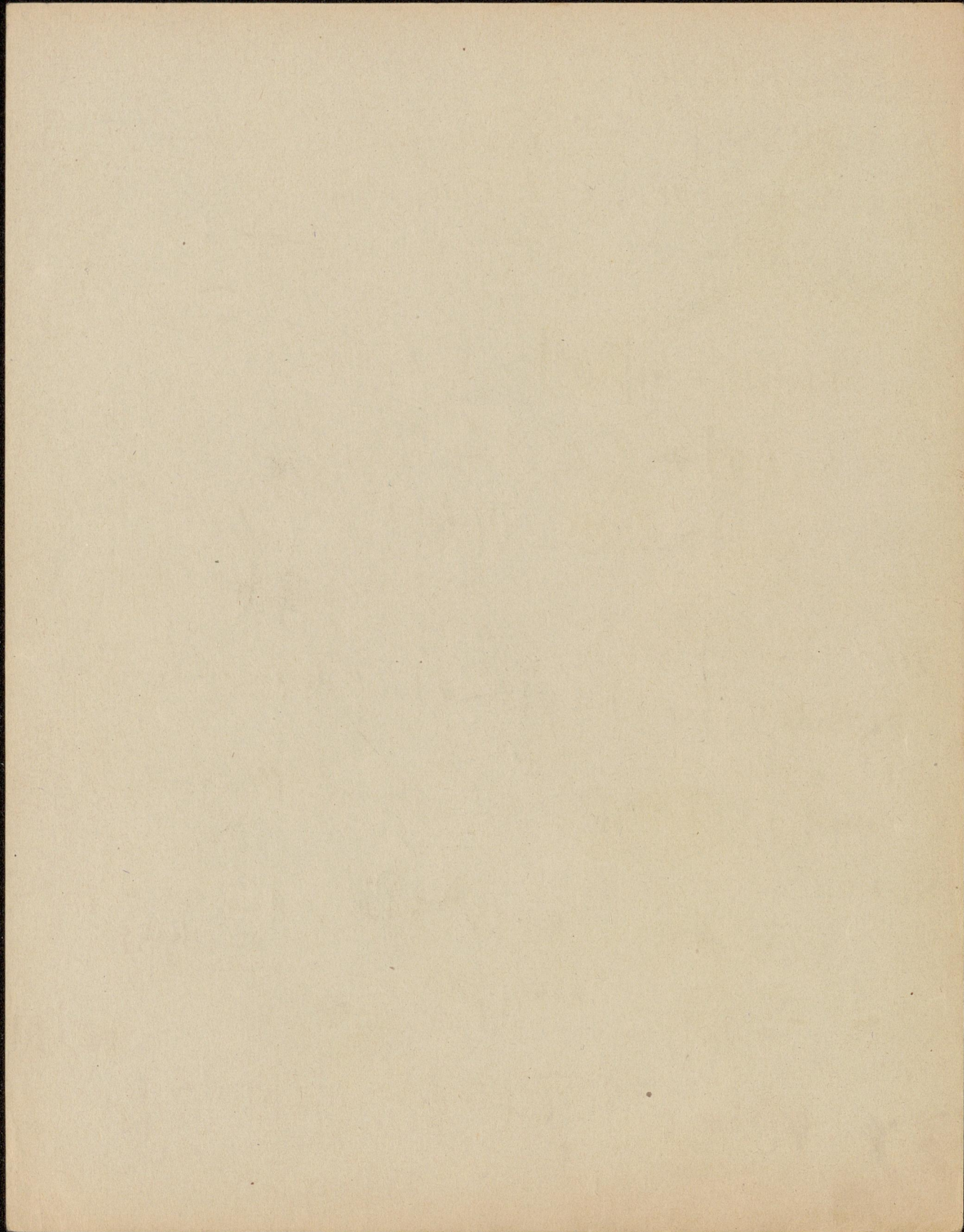
$$\frac{1}{2} + \sqrt{\rho'} = \rho, \quad \rho' = \left(\rho - \frac{1}{2}\right)^2$$

ρ und $1-\rho$ entsprechen denselben ρ' .

Aber ist $\sum \frac{1}{|\rho'|^{\frac{1}{2}+\varepsilon}}$ konverg.; d.h.

$$\varphi(z) = e^{apz} \prod_{\rho'} \left(1 - \frac{z}{\rho'}\right), \quad \text{wegen } |\varphi(z)| < e^{a\sqrt{z} \log |z|} < e^{\frac{2}{3}|z|}$$

ist $\rho = 0$;



Die Dichtigkeit der Nullstellen von $\xi(s)$.

(39)

z. B.

$$\psi(s) = s(s-1) \pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \xi(s)$$

$$= A e^{\beta s} \prod_p \left\{ \left(1 - \frac{s}{p}\right) e^{\frac{s}{p}} \right\}$$

$$\frac{\psi'(s)}{\psi(s)} = \frac{d \log \psi(s)}{ds} = \beta + \sum_p \left\{ \frac{1}{\log p} \frac{1}{s-p} + \frac{1}{p} \right\}$$

$$= \frac{1}{s} + \frac{1}{s-1} - \frac{1}{2} \log \pi + \frac{1}{2} \frac{\Gamma'\left(\frac{s}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)} + \frac{\xi'(s)}{\xi(s)}$$

Aus den schon bekannten Abschätzungen über $\frac{\xi'}{\xi}$ lassen sich Aussagen über die Verteilung der ρ machen.

z. B.

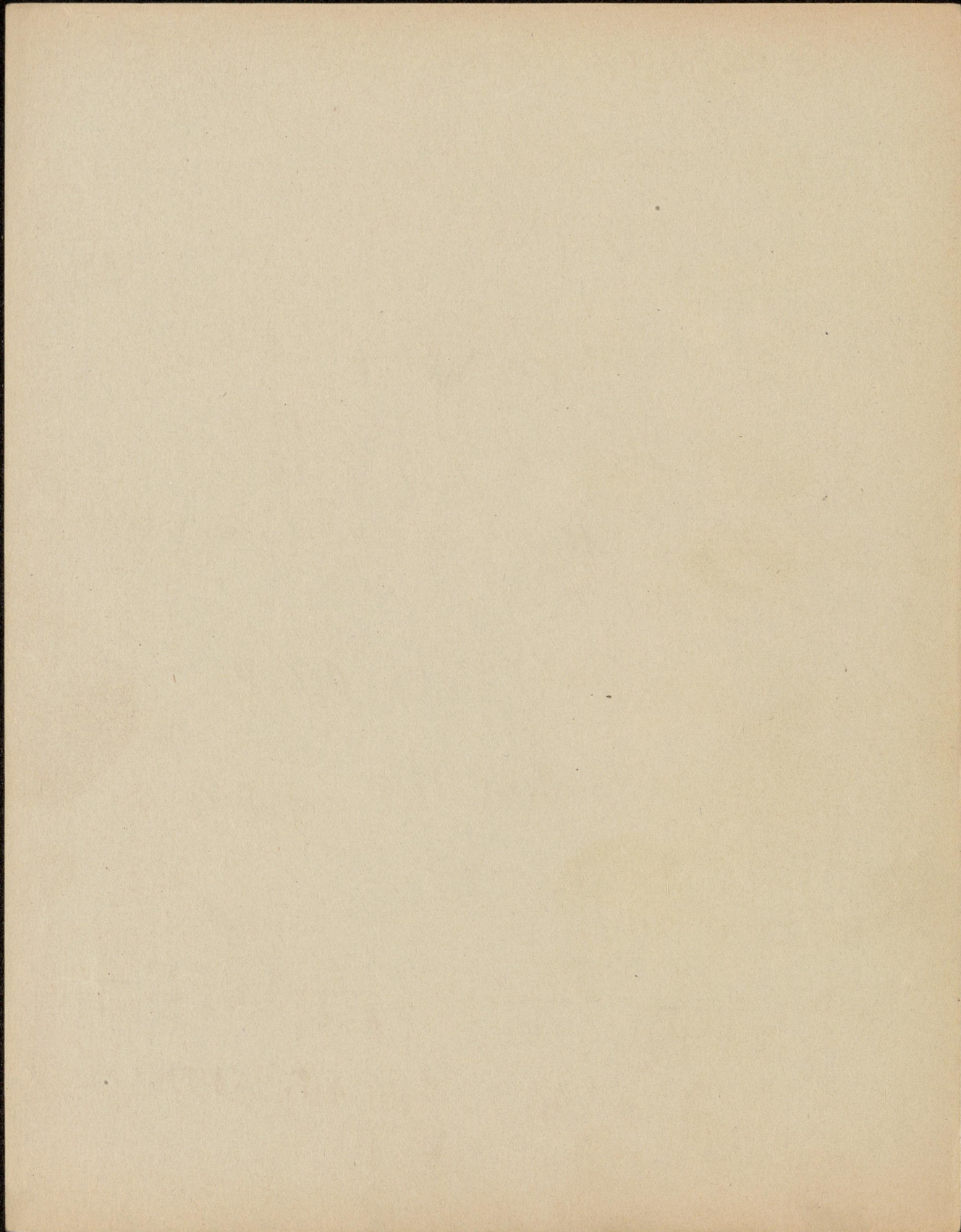
$$\frac{\xi'(2+it)}{\xi(2+it)} = O(1), \quad \frac{\Gamma'(1+\frac{it}{2})}{\Gamma(1+\frac{it}{2})} = O(\log |t|)$$

$$\sum_p \left(\frac{1}{2+it-\rho} + \frac{1}{\rho} \right) = O(\log |t|) \quad \rho = \beta + i\gamma.$$

$$\left| \sum_{\rho} \left(\frac{1}{2-\beta+i(t-\gamma)} + \frac{1}{\rho+iy} \right) \right| \geq \sum \mathcal{R}..$$

$$= \sum_{\rho, \gamma} \left(\frac{2-\beta}{(2-\beta)^2 + (t-\gamma)^2} + \frac{\beta}{\beta^2 + \gamma^2} \right) \geq \sum_{\rho, \gamma} \frac{1}{4 + (t-\gamma)^2} \geq \frac{1}{4} \sum_p \frac{1}{1 + (t-\gamma)^2}$$

Aber $\sum_p \frac{1}{1 + (t-\gamma)^2} = O(\log |t|)$. Es gibt $N(T+1) - N(T)$ Glieder,
 wo $T < \gamma \leq T+1$



also sind viele Glieder $\geq \frac{1}{4}$
~~ist~~ d. L.

$T > 0$.

40

$$N(T+1) - N(T) = O(\log T)$$

Daraus folgt $N(T) = O(T \log T)$.

Riemann hat schon (ohne Beweis) behauptet u. Meissner (1905) hat bewiesen
 dass Math. Ann. 60.

$$N(T) = \frac{1}{2\pi} T \cdot \log T - \frac{1 + \log 2\pi}{2\pi} T + O(\log T).$$

Landau hat gezeigt (1911), dass der Fehler nicht $O(1)$ ist, wenn
 die Riemannsche Vermutung richtig ist, ~~sonst~~ ~~den~~ ~~der~~ ~~Fehler~~
~~ist~~ Bohr - Landau - Littlewood - Gronwall haben gezeigt, dass
 wenn die Riem. Verm. richtig ist, $O(\log T)$ und sogar $O(\log T \cdot \log \log T)$
 (Zuletzt siehe Landau, über die Nullst. der Zetaf. Math. Z. 6. (1920))

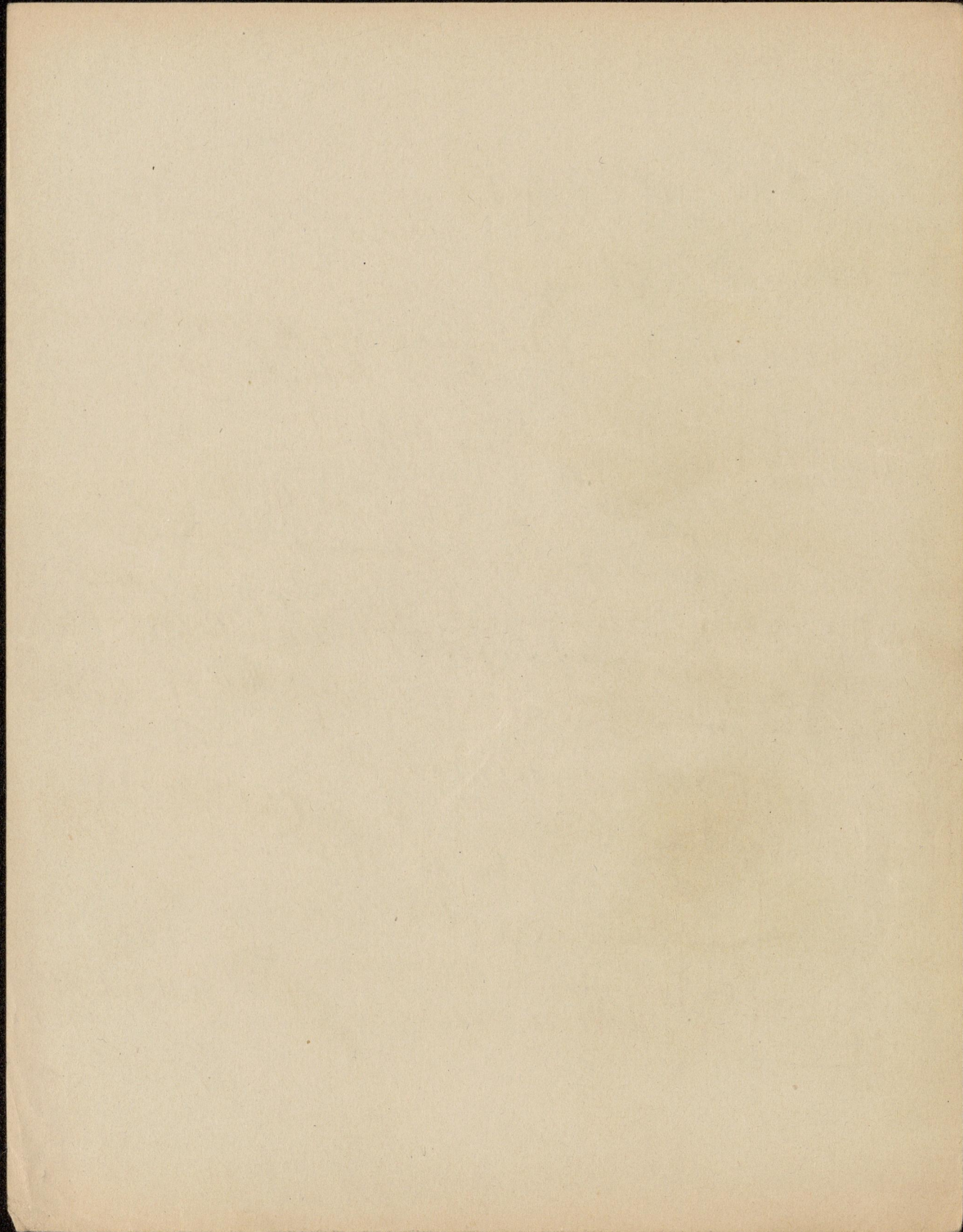
Carlson hat (im Archiv 15. 1921) gezeigt:

Die Anzahl der Nullst. rechts von $\frac{1}{2} + \delta$ ist $O(T^{1-4\delta^2+\epsilon})$
 Verifizierter Beweis von Landau (Archiv 16. 1921).

Nardy - Littlewood ~~haben~~ gezeigt (C. R. 1914).

Es gilt auf $\sigma = \frac{1}{2}$ unendlich viele Nullstellen.
 ... + Littlewood; diese Anzahl ist mindestens anzh T.
auf $\sigma = \frac{1}{2}$

Math. Z. 10.
 1921.



Die Riemannsche Primzahlformel.

(41)

Ziel der Untersuchung: Ableitung von $\log \xi(s)$.

Beweis von London, Berl. Akad. 1908.

$$\log \xi(s) = \log \xi(s_0) + \int_{s_0}^s \frac{\xi'(s)}{\xi(s)} ds \quad \text{Angabe des Weges.}$$

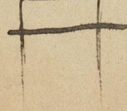
1) für $u = -3, -5, -7, \dots$ ist

$$\left| \frac{\xi'(u+i\lambda)}{\xi(u+i\lambda)} \right| = O(\log |u+i\lambda|) \text{ d.h. } < \text{const.} \cdot \log |u+i\lambda|$$

$$\begin{aligned} \text{Denn } \frac{\xi'(s)}{\xi(s)} &= \pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \xi(s) = \pi^{-\frac{1-s}{2}} \Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right) \xi(1-s) \\ \frac{\xi'(s)}{\xi(s)} &= \pi^{s-1} \frac{\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)} \xi(1-s) = \pi^{s-1} \frac{\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right) \Gamma\left(1-\frac{s}{2}\right) \sin \frac{s\pi}{2}}{\pi} \xi(1-s) \\ &= \frac{2}{(2\pi)^{1-s}} \sin \frac{s\pi}{2} \Gamma(1-s) \xi(1-s). \end{aligned}$$

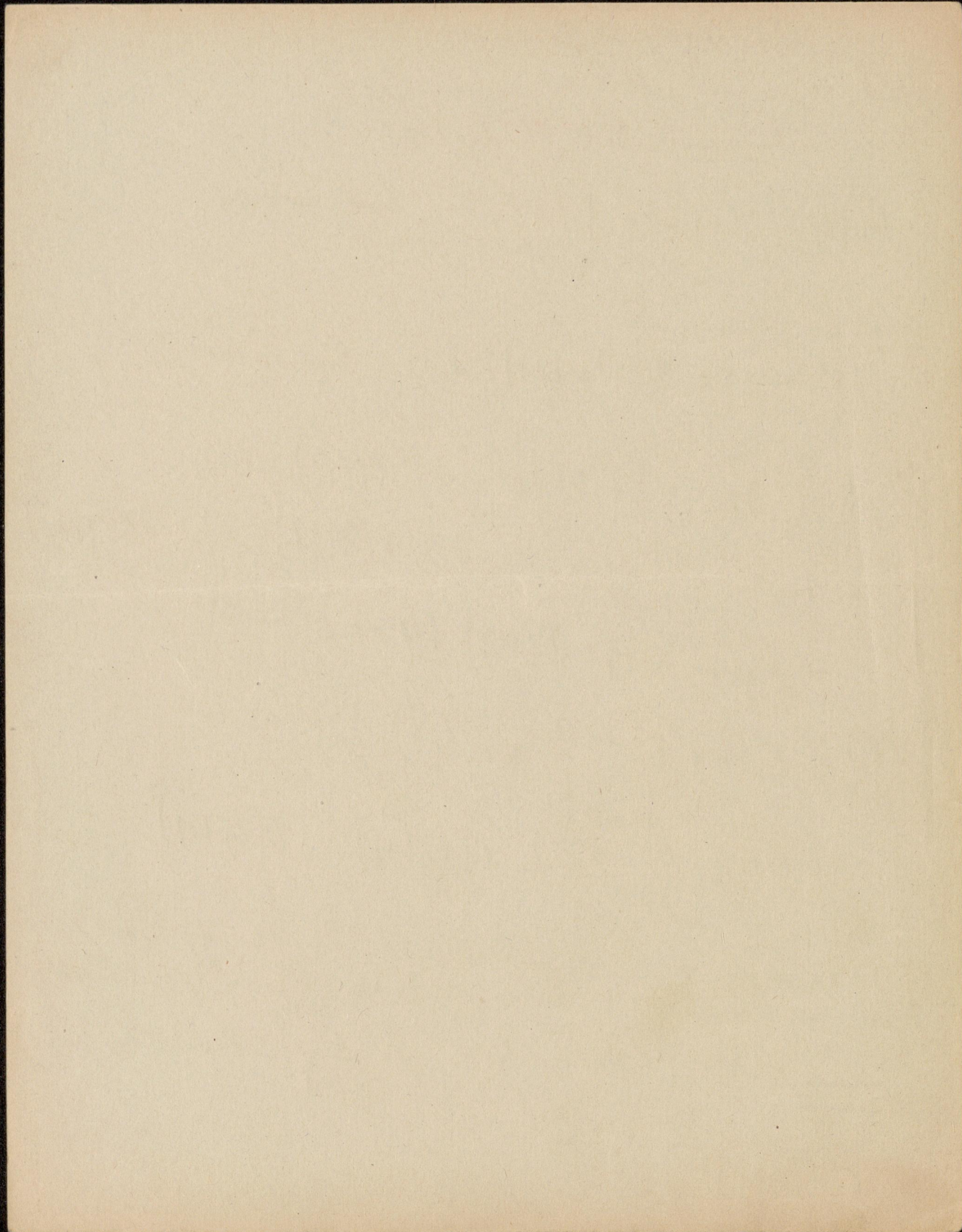
$$\begin{aligned} \frac{\xi'(s)}{\xi(s)} &= \log 2\pi + \frac{\pi}{2} \frac{\cos \frac{s\pi}{2}}{\sin \frac{s\pi}{2}} - \frac{\Gamma'(1-s)}{\Gamma(1-s)} - \frac{\xi'(1-s)}{\xi(1-s)} \\ &= O(1) + \frac{\pi}{2} \frac{e^{2s\pi i} + 1}{e^{s\pi i} - 1} = O(\log |s|) = O(\log |s|) \end{aligned}$$

2) Ist g eine ganze pos. Zahl., so gilt es in Intervall $g \dots g+1$ eine Zahl ω_g , sodass ein Streifen von der Dicke $\frac{\text{const.}}{\log \omega_g}$ in Nullstellen-ordinat frei ist.



$$N(g+1) - N(g) < c \log g, \text{ also } \frac{1}{[c \log]} \text{ in Nullst. frei.}$$

(Einfachste Flächenprinzip)



3) Bei Fortsetzung langs ω_2 ist

$$\left| \log \xi(\sigma + i\omega_2) \right| < \text{const.} \cdot (3-\sigma) \log^2 |\sigma + i\omega_2| \quad \sigma \leq 2.$$

Sei

$$\frac{\xi'(\sigma + i\omega_2)}{\xi(\sigma + i\omega_2)} = \beta - \frac{1}{s} - \frac{1}{s-1} - \frac{1}{2} \frac{T'(\frac{s}{2})}{T(\frac{s}{2})} + \sum_p \left(\frac{1}{s-p} + \frac{1}{p} \right)$$

$$\left| \frac{T'(s)}{T(s)} \right| \leq \text{const.} \log |s|$$

$$\sum_p' = \sum_{|\omega_p - s| \geq 1} + \sum_{(\omega_p - s) < 1}''$$

a) σ m. -1 und 2

$$\sum_{\sigma + i\omega} = \sum_p' \left(\frac{1}{\sigma + i\omega - p} - \frac{1}{\sigma + 3 + i\omega - p} \right) + \sum_{\sigma + 3}'$$

$$\left| \sum_{\sigma + i\omega}' \right| < \left| \sum_p' \frac{3}{(s-p)(s+3-p)} \right| + \left| \sum_{\sigma+3}' \right|$$

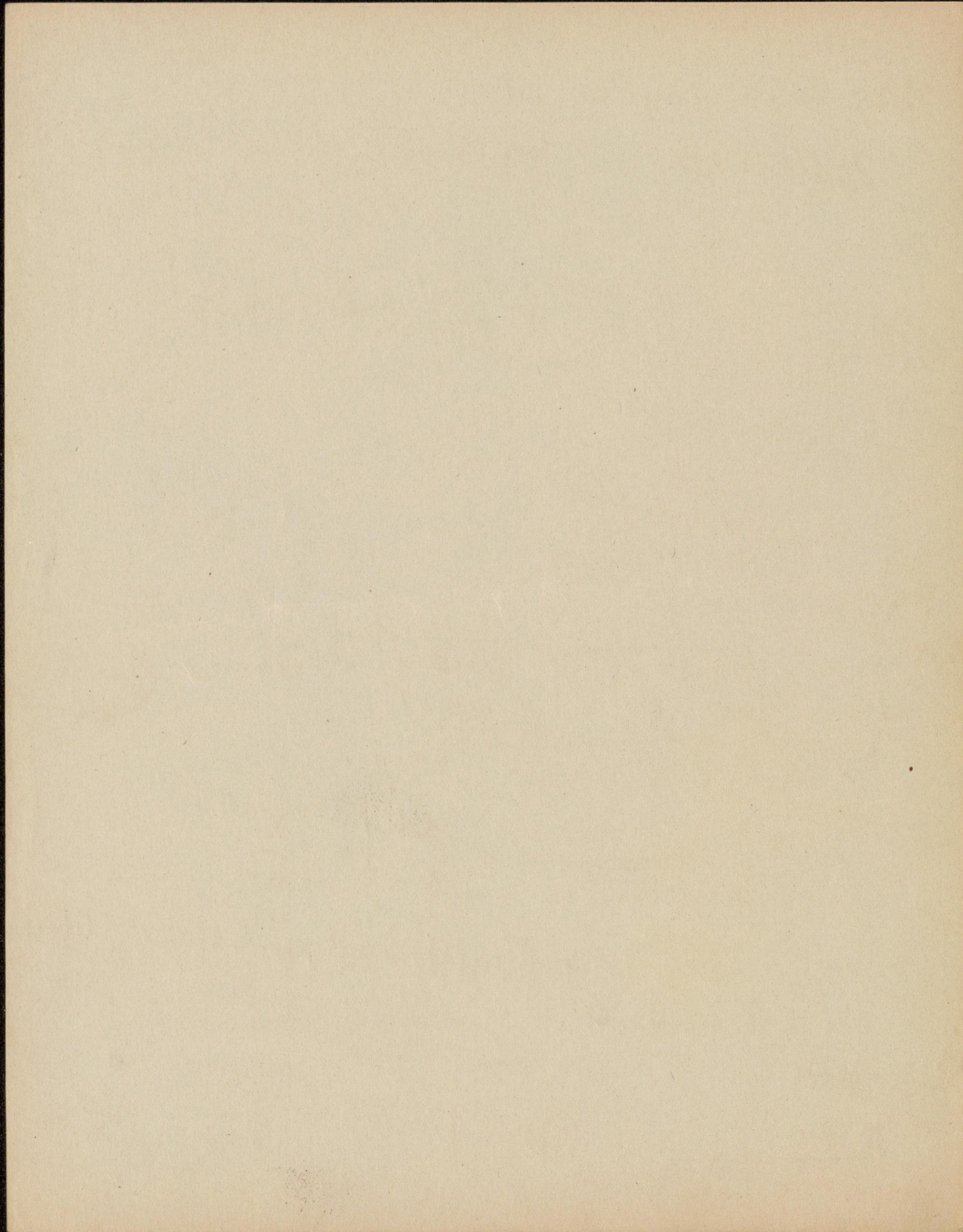
$\sigma+3$

$$< \sum_p' \frac{3}{|\omega - p|^2} + \left| \sum_{\sigma+3}' \right| + \left| \sum_{\substack{\sigma+3 \\ \omega_p - s}}'' \right|$$

$$\begin{aligned} & \sim O(\log |\omega|) + O(\log |s|) + o(|N(\omega^{s+1}) - N(\omega^{\bar{s}+1})| \cdot \log |\omega|) \\ & = O(\log^2 |\sigma + i\omega|) \quad -1 \leq \sigma \leq 2. \end{aligned}$$

b) $\sigma \leq -1$

$$\left| \frac{\xi'(\sigma + i\omega)}{\xi(\sigma + i\omega)} \right| < \text{const.} \log^2 |\sigma + i\omega|$$



(43)

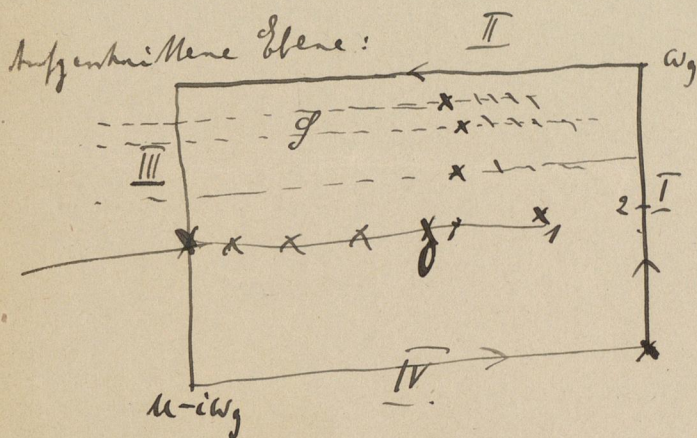
$$\log \zeta(\sigma + i\omega) = O(1) + \int_{\sigma + i\omega}^{\sigma + i\omega} \frac{\zeta'}{\zeta} ds$$

$$| | \leq O(1) + |\sigma - 2| \log^2 |\sigma + i\omega|$$

$$\text{Sei } R(x) = \pi(x) + \frac{\pi(\sqrt{x})}{2} + \frac{\pi(\sqrt[3]{x})}{3} + \dots = \sum_{p^m \leq x} \frac{1}{m}$$

Form in $\mathbb{C}$

$$2\pi i R(x) = \int_{\sigma - i\omega}^{\sigma + i\omega} \frac{x^s}{s} \log \zeta(s) ds = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \int_{\sigma - i\omega}^{\sigma + i\omega} \frac{x^s}{s} \log \zeta(s) ds$$



Schritte 1

$$0 = \int_{\text{I}} + \int_{\text{II}} + \int_{\text{III}} + \int_{\text{IV}} + \sum \int_{\mathcal{G}}$$

$$\left| \int_{\text{II}} \right| = \left| \int_{\sigma}^u \frac{x^{\sigma + i\omega}}{\sigma + i\omega} \log \zeta(\sigma + i\omega) d\sigma \right| < \frac{O(1)}{|\omega|} \int_{\sigma}^u (3-\sigma) x^{\sigma} |\log^2 |\sigma + i\omega|| d\sigma$$

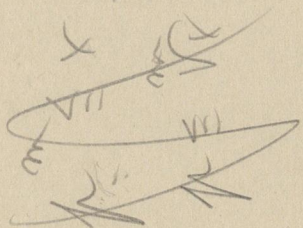
$$< \frac{O(1) \cdot (\log^2 |\omega| + 2\pi)^2}{\omega} \int_{\sigma}^u (3-\sigma) x^{\sigma} d\sigma < O(1) \cdot \frac{\log^2 |\omega|}{\omega} \left| \int_{\sigma}^u (3-\sigma) x^{\sigma} d\sigma \right|$$

$$\frac{1}{m}$$

$$\sum$$

$$m_1 p_1$$

$$m_2 = 1$$



$\int_{II}$ und $\int_{IV}$ sind aber für $\lim_{u \rightarrow -\infty}$ absolut konvergent und $< \frac{cmL}{\omega|1-\varepsilon|}$

$\int_{III}$: $\log f(s)$ nimmt beim Durchlaufen jedes Kreises um $-2\pi i$ zu.
 gegenläufiger geradliniger Durchlauf $\sim III$

S.d.h.

$$\left| \int_{III} - \int_{III} \text{geradlinig} \right| \leq |2\pi i| (2N(\omega) + 1) \int_{-\omega}^{+\omega} \frac{|x|^{\sigma}}{|u+ik|} dL$$

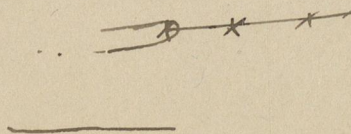
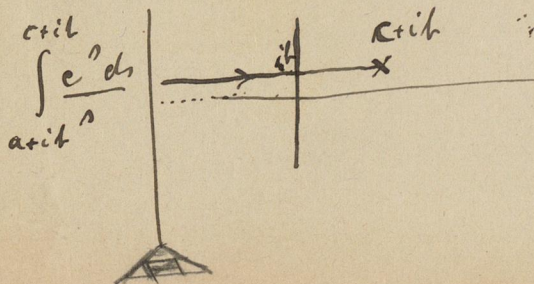
das konvergiert gegen Null für $u \rightarrow -\infty$.

$$\left| \int_{III} \text{geradlinig} \right| < x^u \int_{-\omega}^{+\omega} \frac{|\log f(u+ik)|}{|u+ik|} dL$$

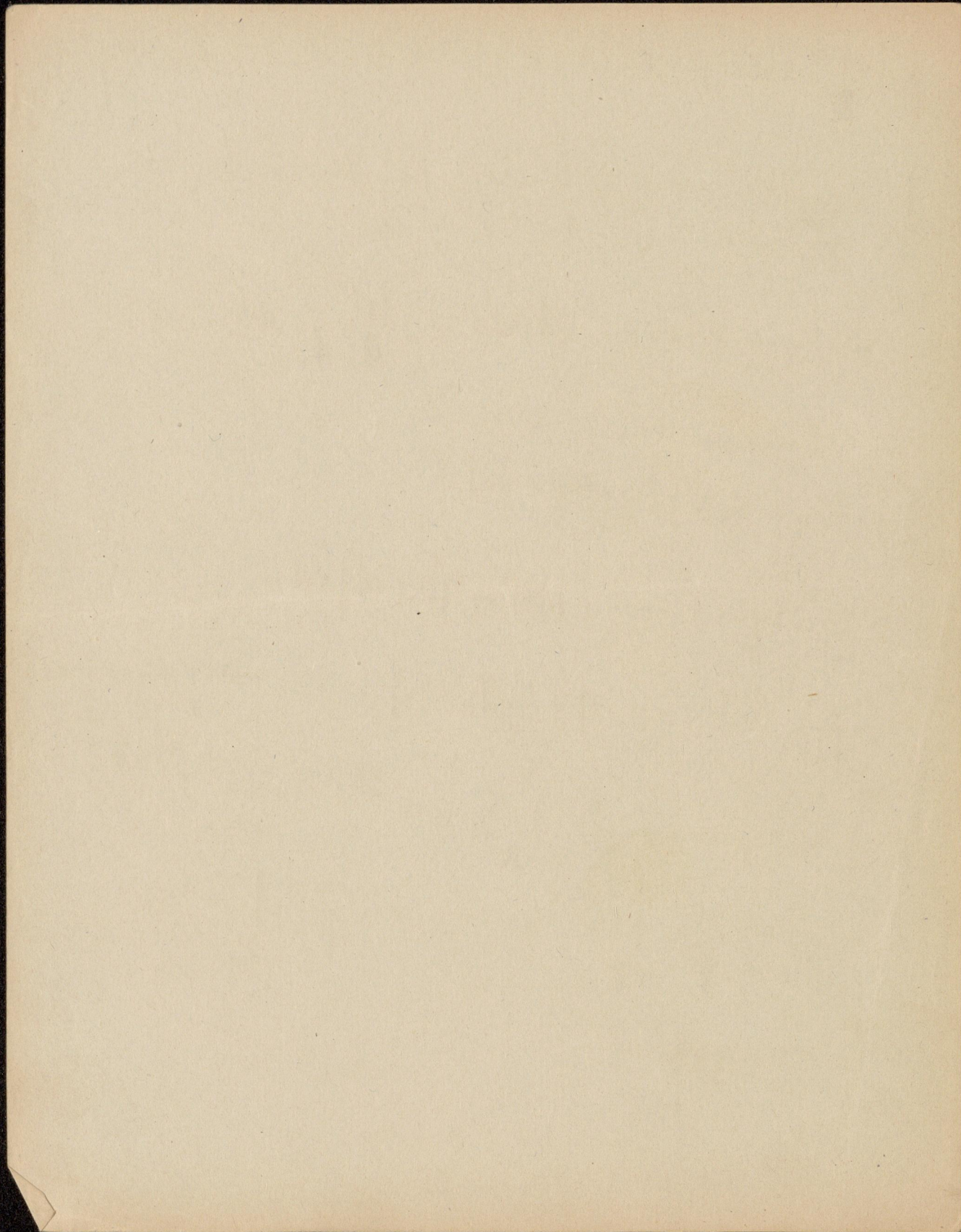
$$< \frac{x^u}{|u|} \int_{-\omega}^{+\omega} \left(|\log f(u+i\omega)| + |\omega| \log^2 |u+i\omega| \right) dL$$

$$< \frac{x^u}{|u|} \left(\log |u+i\omega| + |\omega| \log^2 |u+i\omega| \right) \cdot 2|\omega| \xrightarrow{u \rightarrow -\infty} 0$$

$$\sum \int_{\gamma} = 2\pi i \sum_{\substack{\gamma \\ u \neq \rho}} \int_{\gamma} \frac{x^s}{s} ds = 2\pi i \sum_{\substack{\gamma \\ u \neq \rho}} \int_{\gamma} \frac{e^{s \log x}}{s} ds = +2\pi i \sum_{\substack{\gamma \\ u \neq \rho}} \int_{\gamma} \frac{e^s}{s} ds$$



44



$$\int_{-\infty}^{\beta+iy} \frac{e^s}{s} ds = \text{Li}(e^{\beta+iy}) = \int \frac{du}{\log u} \quad \lim_{\beta \rightarrow \infty} - \infty \dots 0 \text{ aufheben}$$

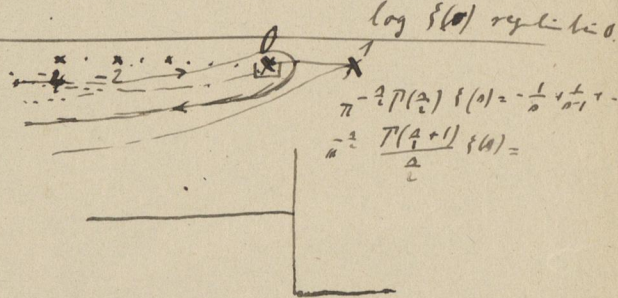
145

$$s = \log u$$

$$+ 2\pi i \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-\infty}^{-2n} \frac{x^s}{s} ds = + 2\pi i \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-\infty}^{-1-2n} \frac{x^s}{s} ds$$

$$= + 2\pi i \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^s}{1-x^{2s}} \frac{ds}{s} = + 2\pi i \int_1^{\infty} \frac{dv}{(x^{2v}-1)v} \quad \zeta(0) = -\frac{1}{2}$$

$$\int_{-\infty}^{0-\varepsilon} \frac{x^s}{s} ds + \int_{\varepsilon}^1 \frac{x^s}{s} ds$$

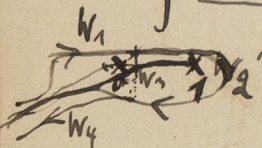


$$\int \frac{x^s \log f(s)}{s} ds = -2\pi i \log f(0)$$

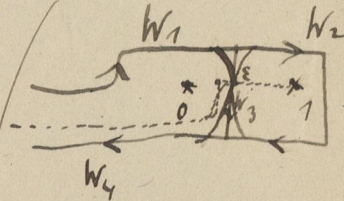
$$f(s) = \frac{1}{s-1} + \text{reg. F.}$$

$$\log f(s) = \log \frac{1}{s-1} + \text{reg. F.}$$

$$\int x^s \log f(s) ds = \int x^s \log \frac{1}{s-1} ds + \int x^s \log f(s) ds$$



$$+ 2\pi i \int_{\Delta} \frac{x^s}{s} ds + \int_{\Delta} \frac{x^s \log f(s)}{s} ds$$



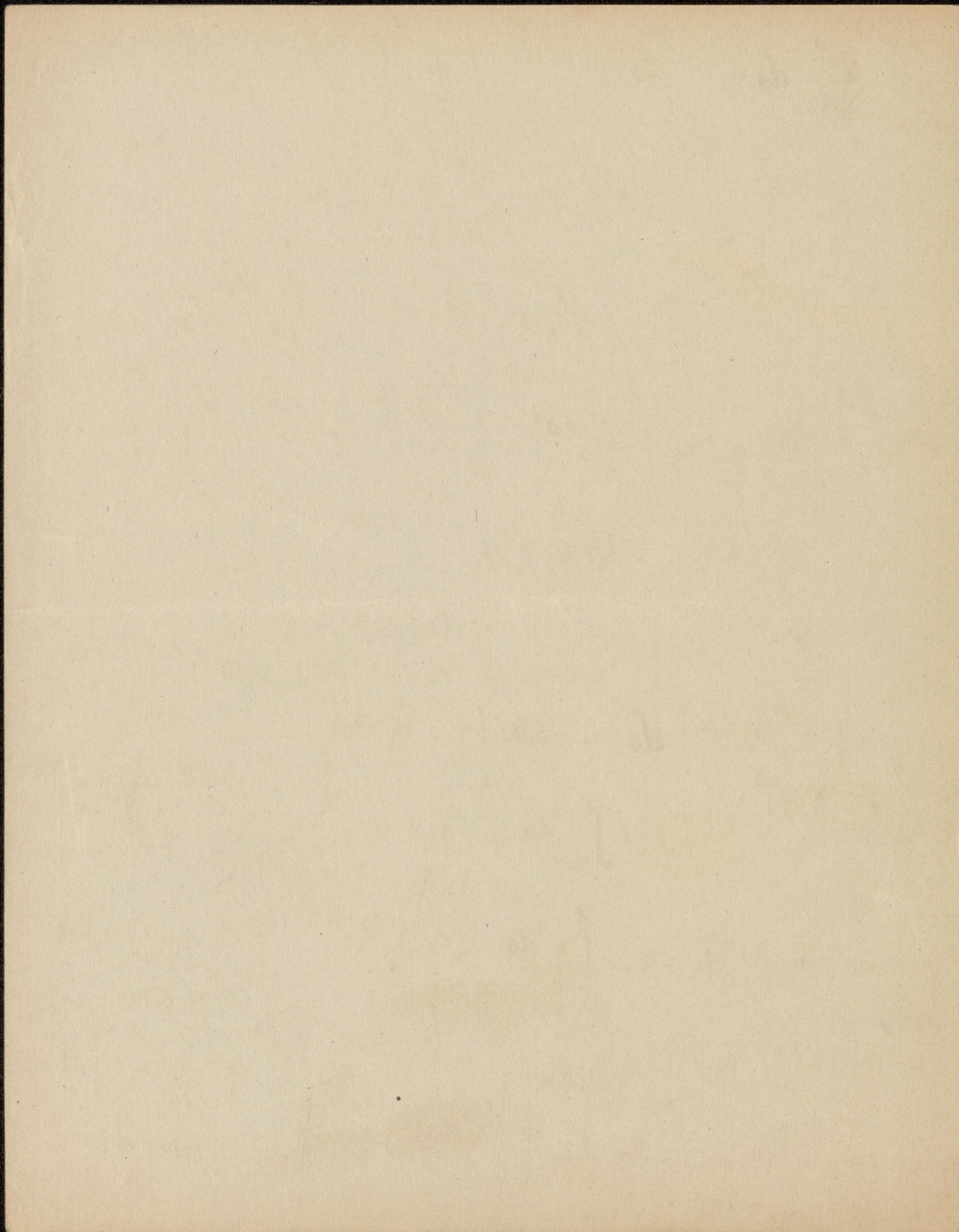
$$= -2\pi i \log f(0) + 2\pi i \int_{\Delta} \frac{x^s}{s} ds - 2\pi i \int_{\Delta} \frac{x^s}{s} ds$$

$$= -2\pi i \log f(0) + 2\pi i \left\{ \int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{x^s}{s} ds + \int_{\varepsilon}^1 \frac{x^s}{s} ds \right\} - 2\pi i \int_{\Delta} \frac{x^s}{s} ds$$

$$= -2\pi i (\log f(0) + \pi i) - 2\pi i \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{-\infty}^{\varepsilon} \frac{x^s}{s} ds + \int_{\varepsilon}^1 \frac{x^s}{s} ds \right\}$$

$$= 2\pi i \log 2 - 2\pi i \text{Li}(x)$$

$$\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \frac{x^s}{s} ds = i \int_{-\pi}^{\pi} x^{e^{i\varphi}} d\varphi = \pi i$$



Somit Riemannsche Primzahlformel:

(46)

$$R(x) = \sum_n \frac{\pi(\sqrt{x})}{n} = \text{Li}(x) - \sum_p \left\{ \text{Li}(x^{1/p}) + \text{Li}(x^{1/p^2}) + \dots \right\} + \int_x^\infty \frac{du}{u(u^2-1)\log u} - \log x$$

Dabei ist $\text{Li}(x)$ zu erklären:

$$\text{Li}(e^w) = \begin{cases} \int_{-\infty}^w \frac{e^s}{s} ds + \pi i, & \text{auf dem komplexen Grade integriert. } F(w) > 0 \\ \int_{-\infty}^w \frac{e^s}{s} ds - \pi i, & F(w) < 0 \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{e^s}{s} ds + \int_{\varepsilon}^w \frac{e^s}{s} ds \right\}, & \text{wenn } w \text{ reell und } > 0 \end{cases}$$

Beweis d. Riem.-Formel bei Landau, Berl. Ber. 1908.

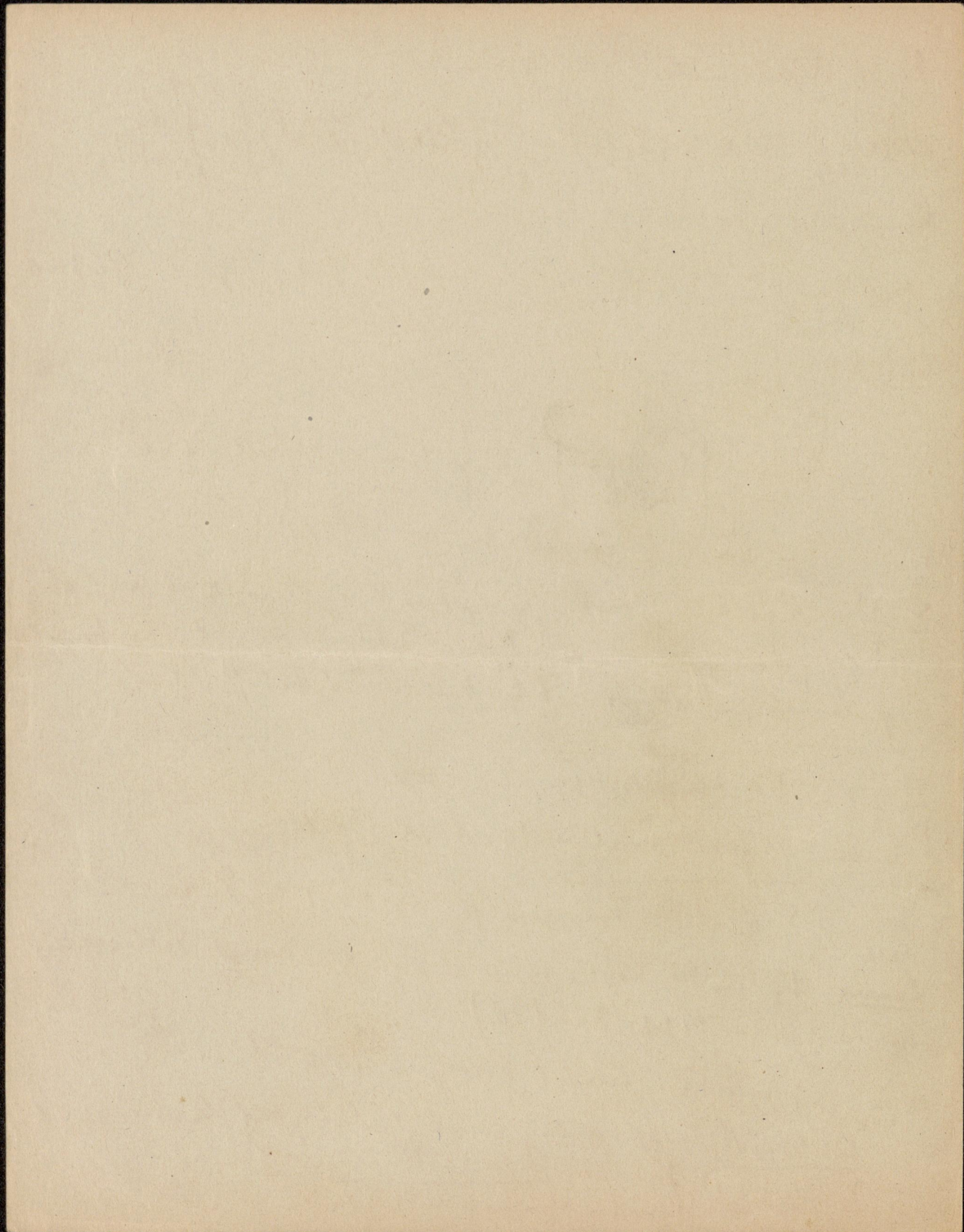
$\sum_p \frac{x^s}{p^s}$ ist gleichmäßig konvergent in jedem Intervall, wo $x > 0$, $x \neq 1, p^{\pm m}$.
 ungleichmäßig konvergent, wenn diese Punkte Endpunkte sind. (v. Mangoldt)
 vgl. Landau, Math. Ann. 71. Nullstellen d. Zetafunktion

$\sum_p \frac{1}{p^s}$ ist nicht fortsetzbar für $\sigma = 0$.

Landau - Walfisz, Rendiconti 1920. (Bd. 44).

$\frac{1}{\zeta(s)} = \sum_n \frac{\mu(n)}{n^s}$. Konvergenz für $\sigma = 1$ ist die Primzahltheorie.
 Landau, über die Äquivalenz zweier Hauptsätze d. analyt. Zahlentheorie
 Wiener Akad. 1911 (Bd. 120).

$\sum_{n \leq x} \mu(n) = O(\sqrt{x})$ bedeutet Konvergenz bei $\sigma = \frac{1}{2}$ — dies ist nach
 Littlewood (1911) äquivalent mit der Richtigkeit der Riemannschen
 Vermutung. | vgl. Vortrag von Landau in Cambridge 1912.
 Abdruck in Jahrbuch d. deutsch. Math. Ver. 21. (1912).



Summierbarkeit und Konvergenz der Dirichletschen Reihe

Man gehe aus von der Formel:

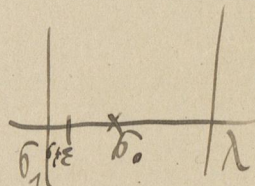
$$f(s) = \sum \frac{a_n}{n^s} \text{ mit Konvergenz f. } \sigma > \lambda.$$

$$I. \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{x^s f(s)}{s(s+1) \dots (s+k)} ds = \frac{1}{k!} \sum_{n=1}^x \frac{a_n (x-n)^k}{x^k \Gamma(k+1)} \quad k \geq 1.$$

$$II. \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{x^s f(s)}{s^{\mu}} ds = \frac{1}{\Gamma(\mu+1)} \sum_{n=1}^x a_n (\log x - \log n)^{\mu} \quad \left. \begin{matrix} \mu > 0 \\ \text{und } \mu > \lambda \end{matrix} \right\}$$

Man ersetze a_n durch $\frac{a_n}{n^{\sigma_0}}$, $\varphi(s)$ sei die durch $\sum \frac{a_n}{n^s}$ dargestellte analyt. Funktion und es sei $\varphi(s)$ regulär und $O(|t|^{k-\epsilon})$ für $\sigma > \sigma_1$, also $O(|t|^{k-\epsilon})$ für $\sigma > \sigma_1$.

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{x^s \varphi(s+s_0)}{s(s+1) \dots (s+k)} ds = \frac{\sum_{n=1}^x \frac{a_n}{n^{\sigma_0}} (x-n)^k}{x^k \Gamma(k+1)} = F(x, \gamma)$$



wenn $\gamma > 0$ und $\gamma + \sigma_0 > \lambda$.

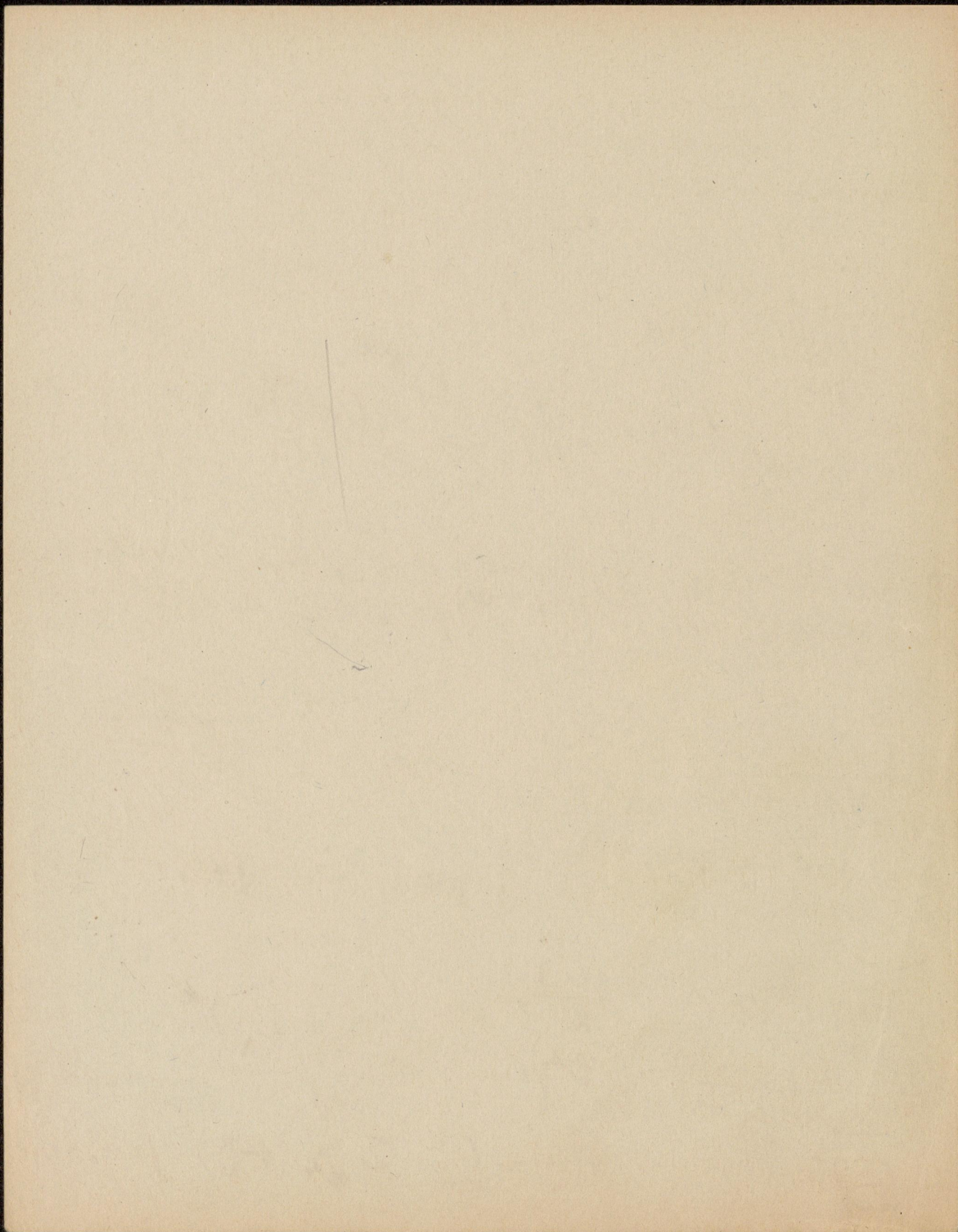
Man verschiebe den Weg um $s=0$ hin, bis $\sigma_1 - \epsilon$, man setze $\gamma + \sigma_0 > \sigma_1$, $\sigma_0 > \sigma_1 + \epsilon$ d.h.

Man ist

$$F(x, \gamma) = F(x, -\epsilon) + \frac{\varphi(s_0)}{k!}$$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{-\epsilon-i\infty}^{-\epsilon+i\infty} \frac{x^s \varphi(s+s_0)}{s(s+1) \dots (s+k)} ds + \frac{\varphi(s_0)}{k!} = \frac{\sum_{n \leq x} \frac{a_n}{n^{\sigma_0}} \left(1 - \frac{n}{x}\right)^k}{k!}$$

aber $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x, -\epsilon) = 0$. Also $\varphi(s_0) = \lim_{x \rightarrow \infty} \sum_{n \leq x} \frac{a_n}{n^{\sigma_0}} \left(1 - \frac{n}{x}\right)^k$ für $\sigma_0 > \sigma_1 + \epsilon$.



Also

Satz: Die Mittel k -ter Ordnung konvergieren ^{bei $x = -\infty$} und stellen die Funktion $\varphi(s)$ dar, solange die Funktion regulär und gleichmäßig $O(|A|^k)$ ist. 48

Zusatz:

Alle Mittel konvergieren und stellen $\sum \frac{a_n}{n^s}$ dar, für die s , welche im Konvergenzgebiet der Reihe liegen.

II. Offenbar die logarithmischen Mittel.

$$\frac{1}{2\pi i} \int \frac{x^s \varphi(s+s_0)}{\Delta^{k+1}} ds = \frac{\sum_{n \leq x} \frac{a_n (\log x)^k}{k!}}{k!}$$

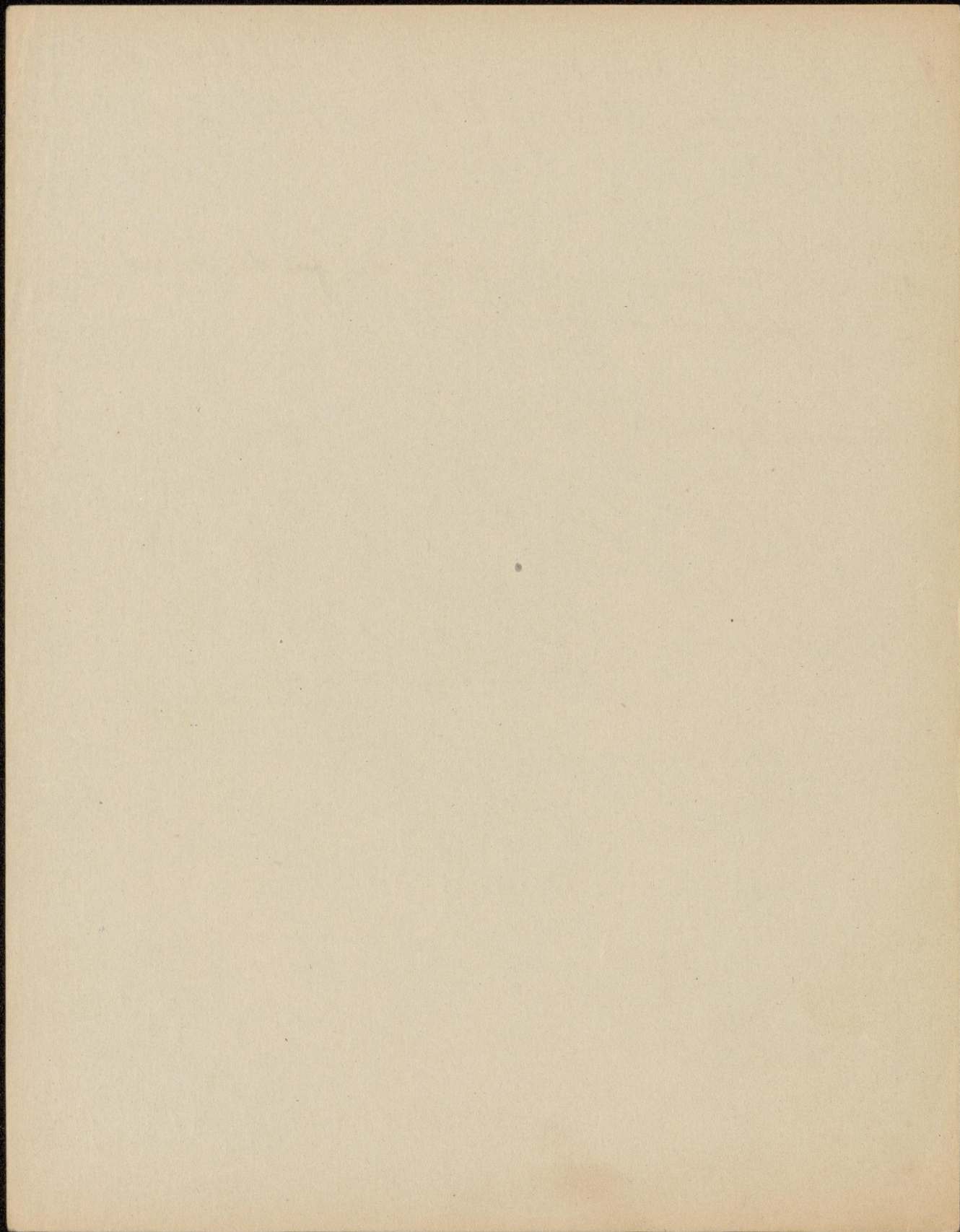
$$x^s = \sum_n \frac{\Delta^n (\log x)^n}{n!}$$

$$\frac{\varphi(s_0) (\log x)^k}{k!} + O(\log x^{k-1})$$

$$\varphi(s_0) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sum_{n \leq x} \frac{a_n (\log x - \log n)^k}{k!}}{(\log x)^k} = \sum_{n \leq x} \frac{a_n (1 - \frac{\log n}{\log x})^k}{n^{s_0}}$$

$$\varphi_k(x) = \frac{\sum_{n \leq x} a_n (\log x - \log n)^k}{k!} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\varphi_k(x) k!}{(\log x)^k}$$

$$\int_1^x \frac{\varphi_k(u)}{u} du = \sum_n a_n \int_n^x \frac{(\log u - \log n)^k}{k!} \frac{du}{u} = \frac{\sum_n a_n (\log x - \log n)^{k+1}}{(k+1)!}$$



Die Folge $a_1, a_2, \dots$ heißt summabel der k -ten Ordnung nach

Genaro (summabel (ℓ, k)), wenn

Genaro 1890.

Kölbe 1883

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f_k(x)/k!}{x^k} \text{ vorhanden}$$

(iterierte arithmetische Mittel)

und dieses Limit heißt die Summe.

1) Verifikation einer Stelle:

Die Folge $a_1, a_2, \dots$

und $b, a_1, a_2, \dots$

sind gleichzeitig summabel (ℓ, k) , und die Summe ist = ℓ im Fall $b + a$.

Hier 49a

$$\begin{aligned} & \frac{b(x-1)^k}{x^k} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n-1} (x-n)^k}{x^k} \\ &= b + \varepsilon_x + \sum_{n=1}^{x-1} \frac{a_n (x-n-1)^k}{x^k} \\ &= b + \varepsilon_x + \sum_{n=1}^{x-1} \frac{a_n (x-n)^k}{x^k} + \sum_{p=0}^{k-1} \binom{k}{p} \frac{\sum_{n=1}^{x-1} a_n (x-n)^p}{x^k} (-1)^p \end{aligned}$$

Wenn $c_0, c_1, \dots, c_k$ v. bestimmt sind, dass

$$c_0 x^k + c_1 \left(x + \frac{1}{k}\right)^k + \dots + c_k \left(x + \frac{k}{k}\right)^k = 1, \text{ und } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f_k(x)}{x^k} = 0.$$

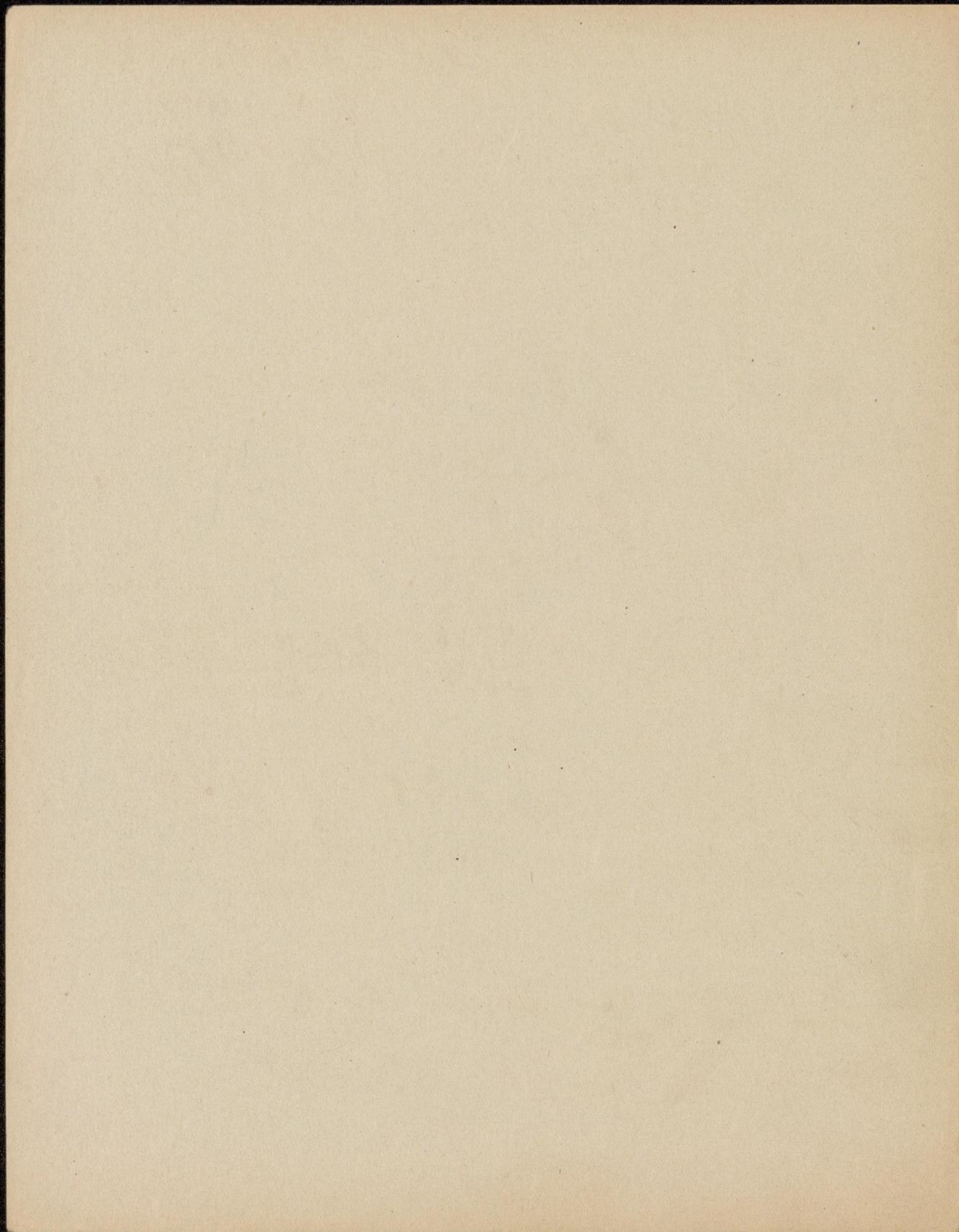
$x = \text{ganze Zahl}$

$$f(x) = c_0 f_k(x) + c_1 f_k\left(x + \frac{1}{k}\right) + \dots + c_k f_k\left(x + \frac{k}{k}\right) = \sum_{n=1}^x \frac{a_n}{k!}$$

$$\frac{f(x)}{x^k} \rightarrow \sum c_0 c$$

$$\frac{f(x+1) - f(x)}{x^k} = \frac{a_{x+1}}{(x+1)^k} \rightarrow 0, \text{ also } a_n = o(n^k)$$

$$\frac{f(x+1) - f(x-1)}{x^k} = x \frac{a_x}{x^k} \rightarrow 0. \quad a_n = o(n^k)$$



Zusammenhang mittels Mittelwertsatz.

49a

$$g_k(x) = \frac{1}{k!} \sum_{n \leq x} a_n (x-n)^k \quad k=0, 1, \dots$$

$$\int_1^u g_k(x) dx = \frac{1}{k!} \sum_{n \leq u} a_n \int_n^u (x-n)^k dx$$

$$= \frac{1}{(k+1)!} \sum_{n \leq u} a_n (u-n)^{k+1} = g_{k+1}(u).$$

gib: Wenn $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{k! g_k(x)}{x^k} = \kappa$, dann auch $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{g_{k+1}(x) (k+1)!}{x^{k+1}} = \kappa$

$$\text{Def: } \frac{g_{k+1}(u)}{u^{k+1}} = \frac{(k+1)!}{u^{k+1}} \int_1^u \frac{(x+\varepsilon_x)}{k!} x^k dx = \kappa + \frac{1}{u^{k+1}} \int_1^u \varepsilon_x x^k dx + o\left(\frac{1}{u^{k+1}}\right)$$

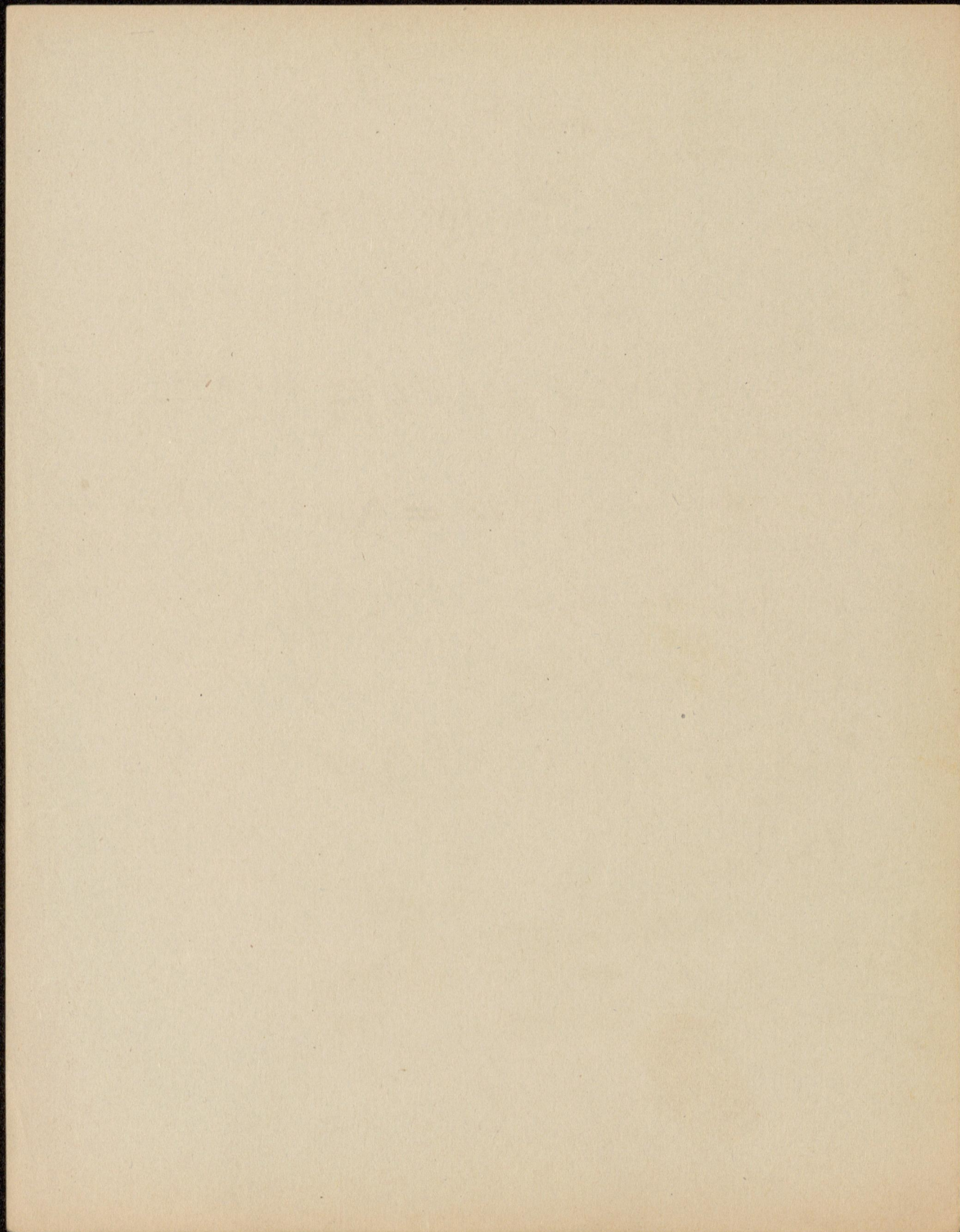
$$= \kappa \quad |\varepsilon_x| < \delta, \quad u. n, \text{ den } |\varepsilon_x| < \delta, \text{ f. } x \geq u_0$$

$$\left| \int_1^u \varepsilon_x x^k dx \right| = \delta \int_1^{u_0} x^k dx + \delta \int_{u_0}^u x^k dx$$

$$= \frac{\delta}{k+1} (u_0^{k+1} - 1) + \frac{\delta}{k+1} (u^{k+1} - u_0^{k+1})$$

$$< \frac{\delta u_0^{k+1}}{k+1} + \frac{\delta u^{k+1}}{k+1}$$

$$\frac{\int_1^u \varepsilon_x x^k dx}{u^{k+1}} < \frac{\delta}{k+1} \left(\frac{u_0}{u}\right)^{k+1} + \frac{\delta}{k+1}$$



Wenn $a_1, a_2, \dots$ numerisch $(\mathcal{G}, k)$, dann

150

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f^{(p)}(x)}{x^k} = 0 \quad \text{für } p = 0, 1, 2, \dots, k-1.$$

Man bestimme $c_0, c_1, \dots, c_k$ so dass

$$c_0 x^k + c_1 \left(x + \frac{1}{k}\right)^k + \dots + c_k \left(x + \frac{k}{k}\right)^k = x^p \quad (p \leq k)$$

$$\text{oder } (c_0 + c_1 + \dots + c_k) = 0.$$

Dann ist für $k \geq 1$

$$c_0 f_k(x) + \dots + c_k f_k\left(x + \frac{k}{k}\right) = \sum_{n \leq x} a_n (x-n)^p$$

$$0 = (c_0 + c_1 + \dots + c_k) x^k \leftarrow \frac{\sum_{n \leq x} a_n (x-n)^p k!}{x^k}$$

Es sei $a_1, a_2, \dots$ numerisch $(\mathcal{G}, k)$ zur Folge a .

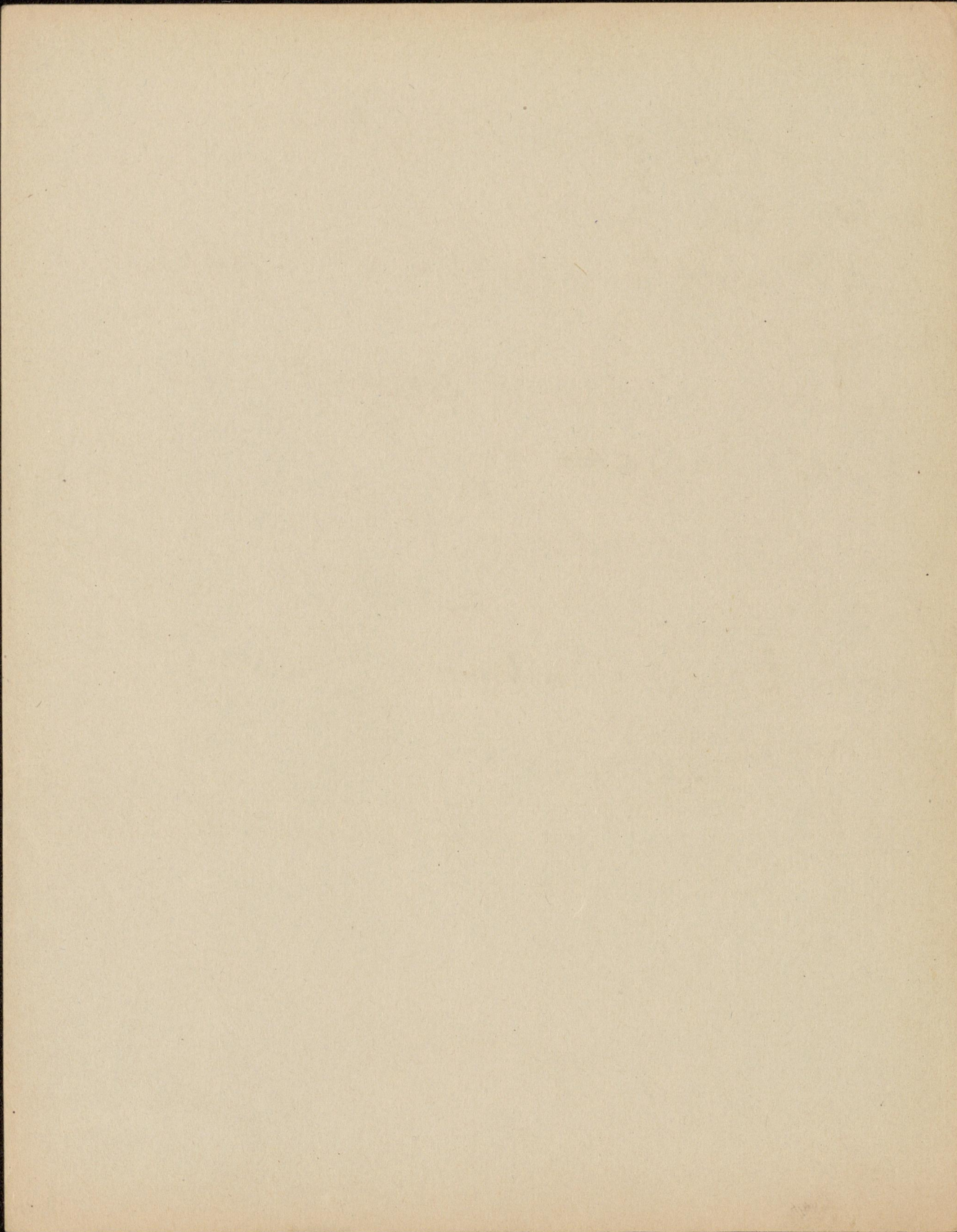
und umgekehrt

Es sei $b, a_1, a_2, \dots$ — — — zur Folge $a+b$.

$$b(x-1)^k + \sum_{n \geq 1} a_{n-1} (x-n)^k = b(x-1)^k + \sum_{n \leq x-1} a_n (x-1-n)^k$$

$$\left(\frac{x-1}{x}\right)^k \cdot b + \frac{\sum a_{n-1} (x-n)^k}{(x-1)^k} \left(\frac{x-1}{x}\right)^k$$

Veränderungen zweier Nachbarelemente und daher jede endliche Permutation ändern an Summenwerte nichts.



In der Theorie d. Dirichlet'schen Reihen folgende Tats:

Wenn $\sum_{n \leq x} a_n$ konvergent oder beschränkt, dann

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$ konvergent für $\Re(s) > 0$ und gleichmäßig konvergent in jedem Gebiet in Innern

Verallgemeinerung:

Wenn $\sum a_n$ summabel (ϕ, k) oder beschränkt s. (ϕ, k) ,

dann $\sum \frac{a_n}{n^s}$ summabel (ϕ, k) für $\Re(s) > 0$ und gleichmäßig summabel in Innern.

I. h. Wenn $\sum \frac{a_n}{n^s}$ summabel (ϕ, k) für s_0 , dann auch für $\Re(s) > \Re(s_0)$ und dort analytisch

Existenz der Summabilitätsabszisse λ_k der k -ten Ordnung.

a) $\lambda_{k+1} \leq \lambda_k$ Summabilitätsabszisse k -ten Ordnung.

b) Die Dicke des Streifens k -ten Ordnung ist höchstens 1 und nimmt monoton mit $\frac{1}{k}$ ab.

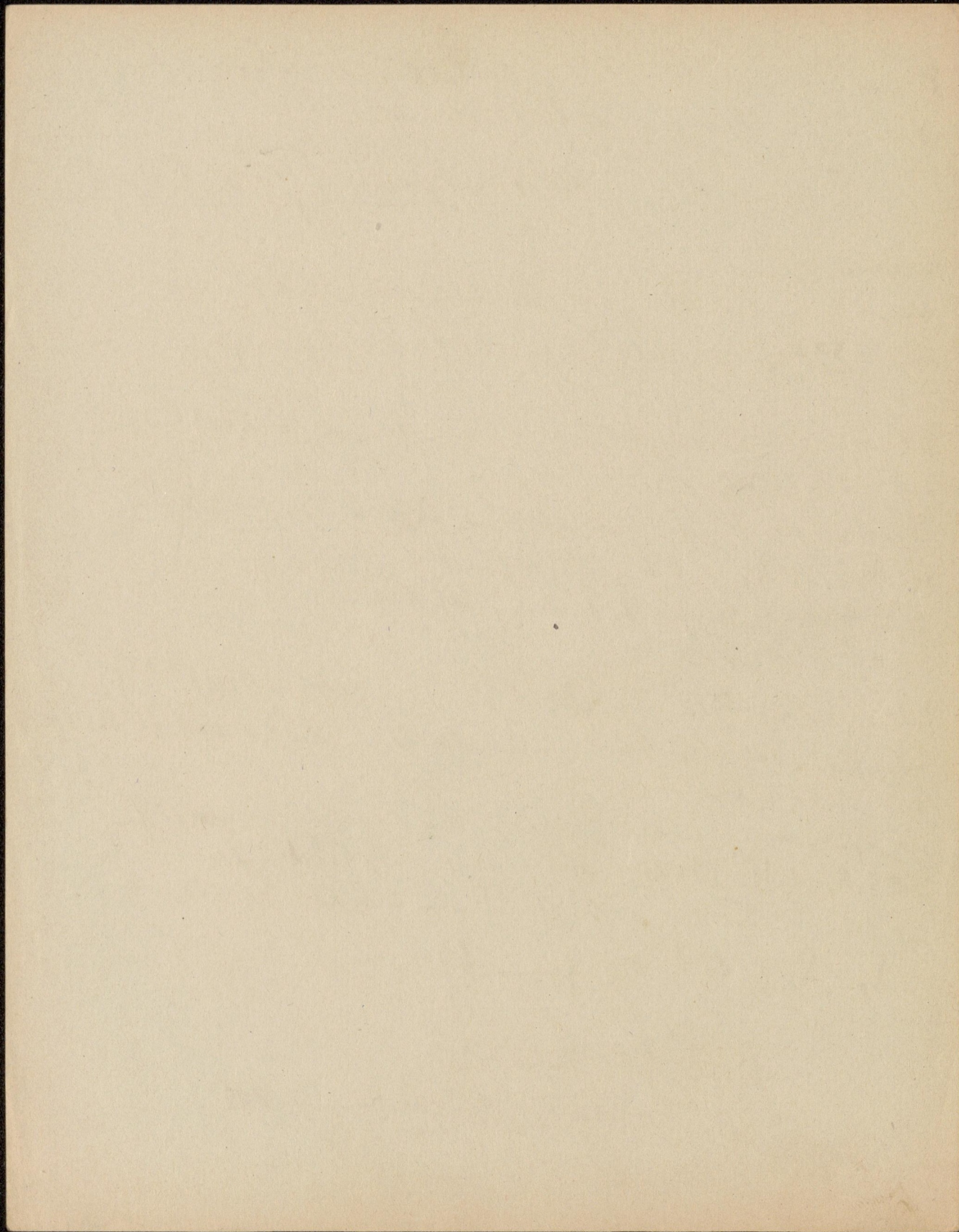
Endlich: Wo die Reihe summabel (ϕ, k) ist, ist $\phi(s) = O(|t|^{k+1})$

Andersseits: Wenn $\phi(s) = O(|t|^{k-\epsilon})$ und rechts davon, dann ist $\phi(s)$ die Reihe summabel (ϕ, k)

In $\sigma_0 = \lambda_0$ Konvergenzabszisse, so kann es aber nicht vorkommen, dass für $\sigma \geq \lambda_0 - 1 - \delta$ ($\delta > 0$) $\phi(s)$ regulär und $O(|t|)$ ist. Denn dann würde $\phi(s)$ für $\sigma > \lambda_0 - 1 - \frac{\delta}{2} = O(|t|^{1-\frac{\delta}{2}})$ sein und daher $\lambda_1 \leq \lambda_0 - 1 - \frac{\delta}{2}$, $\lambda_0 - \lambda_1 \geq 1 + \frac{\delta}{2} > 1$ gegen b).

Bohr, J. Math. Naturw. 1909.

Bohr und Riesz, Comptes Rendus 1909



Der kleine ϵ -Landau'sche Konvergenzatz.

(52)

- 1) Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$ habe ein Konvergenzgebiet
 die Funktion $f(s)$ sei regulär für $\sigma > \eta$ und hier sei gleichmäßig
 $f(s) = O(|t|^k)$ für $\sigma > \eta$.

Dann konvergiert die Reihe für $\sigma > \eta + k$

- 2) Überdies sei $a_n = O(n^{\delta})$ für alle $\delta > 0$.

Dann konvergiert die Reihe für $\sigma > \frac{\eta+k}{1+k} = \eta - 1 + \frac{\eta-1}{1+k}$

Lehmer, Math. Ann. 66. (1909)
 Bohr, Paley 32 (1914).

Alle Sei $\kappa(v) = \eta > \eta$.

Für alle hinreichend kleine positive ϵ ist, wenn man ein ganzes $k > k$

$$\int_{\epsilon-i\infty}^{\epsilon+i\infty} \frac{y^s}{s^{m+1}} f(s+v) ds = \frac{2\pi i}{m!} \sum_{n \leq y} \frac{a_n}{n^v} (\log y - \log n)^m$$

oder für $y = e^x$

$$\int_{\epsilon-i\infty}^{\epsilon+i\infty} \frac{e^{sx}}{s^{m+1}} f(s+v) ds = \frac{2\pi i}{m!} \sum_{n \leq e^x} \frac{a_n}{n^v} (x - \log n)^m$$

$$= 2\pi i \Phi(x).$$

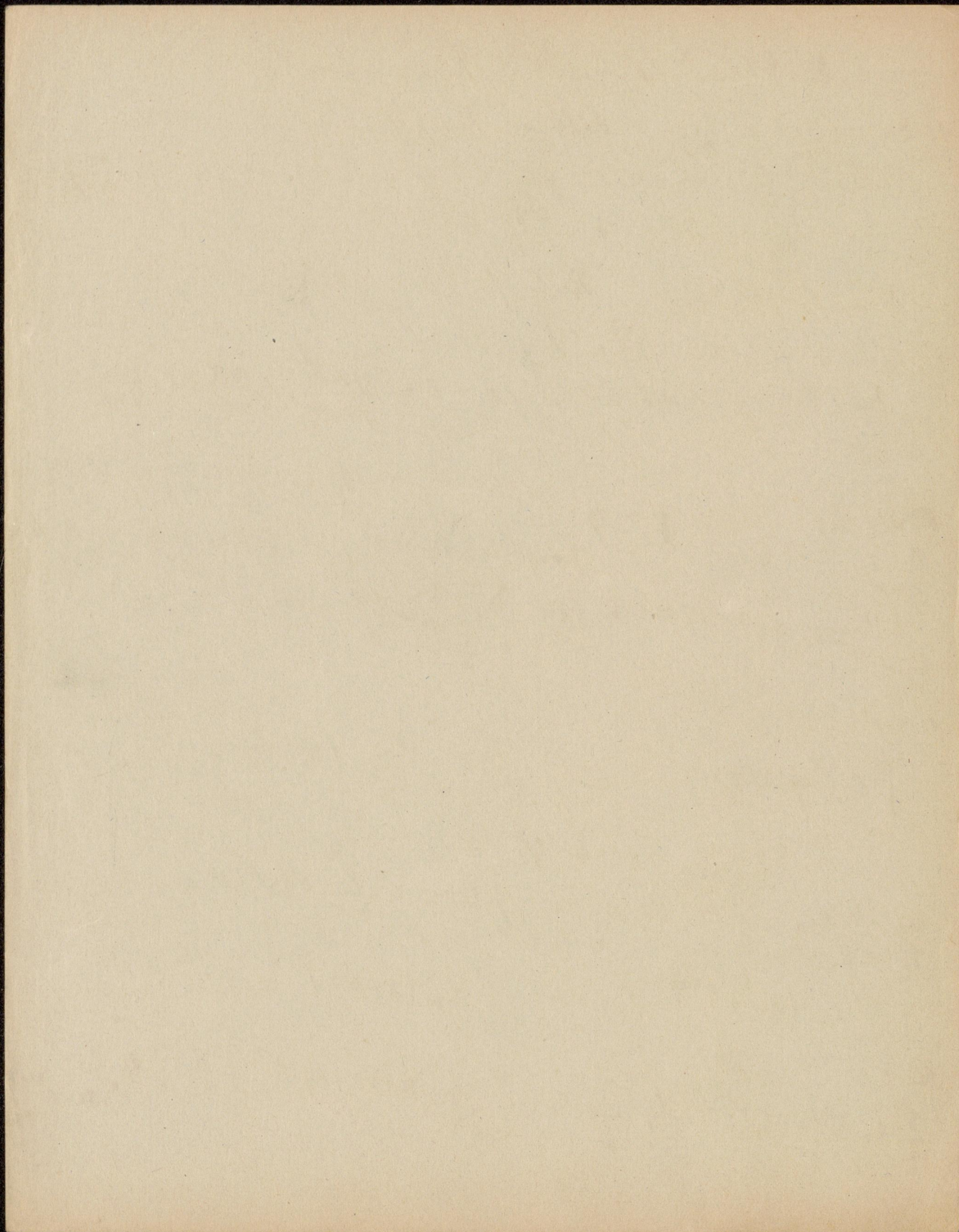
Man wähle $z = z(x)$ als positive GröÙe mit $\lim_{x \rightarrow \infty} z(x) = 0$

Es seien die Konstanten κ so bestimmt, daß

$$\sum_{v=0}^m \kappa_v (x+v)^m = 1, \text{ oder } \sum_{v=0}^m \kappa_v (x+vz)^m = z^m \quad \kappa_v = \binom{m}{v} (-1)^{m-v}$$

Dann ist

$$\sum_{v=0}^m \kappa_v \Phi(x+vz) = \frac{z^m}{m!} \sum_v \kappa_v \sum_{\substack{n \leq e^{x+vz} \\ n \leq e^x}} \frac{a_n}{n^v} (x+vz - \log n)^m + \frac{1}{m!} \sum_v \kappa_v \sum_{\substack{n \leq e^{x+vz} \\ e^x < n \leq e^{x+vz}}} \frac{a_n}{n^v} (x+vz - \log n)^m$$



$$\sum_{v=0}^m c_v \phi(x+rz) = z \sum_{\substack{n \leq e \\ e^x \leq n \leq e^{x+m}}} \frac{a_n}{n^v} + O\left(\sum_{\substack{n \leq e \\ e^x \leq n \leq e^{x+m}}} \left|\frac{a_n}{n^v}\right| \cdot z^m\right)$$

(53)

$$\int_{\substack{\varepsilon-i\omega \\ -\varepsilon-i\omega}}^{\substack{\varepsilon+i\omega \\ -\varepsilon+i\omega}} = \int_{-\varepsilon-i\omega}^{-\varepsilon+i\omega} + 2\pi i \left(\frac{f(v)x^m}{m!} + a_{m-1}x^{m-1} + \dots + a_1x + a_0 \right)$$

$$\int_{-\varepsilon-i\omega}^{-\varepsilon+i\omega} \frac{\sum_v c_v e^{\Delta(x+rz)}}{\Delta^{m+1}} f(\Delta+v) d\Delta + i\pi f(v)z = \sum_{\substack{n \leq e \\ e^x \leq n \leq e^{x+m}}} \frac{z^n}{n^v} + O\left(\sum_{\substack{n \leq e \\ e^x \leq n \leq e^{x+m}}} \left|\frac{a_n}{n^v}\right| z^m\right)$$

$$\left| \sum_v c_v e^{\Delta(x+rz)} \right| \leq e^{-\varepsilon x} \left| \sum_v c_v e^{\Delta v z} \right|$$

$$c_v = \binom{m}{v} (-1)^{m-v}$$

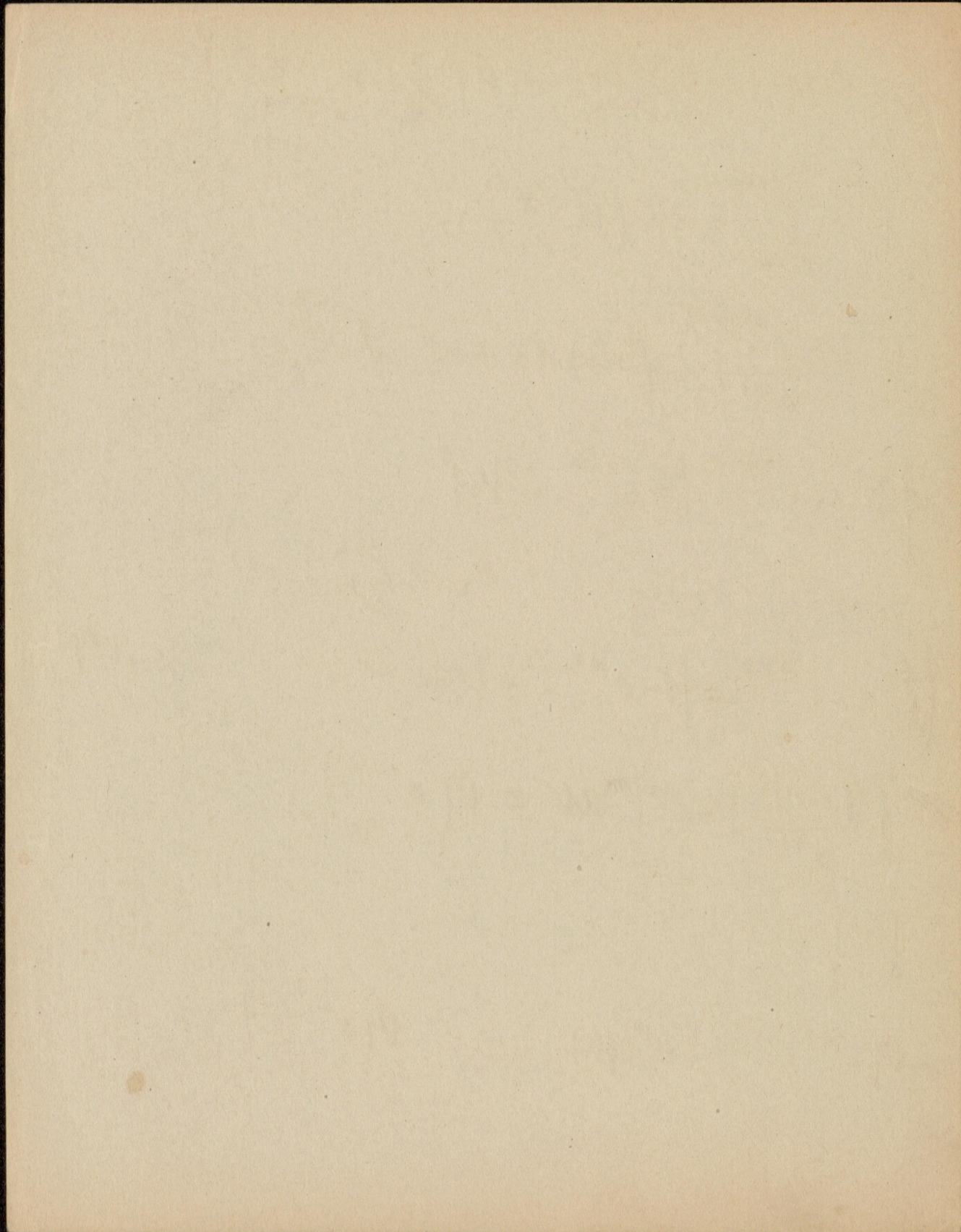
$$-\varepsilon + \gamma > \eta, \quad \gamma > \eta + \varepsilon$$

$$\left| \sum_{v=0}^m c_v e^{\Delta v z} \right| = |1 - e^{\Delta z}|^m \leq |1 - e^{\Delta z + \frac{\Delta z}{2!} + \dots}|^m \leq |1 - e^{\Delta z}|^m$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|f(\Delta+v)|}{|\Delta|^{m+1}} |1 - e^{\Delta z}|^m d\Delta = O(z^{m-k})$$

$$\int_0^1 + \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} + \int_{\frac{1}{2}}^{\infty}$$

$$O(e^{-\varepsilon x} z^{m-k}) + 2\pi i \left(f(v) - \sum_{\substack{n \leq e \\ e^x \leq n \leq e^{x+m}}} \frac{a_n}{n^v} \right) = O\left(z^m \sum_{\substack{n \leq e \\ e^x \leq n \leq e^{x+m}}} \left|\frac{a_n}{n^v}\right|\right)$$



$$f(v) - \sum_{n \leq e^x} \frac{a_n}{n^v} = O(e^{-\varepsilon x} z^{-k}) + O\left(\sum_{e^x < n \leq e^{x+\eta}} \left|\frac{a_n}{n^v}\right|\right)$$

(54)

$$\varepsilon < \gamma - \eta$$

$$1) \gamma > \eta + k, \text{ also } \gamma > \varepsilon + \eta$$

$$\gamma > \eta + k$$

$$\gamma - \eta > k$$

Man wähle z so, dass die Summe leer ist, d.h. $e^x (e^{\eta z} - 1) < 1$,

$$\lim z e^x = 0, \quad z = e^{-\rho x} \quad \rho > 1.$$

$$e^{-\varepsilon x} z^{-k} = e^{-\varepsilon x + k\rho x} = e^{-x(\varepsilon - k\rho)}$$

$$\varepsilon > k\rho > k$$

Aber man ε zwischen k und $\gamma - \eta$ gewählt werden, was möglich ist.

$$2) a_n = O(n^\delta) \text{ für alle } \delta > 0.$$

$$\text{Sei } \gamma > \frac{\eta + k}{1 + k} = 1 - \frac{1 - \eta}{1 + k}$$

$$\sum_{e^x < n \leq e^{x+\eta}} \left|\frac{a_n}{n^v}\right| = O\left(\sum \frac{1}{n^{\gamma-\delta}}\right) = O\left(\int_{e^x}^{e^{x+\eta}} \frac{du}{u^{\gamma-\delta}}\right) = O\left(e^{-(\gamma-\delta-1)x} (e^{(\gamma-\delta-1)\eta} - 1)\right)$$

$$= O\left(z e^{-(\gamma-\delta-1)x}\right)$$

$$\lim z e^{(\gamma-1)x - \delta x} = 0, \quad z = e^{(1-\gamma)x + \frac{\delta}{\varepsilon} x}$$

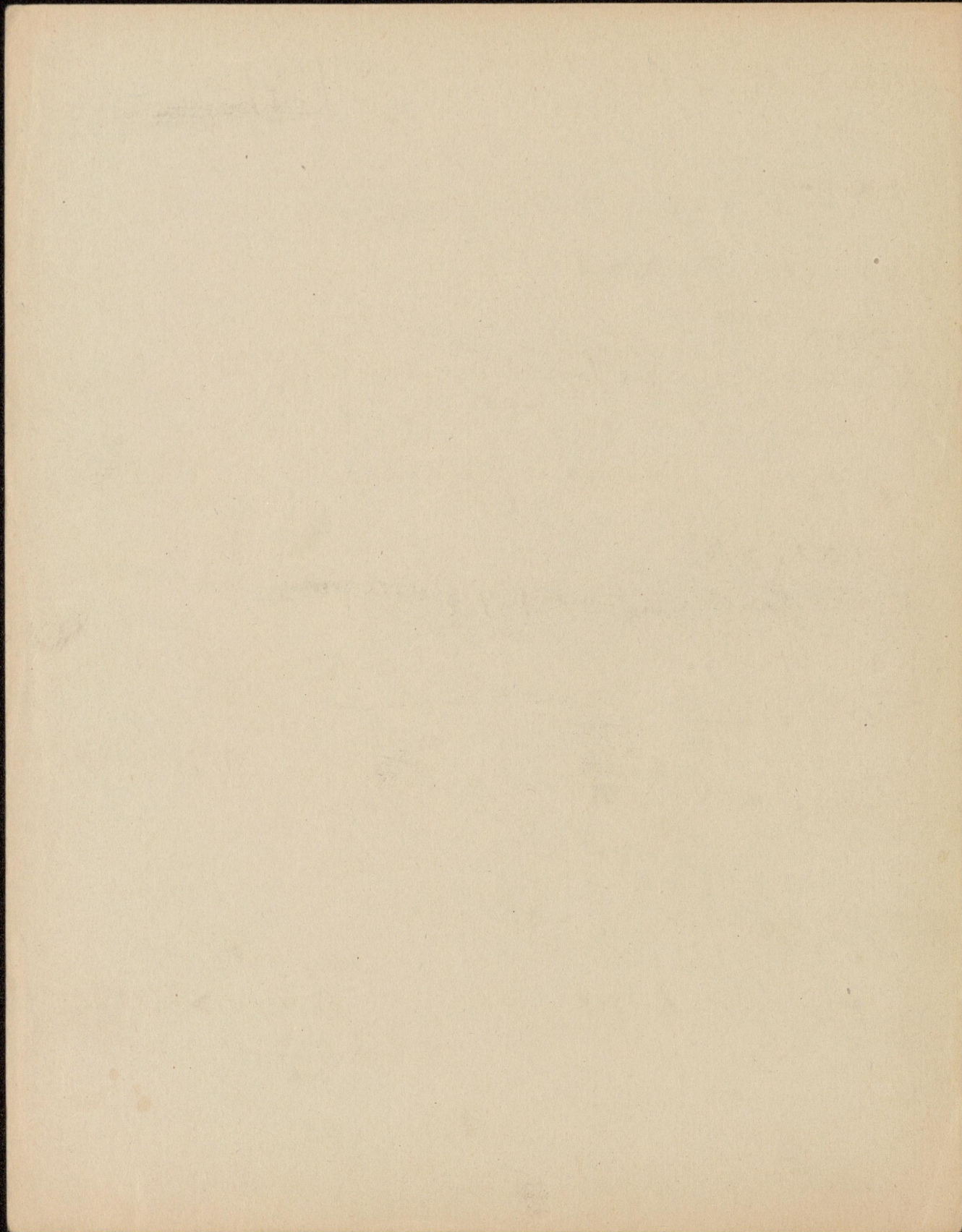
$$e^{-\varepsilon x} z^{-k} = e^{-\varepsilon - k(1-\gamma)x - \frac{k\delta}{\varepsilon} x}$$

$$k(1-\gamma) + \varepsilon \geq 0.$$

$$\varepsilon \geq k(\gamma-1) > k\left(\frac{\eta + k - 1}{1 + k}\right)$$

$$\varepsilon = k \frac{\eta - 1}{1 + k} + \varepsilon'$$

$$\gamma - \eta$$



$$\sum_{c^x < n \leq e^{x+nt}} \left| \frac{a_n}{n^s} \right| = O \left(e^{-(\gamma-\delta-1)x} z \right)$$

55

~~es ist $\gamma < 1$ vorausgesetzt~~
~~nehm.~~

~~Sei $\gamma > \frac{\eta+k}{1+k}$, dann ist $\gamma > \frac{\eta+k}{1+k}$~~

oder
für die Fehlglied ist $O(e^{-\varepsilon x} z^{-k})$, wo $-\varepsilon + \gamma > \eta$ sein muss, d.h.

~~$\gamma - \eta > \varepsilon$, dann ist $\gamma - \eta > \frac{\eta+k}{1+k} - \eta = \frac{k}{1+k}(1-\eta)$~~
 ~~$\gamma > \frac{\eta+1}{1+k}$~~

Man setze z so an, dass

$$z e^{-(\gamma-\delta-1)x} \rightarrow 0, \text{ und } z e^{-1 - \frac{\varepsilon}{k}x} \rightarrow 0$$

$$\boxed{\varepsilon = \gamma - \eta - \varepsilon'} \quad (z' > 0).$$

$$\varepsilon < \gamma - \eta$$

$$\varepsilon = \gamma - \eta$$

~~$z = e^{(\gamma-2\delta-1)x}$ $z = e^{\frac{\varepsilon}{k}x}$~~

~~$z^{-1} e^{-\frac{\varepsilon}{k}x} = e^{-(\gamma-2\delta-1)x - \frac{\varepsilon}{k}x} = e^{-x(\gamma-1+\frac{\varepsilon}{k}-2\delta)}$~~

$$z e^{-(\gamma-\delta-1)x} \rightarrow 0 \text{ und } z e^{-1 - \frac{\gamma-\eta}{k}x + \varepsilon'x} \rightarrow 0.$$

$$z = e^{-\frac{\gamma-\eta}{k}x + 2\varepsilon'x}$$

$$z e^{-(\gamma-\delta-1)x} = e^{-x\left(\frac{\gamma-\eta}{k} + \gamma - 1\right) + (\delta + 2\varepsilon')x}$$

Damit das geg. 0 gilt, muss $\frac{\gamma-\eta}{k} + \gamma - 1 > 0$ sein, d.h. $\gamma(1+k) - \eta - k > 0$,

d.h. $\gamma > \frac{\eta+k}{1+k}$

2

Bohr (Zähl. Nach. 1911) hat bewiesen:

$\xi(s)$ sind für $1 < \sigma < 1 + \varepsilon$ jeden Wert außer 0 unendl. oft an.

Noth-Landau (Math. Ann. 74 (1913)):

Kann die Riem. Verm. richtig ist, dann sind $\xi(s)$ für $\alpha < \sigma < \beta$ ($\frac{1}{2} < \alpha < \beta < 1$) auf jeden Wert außer 0 unendl. oft an.

Ähnlich: aus d. Riem. Verm. folgt

$$\frac{d^v \log \xi(s)}{ds^v} = O((\log \log t)^v) \quad \text{für } s = 1 + it, \quad v = 1, 2, \dots$$

Nach Littlewood ist

$$\text{bei Riem. Verm.} \quad \log \xi(s) = O_{\varepsilon}((\log t)^{2(1-\sigma')+\varepsilon}) \quad \text{für } \sigma \geq \sigma', \quad \frac{1}{2} < \sigma' \leq 1.$$

$$\sum_{n \leq x} \mu(n) = O_{\varepsilon}(x^{\frac{1}{2}+\varepsilon})$$

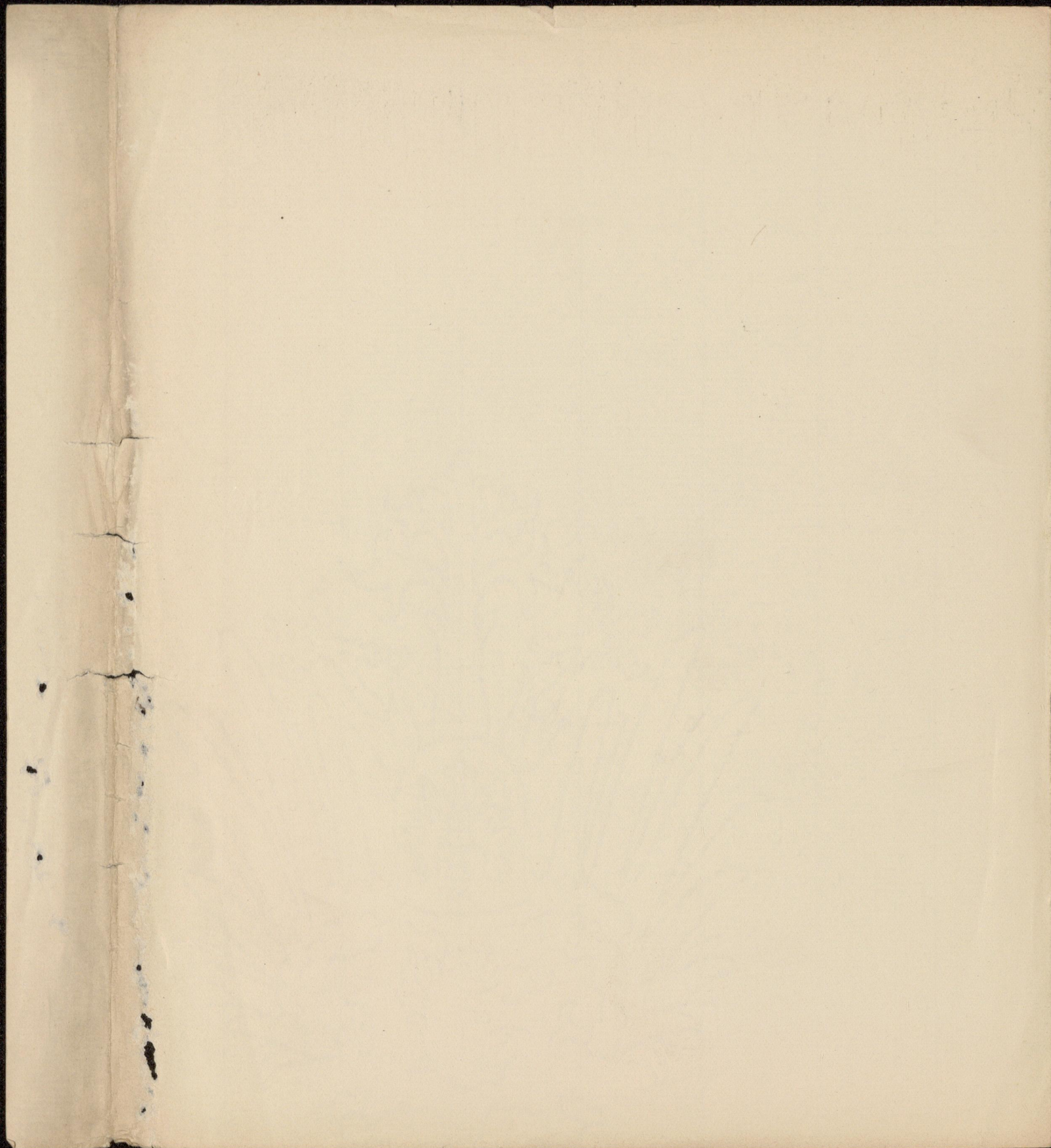
Nach Franel-Landau (Zähl. Nachr. 1924):

Kann man p_v die v -te λ -reduzierte Primzahl mit $\lambda \leq x$

$$\text{mit} \quad \sum_{n \leq x} \mu(n) = \sum_{v=1}^{\lambda(x)} c \quad \text{mit } p_v \quad \lambda(x) = \sum_{r \leq x} \varphi(r)$$

$$\eta_v = p_v - \frac{v}{\lambda(x)}$$

$$\text{dann ist} \quad \sum_{v=1}^{\lambda(x)} \eta_v^2 = O(x^{-1+\varepsilon}) \quad \text{äquivalent mit Riemann'scher Vermutung.}$$



Übergang von uneigentlichen zu eigentlichen Charakteren

1) Jeder uneigentliche Ch χ d. k definiert einen Charakter auf einem Teiler k' von k , χ^* .

a) $\chi^*(n) = \chi(n)$ wenn $(n, k) = 1$.

b) $\chi^*(n) = 0$, wenn $(n, k') > 1$.

c) Sei $(n, k') = 1$, aber $(n, k) \neq 1$.

Man setze $n = d_0 n'$, wo ist

$$(d_0 n', k') = 1, \quad (d_0 n', k) = d_0.$$

Man bestimme eine Zahl a , sodass

$$n \equiv a (k') \quad (a, k') = 1.$$

$$k = k' r$$

Man $a = n + x k' = d_0 n' + x k'$

$a = d_0 n' + x k' \equiv 1 (d_0)$, das geht, weil $(k', d_0) = 1$.

damit $(a, k') = 1$, $(a, d_0) = 1$, also

$$(d_0 n' + x k', d_0) = 1, \quad (d_0 n' + x k', k') = 1.$$

$$(d_0 n', k) = d_0, \quad (n', \frac{k}{d_0}) = 1$$

$$k = k' r$$

$$d_0 = (d_0 n', \frac{k}{d_0}) = (d_0 n' + x k', \frac{k}{d_0}) = 1, \quad (n', \frac{k' r}{d_0}) = 1$$

$$(x k' + d_0 n', \frac{k' r}{d_0} \cdot d_0) = (x k', d_0) = 1, \quad (d_0 n', \frac{k' r}{d_0}) = 1$$

$$1 = (x k' n', d_0 n', x k' \frac{r}{d_0}, k' r)$$

$$= (x k', d_0 n', k' r) = (d_0 n' + x k', d_0 n', k' r)$$

Satz. Ist $P(z)$ ein Polynom vom Grade m , das im Nullpunkt verschwindet, und auch von 0 verschiedene Nullstellen hat, und ist $\sum_{k=1}^{\infty} a_k z^{n_k} = f(z)$ eine Potenzreihe mit dem Konvergenzradius r ($0 < r < \infty$) und ganzen positiven Exponenten n_k , für die allgemein $\frac{n_k}{n_{k-1}} > m$ ist, so stellt $f(P(z)) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k P(z)^{n_k}$ eine Potenzreihe in z mit überkonvergenten Abschnittsfolgen dar.

In der Tat ist es dann klar, daß $\sum_{k=1}^{\infty} a_k P^{n_k}(z)$ für $|P(z)| < r$ gleich-

mäßig konvergiert und für $|P(z)| > r$ durchweg divergiert. Es genügt daher zu zeigen, daß unter den reellen geschlossenen Kurvenzügen, aus denen die Kurve $|P(z)| = 1$ besteht, kein Kreis vorkommen kann. Wäre nun aber $|P(z)|$ auf einem Kreise $\mathfrak{K}$ mit dem Radius r um z_0 konstant und wäre $P(z)$ innerhalb $\mathfrak{K}$ durchweg von 0 verschieden, so müßte $P(z)$ auf $\mathfrak{K}$ sowohl das Maximum als auch das Minimum des absoluten Betrages innerhalb $\mathfrak{K}$ und auf $\mathfrak{K}$ annehmen, daher eine Konstante sein. Hat aber $P(z)$ innerhalb $\mathfrak{K}$ Nullstellen $\zeta_1, \dots, \zeta_k$, mehrfache mehrfach aufgeführt, so dividiere man $P(z)$ durch

$$H(z) = \prod_k \frac{z - \zeta_k}{1 - \frac{z - z_0}{\zeta_k - z_0}}.$$

Dann hat $\frac{P(z)}{H(z)}$ innerhalb $\mathfrak{K}$ keine Nullstellen und auf der Peripherie von $\mathfrak{K}$ konstanten absoluten Betrag, ist daher konstant, und es folgt $P(z) = \text{Konst.} \cdot H(z)$. Da aber $P(z)$ ein Polynom ist, muß allgemein $\zeta_k = z_0$ sein und $P(z)$ könnte nicht zwei verschiedene Wurzeln haben, entgegen der Voraussetzung.

(Eingegangen am 8. 7. 1929.)

1. Fahrenkorr.

Oscar Brandstetter, Leipzig.

Mathematische Annalen.
Julius Springer, Berlin.

Eine solche Zahl $a = n \times k'$ gibt es.

Man wähle x so, daß n , dann

$$n + xk' \equiv 1 \pmod{M(k)}$$

so $M(k)$ das Produkt der Primfaktoren von k ist, die nicht in k' aufgehen.

Man stelle sich alle ^{ganzen} Primfaktoren ab, die in k' aufgehen, der Rest von M ,

denn ist $n + xk'$ teilerfremd zu M und $\text{Modul}(n, k') = 1$, auch
teilerfremd zu k'

also $n + xk'$ teilerfremd zu k

Man definiere

$$\chi^*(n) = \chi(a)$$

dies ist eindeutig definiert, weil aus

$$n \equiv b \pmod{k'} \quad (b, k) = 1$$

$$\text{folgt } a \equiv b \pmod{k'}$$

also $\chi(a) = \chi(b)$, weil χ teilerfremd zu M

Ist χ^* eigentlich nach k' , so ist es folgendes.

Andersfalls ist χ^* definiert χ^* bereits ein Charakter nach k' (Relativ- k')

10. Obige Überlegungen lassen eine weitgehende Verallgemeinerung zu, die wir noch kurz besprechen wollen, obgleich diese Verallgemeinerung mit den weiteren Untersuchungen nicht zusammenhängt und wir später all-gemeinere Ergebnisse auf anderem Wege erhalten werden, so daß der Schluß dieses Paragraphe auch übergangen werden kann.

Man kann z. B. eine aus dem Unendlichen kommende Jordansche Kurve in der Nähe des Einheitskreises durch eine Zickzacklinie ergänzen, die einen Teil der Peripherie des Einheitskreises (von der Gesamtlänge $< 2\pi$) wellenförmig approximiert, und dann die Ebene längs dieser Kurve (und ihrer Grenzpunkte) aufschneiden. Oder es sei G ein einfach zusammenhängendes beschränktes Gebiet, das den Einheitskreis ganz im Innern enthält. Man betrachte dann eine von der Peripherie des Einheitskreises ausgehende einfache Kurve, die im übrigen im Äußeren des Einheitskreises und innerhalb G bleibt und die ganze Berandung von G (topologisch gesprochen) spiralenartig approximiert. Auch das längs dieser Kurve aufgeschnittene Innere von G stelle das vollständige Regularitätsgebiet einer analytischen Funktion, die in ihrem gesamten Existenzgebiet durch eine geeignete Abschnittsfolge ihrer Nullpunktentwicklung dargestellt wird.

Allgemeinere und präzisere Formulierungen knüpfen an den Begriff des *irreduziblen Kontinuums zwischen zwei Punkten an*. Man nennt ein Kontinuum C *irreduzibel* zwischen den Punkten A und B , wenn es die Punkte A und B enthält und kein Teilkontinuum von C zugleich die beiden Punkte A und B enthalten kann. Allgemeinere bezeichnen wir ein Kontinuum C als ein *irreduzibles Verbindungskontinuum zwischen zwei fremden abgeschlossenen Punktmengen A und B* , wenn es sowohl Punkte aus A als auch Punkte aus B enthält, während kein Teilkontinuum von C zu gleicher Zeit Punkte aus A und B enthalten kann⁹⁾.

Es sei dann G ein einfach zusammenhängendes Gebiet, das den Einheitskreis ganz im Innern enthält, dagegen den unendlich fernen Punkt nicht im Innern enthält und übrigens zum einzigen Randpunkt haben kann. Es sei ferner C ein irreduzibles Verbindungskontinuum in der funktionentheoretischen Ebene zwischen der Peripherie des Einheitskreises E und dem Rand R von G , das zugleich diesen Rand *vollständig enthält*, dagegen nicht die ganze Peripherie des Einheitskreises. Entfernt man aus der Ebene alle Punkte von C , so ist dasjenige der übrigbleibenden (eo ipso einfach zusammenhängenden, da sie keine zwei getrennte Randkontinua haben können)

⁹⁾ Ein Satz von Z. Janiszewski und St. Mazurkiewicz besagt, daß jedes Kontinuum, das zwei Punkte a , b enthält, auch ein irreduzibles Kontinuum zwischen a und b als Teilkontinuum enthält. Die Hahn'sche Analyse der Primbestandteile eines irreduziblen Kontinuums [vgl. H. Hahn, Über irreduzible Kontinua, Sitzungsberichte der Wiener Akademie, Math.-phys. Klasse, Abt. II a, 130 (1921), S. 217—250] gestattet, diesen Satz ohne Schwierigkeiten dahin zu verallgemeinern, daß ein jedes Verbindungskontinuum zwischen zwei fremden geschlossenen Punktmengen A und B ein irreduzibles Verbindungskontinuum zwischen A und B als Teilkontinuum enthält.

156

Dirichlet'sche Reihen vom allgemeinen Typus.

$$0 \leq \lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 \dots, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = \infty$$

Korollar:

Wenn die Reihe $\sum a_n e^{-\lambda_n s}$ in einem Punkte s_0 konvergiert, so konvergiert sie gleichmäßig in jedem endlichen Gebiete, das im Inneren der Halbebene $\Re(s) > \sigma_0$ liegt.

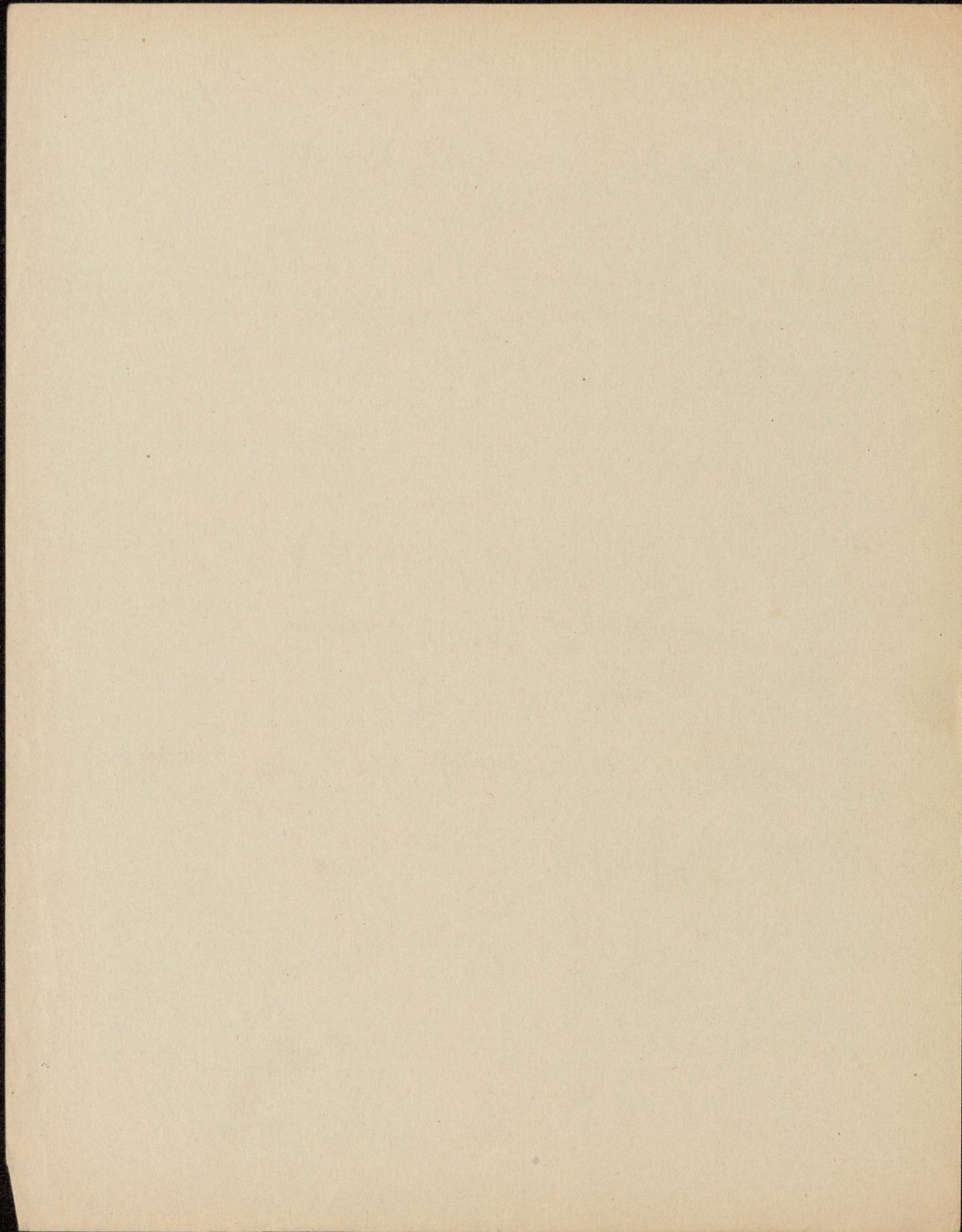
Man setze

$$\sum_{n \leq x} a_n e^{-\lambda_n s_0} = \varphi(x)$$

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{n+h} a_n e^{-\lambda_n s} &= \sum_{n=1}^{n+h} (\varphi(n) - \varphi(n-1)) e^{-\lambda_n (s-s_0)} \\ &= -\varphi(n-1) e^{-\lambda_n (s-s_0)} + \varphi(n+h) e^{-\lambda_{n+h} (s-s_0)} \\ &\quad + \sum_{n=1}^{n+h} \varphi(n) (e^{-\lambda_n (s-s_0)} - e^{-\lambda_{n+1} (s-s_0)}) \\ &= O(e^{-\lambda_n (s-s_0)}) + O(e^{-\lambda_{n+h+1} (s-s_0)}) + O\left(\sum_{n=1}^{n+h} \frac{1}{\lambda_n} \int_{\lambda_n}^{\lambda_{n+1}} e^{-u(s-s_0)} du\right) \\ &= O(e^{-\lambda_n (s-s_0)}) + [s-s_0] O\left(\int_{\lambda_n}^{\lambda_{n+h+1}} e^{-u(s-s_0)} du\right) \\ &= O(e^{-\lambda_n (\sigma-\sigma_0)}) + \frac{|s-s_0|}{|\sigma-\sigma_0|} O(e^{-\lambda_n (\sigma-\sigma_0)}) \end{aligned}$$

Konvergenztheoreme. Absolute Konvergenz.

$$\sum_1 \frac{(-1)^n}{n(\log n)^\sigma}, \quad \sum_n \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}(\log n)^\sigma}$$



$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\lambda + v)}{|\lambda|^{m+1}} (1 - e^{\lambda z})^m d\lambda = O(z^{m-k})$$

$$\frac{1}{z} + \frac{1}{z} + \frac{1}{z} = \frac{3}{z}$$

$$\sum_{k=0}^m c_k (x + rz)^m = z^m \quad \left| \quad \sum_{k=0}^m c_k (m+1-k) = 0 \quad \sum c_k r^2 \right.$$

$$\int \frac{f(\sigma + i\lambda + v)}{(\sigma + i\lambda)^{m+1}} \left| \sum_{k=0}^m c_k e^{\lambda rz} \right| d\lambda$$

$$\frac{1}{z} \quad x + rz$$

$$\int_0^1 = O(z^m)$$

$$\lambda z$$

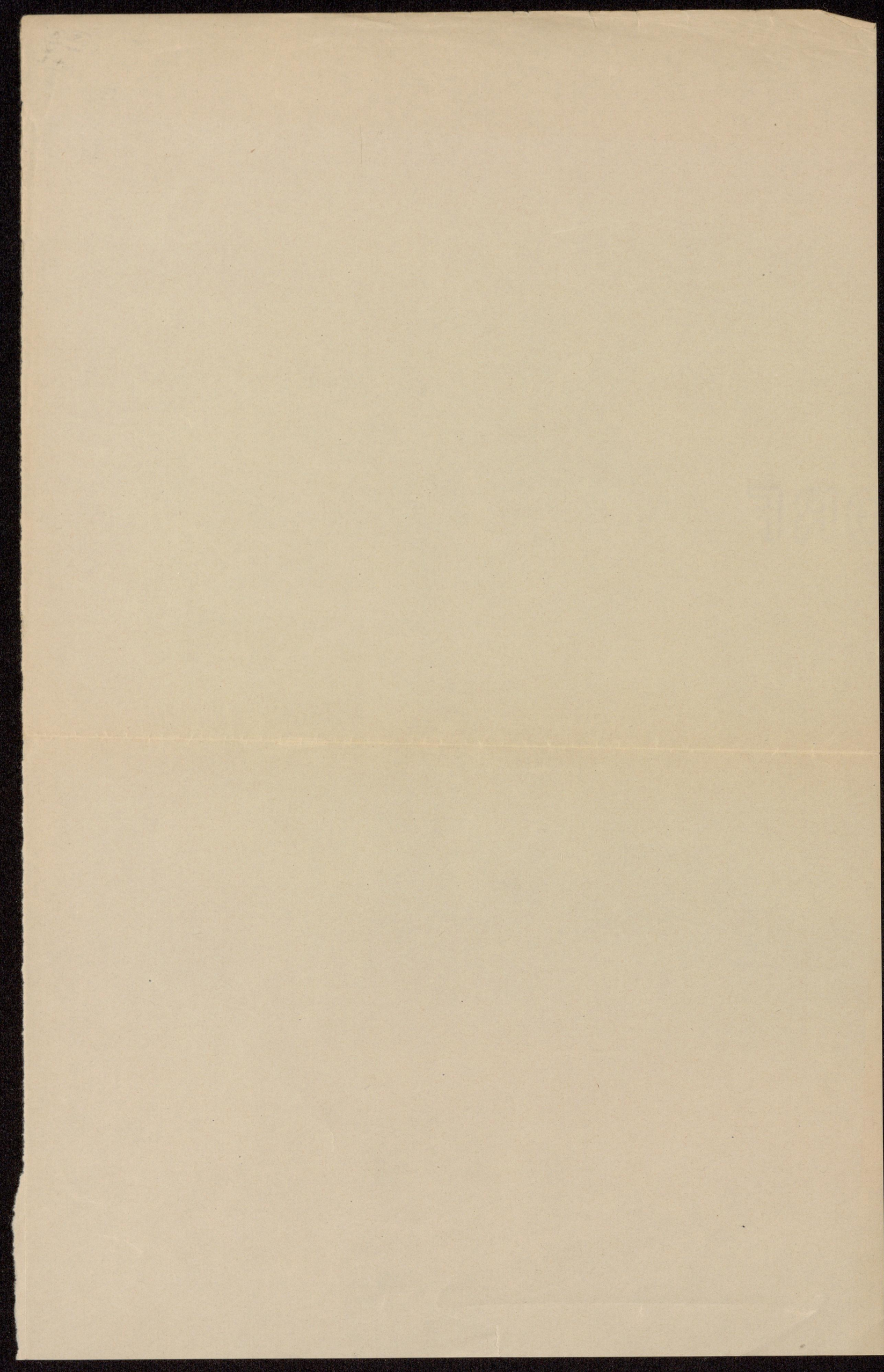
$$\frac{m}{\lambda z}$$

$$\int_1^{\frac{1}{z}} |\lambda|^{k-m-1} \left| \sum_{k=0}^m c_k e^{\lambda rz} \right| d\lambda$$

$$z^m \int_1^{\frac{1}{z}} |\lambda|^{k-m-1} |\lambda|^m d\lambda = z^m \int_1^{\frac{1}{z}} |\lambda|^{k-1} d\lambda$$

$$= O(z^{m-k})$$

$$\int_{\frac{1}{z}}^{\infty} |\lambda|^{k-m-1} d\lambda = O\left(\left(\frac{1}{z}\right)^{k-m}\right)$$



Die Dicke des Streifens bedingter Konvergenz ist höchstens

$$L = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\log n}{\lambda_n}$$

Sei L endlich ($L \geq 0$), dann ist λ_n reij, dann aus der Konvergenz für λ_0 , die absolute Konvergenz für $\lambda_0 + L + \delta$ ($\delta > 0$) folgt

$$a_n e^{-\lambda_n \lambda_0} = O(1)$$

$$a_n e^{-\lambda_n (\lambda_0 + L + \delta)} = O(e^{-\lambda_n (L + \delta)}) ; \text{ aber } \frac{\log n}{\lambda_n} \leq L + \frac{\delta}{2}$$

$$e^{-\lambda_n (L + \delta)} \leq e^{-\log n \frac{L + \delta}{L + \frac{\delta}{2}}} = \frac{1}{n^{\frac{L + \delta}{L + \frac{\delta}{2}}}} = \frac{1}{n^{1 + \varepsilon}}$$

Die Gesamtheit der allgemeinen Dirichlet-Reihen bildet einen Funktionenkörper.

Multiplikation nach der λ -Regel.

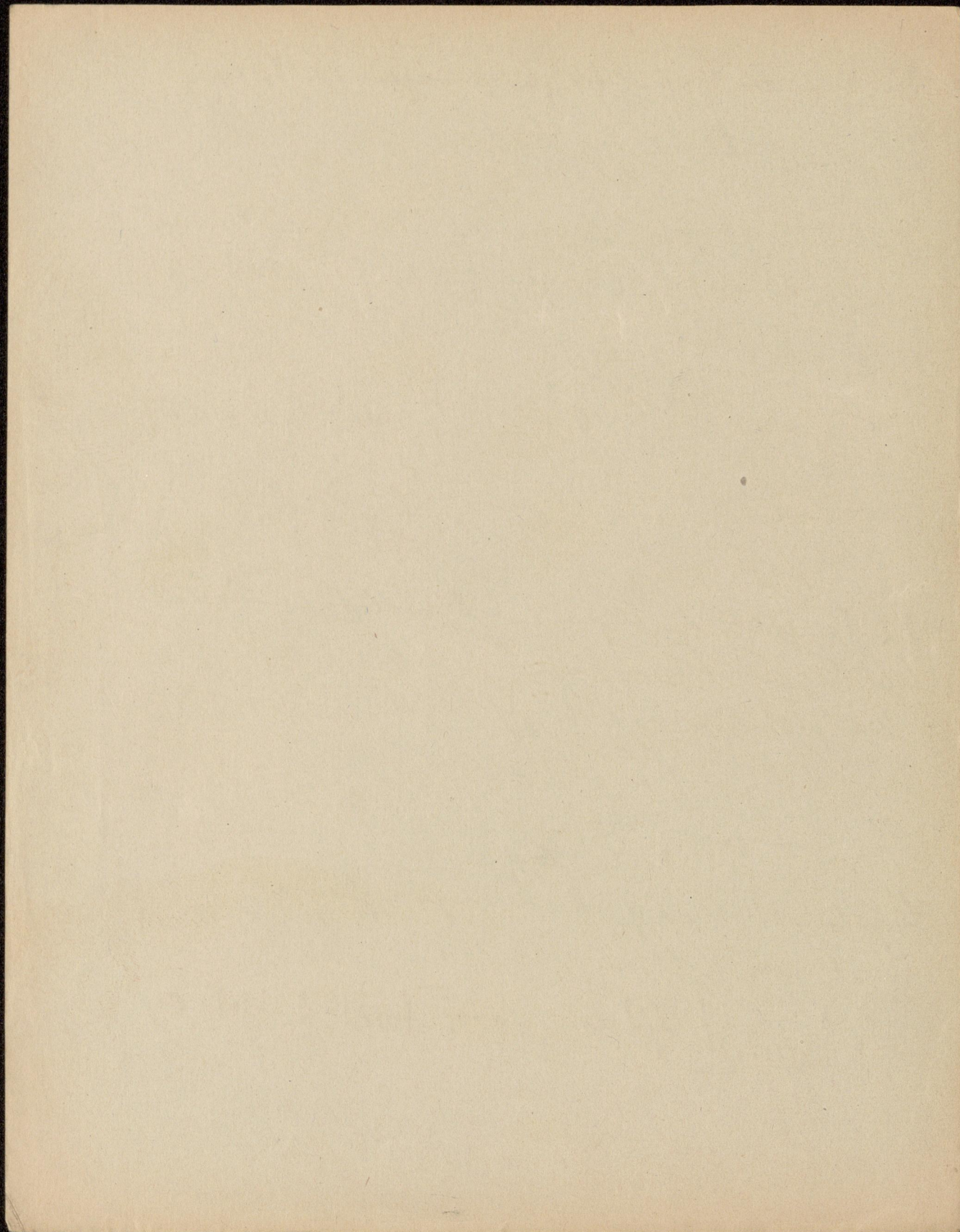
$$\sum \alpha_n \cdot \sum \beta_m = \sum f_r$$

$$f_r = \sum_{\lambda_n + \lambda_m = r} \alpha_n \beta_m$$

Singuläre Punkte auf der Konvergenzgrenze.

Formel von Mellin.

$$e^{-x} = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{\Gamma(s)}{x^s} ds \quad a > 0, \quad |\arg x| < \frac{\pi}{2}, \quad |x| > 0.$$



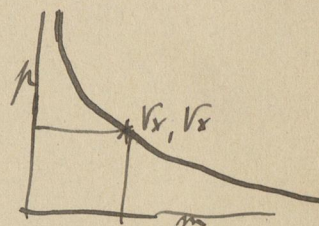
Das Teilbarproblem von Dirichlet.

(Dirichlet 1849, über die Verteilung der mittleren Werte in der Zahlentheorie).
Werke Bd. 2, 1.49.

$d(n)$ = Anzahl der Teile von n (incl. 1 und n).

$$d(n) = \sum_{m \cdot p = n} 1$$

$$D(x) = \sum_{1 \leq n \leq x} d(n) = \sum_{\substack{m \cdot p \leq x \\ m \geq 1 \\ p \geq 1}} 1$$



Hyperbelproblem.

1) Elementare Methoden.

$$\sum_{1 \leq m \cdot p \leq x} 1 = \sum_{\substack{m \cdot p \leq x \\ 1 \leq p \leq \sqrt{x}}} 1 + \sum_{\substack{m \cdot p \leq x \\ \sqrt{x} < p \leq x}} 1 = g_1 + \sum_{\substack{m \cdot p \leq x \\ 1 \leq m < \sqrt{x}}} 1$$

$$= 2 \sum_{\substack{m \cdot p \leq x \\ 1 \leq p \leq \sqrt{x}}} 1 - \sum_{\substack{m \cdot p \leq x \\ m = \sqrt{x}}} 1 = 2 \sum_{\substack{m \cdot p \leq x \\ 1 \leq p \leq \sqrt{x}}} 1 - O(\sqrt{x})$$

$$= 2 \sum_{p=1}^{\sqrt{x}} \left[\frac{x}{p} \right] + O(\sqrt{x}) = 2x \sum_{p=1}^{\sqrt{x}} \frac{1}{p} + 2 \sum_{p=1}^{\sqrt{x}} \left(\left[\frac{x}{p} \right] - \frac{x}{p} \right) + O(\sqrt{x})$$

$$= 2x \sum_{p=1}^{\sqrt{x}} \frac{1}{p} + O(\sqrt{x}) = 2x (\log \sqrt{x} + \gamma + o(1)) + O(\sqrt{x})$$

$$= x \log x + 2\gamma x + o(x)$$

~~$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \log n \right\} = \gamma.$~~

~~$\log n = \sum_{k=1}^{n-1} (\log(n+1) - \log n) = \sum_{k=1}^{n-1} \log \left(1 + \frac{1}{n} \right) = \log 2 + \sum_{k=2}^{n-1} \frac{1}{k} = \frac{n-1}{2} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} + \dots$~~

Die Kirchliche
a) für die kirchliche Gemeinde

$$\sum_{n=1}^u \frac{1}{n} = \sum_{n=1}^u \int_n^{n+1} \frac{dx}{n} = \sum_{n=1}^u \int_n^{n+1} \left(\frac{dx}{n} - \frac{dx}{x} \right) + \int_1^{u+1} \frac{dx}{x}$$

159

$$= \log(u+1) + \sum_{n=1}^u \int_0^1 \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{x+n} \right) dx$$

$$= \log(u+1) + \int_0^1 x \sum_{n=1}^u \frac{1}{n(n+x)} dx = \log(u+1) + \int_0^1 x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+x)} dx - \int_0^1 x \sum_{n=u+1}^{\infty} \frac{1}{n(n+x)} dx = \log u + \theta + O\left(\frac{1}{u}\right)$$

$$g(x) = 2x \left(\log \sqrt{x} + \theta + O\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) \right) + O(\sqrt{x})$$

$$= x \log x + 2\theta x + O(\sqrt{x}).$$

$$\boxed{d(n) = O(\sqrt{n})}$$

$$b) \xi(s)^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d(n)}{n^s}$$

$$g(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \xi(s)^2 x^s ds$$

$$\xi(s) = \frac{1}{s-1} + \gamma + (s-1) \gamma_1 + \dots$$

$$\xi(s)^2 = \frac{1}{(s-1)^2} + \frac{2\gamma}{s-1} + O(1) \gamma_1 \gamma$$

$$\xi'(s) = \frac{-1}{(s-1)^2} + \gamma_1 \gamma$$

$$\xi(s)^2 + \xi'(s) - 2\gamma \xi(s) \text{ reg. bei } s=1.$$

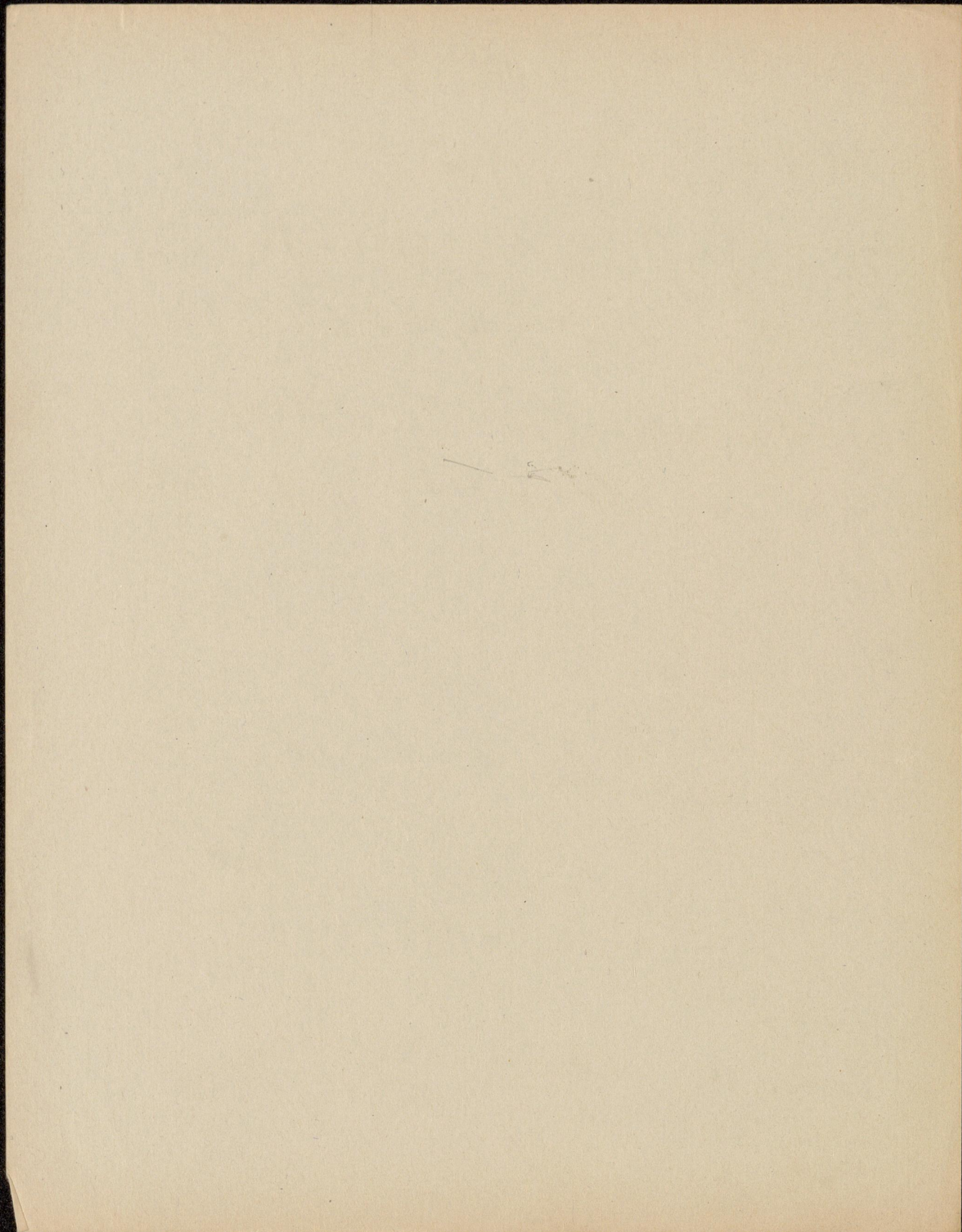
1-26

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d(n) - \log n - 2\gamma}{n^s} = \eta(s)$$

$$\xi(s) = O\left(t^{\frac{1}{2}-\sigma+\epsilon}\right)$$

c) Voronoi 1903 Grelle 126.
Landau, Götting. Nachr. 1912.

$$O(x^{\frac{1}{3}} \log x) \\ O(x^{\frac{1}{3}+\epsilon})$$



d) Hardy, London Proceedings 1915.

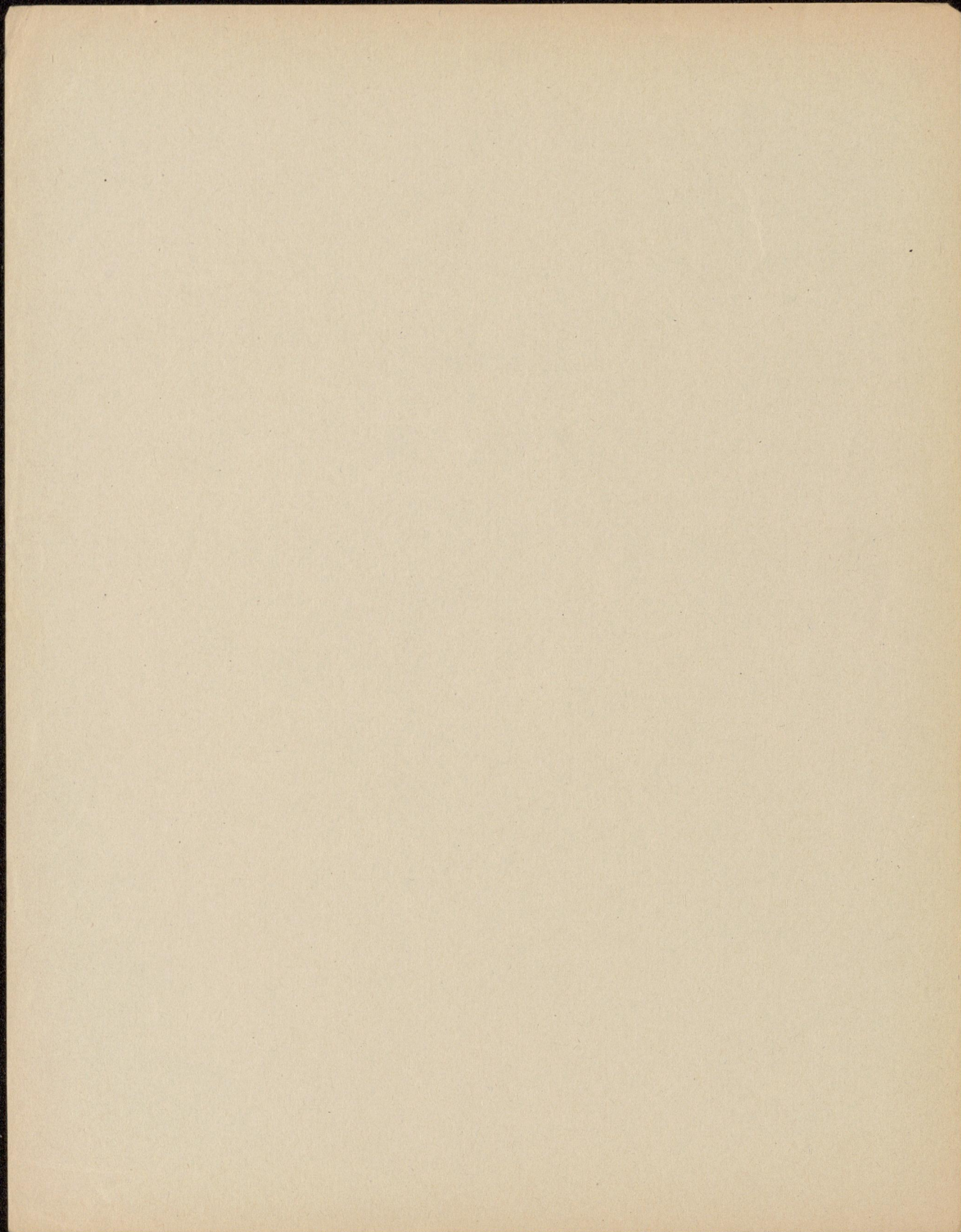
$$F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d(n)}{\sqrt{n}} e^{-s\sqrt{n}}$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{\Gamma(z)}{\Lambda^z} \zeta\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}z\right)^2 dz$$

$$= \frac{-4 \log \Lambda}{\Lambda} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\Lambda)^n}{n!} \zeta\left(\frac{1}{2} - \frac{n}{2}\right)^2 + \frac{1}{2\pi i} \int_{-p-\frac{1}{2}-i\infty}^{-p-\frac{1}{2}+i\infty} \dots dz$$

für $0 < \Lambda < 4\pi$ ist $\lim_{p \rightarrow \infty} F_p = 0$.

160



$$g(s) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-s)^n}{n!} \left\{ \left(\frac{1-n}{2} \right)^2 \right\} \quad \left| \quad \xi(1-s) = 2 \cos \frac{\pi s}{2} (2\pi)^{-\frac{s+1}{2}} \Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right) \xi(s) \right.$$

$$\xi\left(\frac{1-n}{2}\right) = 2 (2\pi)^{-\frac{n+1}{2}} \cos \frac{n+1}{4} \pi \cdot \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right) \xi\left(\frac{n+1}{2}\right)$$

$$\cos^2 \frac{n+1}{4} \pi = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos \frac{n+1}{2} \pi = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} (e^{+i\frac{n+1}{2}} + e^{-i\frac{n+1}{2}})$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} i^{n+1} + \frac{1}{4} (-i)^{n+1}$$

$$g(s) = 4 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-s)^n}{n!} (2\pi)^{-(n+1)/2} \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right) \xi\left(\frac{n+1}{2}\right) \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} i^{n+1} + \frac{1}{4} (-i)^{n+1} \right)$$

$$+ \xi\left(\frac{1}{2}\right)^2 - s \xi(0)^2$$

$$= A + B s$$

$$+ \frac{1}{\pi} \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{-s}{2\pi} \right)^n \frac{\Gamma^2\left(\frac{n+1}{2}\right)}{n!} \xi^2\left(\frac{n+1}{2}\right) \quad \left(= \frac{1}{\pi} M\left(\frac{-s}{2\pi}\right) \right)$$

$$+ \frac{i}{2\pi} \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{-is}{2\pi} \right)^n \frac{\Gamma^2\left(\frac{n+1}{2}\right)}{n!} \xi^2\left(\frac{n+1}{2}\right)$$

$$- \frac{i}{2\pi} \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{is}{2\pi} \right)^n \frac{\Gamma^2\left(\frac{n+1}{2}\right)}{n!} \xi^2\left(\frac{n+1}{2}\right)$$

$$= A + B s + \frac{1}{\pi} M\left(\frac{-s}{2\pi}\right) + \frac{i}{2\pi} M\left(\frac{-is}{2\pi}\right) - \frac{i}{2\pi} M\left(\frac{is}{2\pi}\right)$$

[Faint, illegible handwriting and markings on aged paper]

$$M(s) = \sum_{n=2}^{\infty} c_n s^n \left\{ \left(\frac{n+1}{2} \right)^2 \right\} \quad \left(c_n = \frac{\Gamma^2\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma(n+1)} \right) \quad 162$$

$$M(s) = \sum_{n=2}^{\infty} c_n s^n \sum_{q=1}^{\infty} \frac{d(q)}{q^{\frac{n+1}{2}}}$$

$$= \sum_{q=1}^{\infty} \frac{d(q)}{\sqrt{q}} \sum_{n=2}^{\infty} c_n \left(\frac{s}{\sqrt{q}} \right)^n = \sum_{q=1}^{\infty} \frac{d(q)}{\sqrt{q}} \mathcal{L}\left(\frac{s}{\sqrt{q}}\right)$$

$$\mathcal{L}(s) = \sum_{n=2}^{\infty} s^n \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)^2}{\Gamma(n+1)}$$

$$\frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)} = B(a,b) = \int_0^1 u^{a-1} (1-u)^{b-1} du$$

$$|s| < 2$$

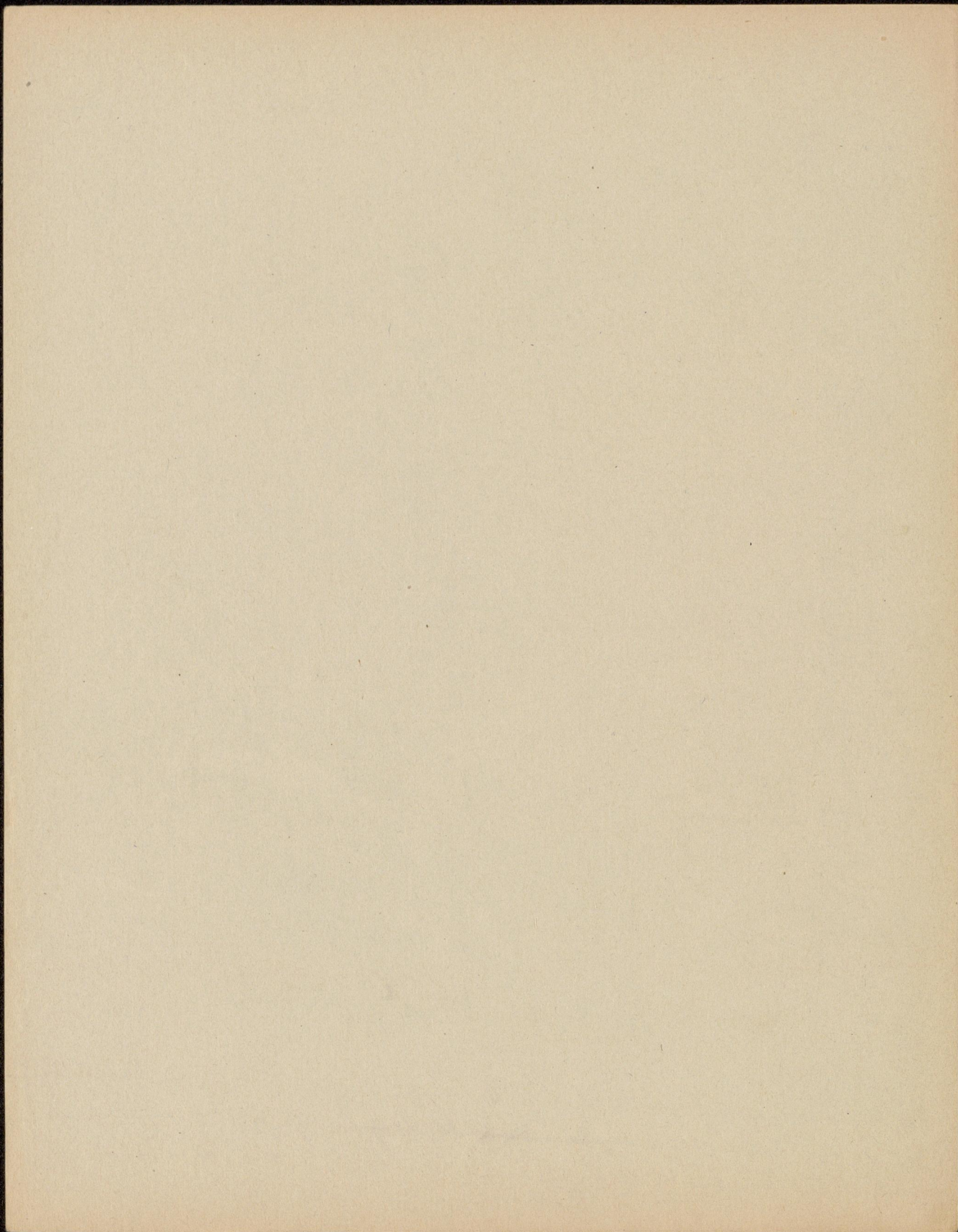
$$c_n \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)^2}{\Gamma(n+1)} = \int_0^1 u^{\frac{n-1}{2}} (1-u)^{\frac{n-1}{2}} du \geq$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n s^n = \int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} s^n u^{\frac{n-1}{2}} (1-u)^{\frac{n-1}{2}} du = \int_0^1 \frac{u^{-\frac{1}{2}} (1-u)^{-\frac{1}{2}} du}{1 - s u^{\frac{1}{2}} (1-u)^{\frac{1}{2}}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{1 - s \sin \varphi \cos \varphi} = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \frac{d\varphi}{1 - \frac{s}{2} \sin \varphi}$$

$$= \frac{8}{\sqrt{4-s^2}} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{2+s}{2-s}}$$

$$= \frac{8}{\sqrt{4-s^2}} \cdot \frac{1}{2i} \log \frac{1}{2} (s + i\sqrt{4-s^2}) \quad (= \pi \text{ bei } s=0.)$$

Das Argument vom Logarithmus ist 0 nur für den einen Zweig im Unendlichen.
Bei $s = -2$ hat der bei 0 ~~angewandte~~ ~~und~~ ~~von~~ den Wert π annehmende
Zweig keine Unendlichkeitsstelle und ist sogar regulär bei $s = -2$, wie aus der arctg-Reihe
hervorgeht.



$M(s)$ hat in Endlichen nur die Singularitäten

$$\frac{s}{\sqrt{q}} = \pm 2, \quad s = \pm 2\sqrt{q} \quad (q=1, 2, \dots)$$

Somit hat $\mathcal{G}(s)$ ~~die~~ nur die Singularitäten

$$s = \pm 2\sqrt{q}; 2\pi \pm 2i\sqrt{q}; 2\pi$$

$$\mathcal{G}(s) = A + Bs + \frac{1}{\pi} M\left(\frac{-s}{2\pi}\right) + \frac{i}{2\pi} M\left(\frac{-is}{2\pi}\right) - \frac{i}{2\pi} M\left(\frac{is}{2\pi}\right)$$

$M\left(\frac{-s}{2\pi}\right)$ ist def. für $s = +4\pi\sqrt{q}$ reguläre Zweig, d. h. regul. f. $K(s) > 0$.

$M\left(\frac{-is}{2\pi}\right)$ ist def. für $s = \frac{2\pi}{-i} \cdot 2\sqrt{q}$ reguläre Zweig, d. h. regul. bei $-4\pi i\sqrt{q}$

$M\left(\frac{is}{2\pi}\right)$ ist regul. bei $s = +4\pi i\sqrt{q}$.

$$\mathcal{L}(s) = \frac{2\pi}{\sqrt{2-s}} \text{ blüht endlich bei } s \rightarrow 2$$

$$\mathcal{L}\left(\frac{s}{\sqrt{q}}\right) = \frac{2\pi q^{\frac{1}{4}}}{\sqrt{2\sqrt{q}-s}} = O(1) \text{ f. } s \rightarrow 2\sqrt{q}.$$

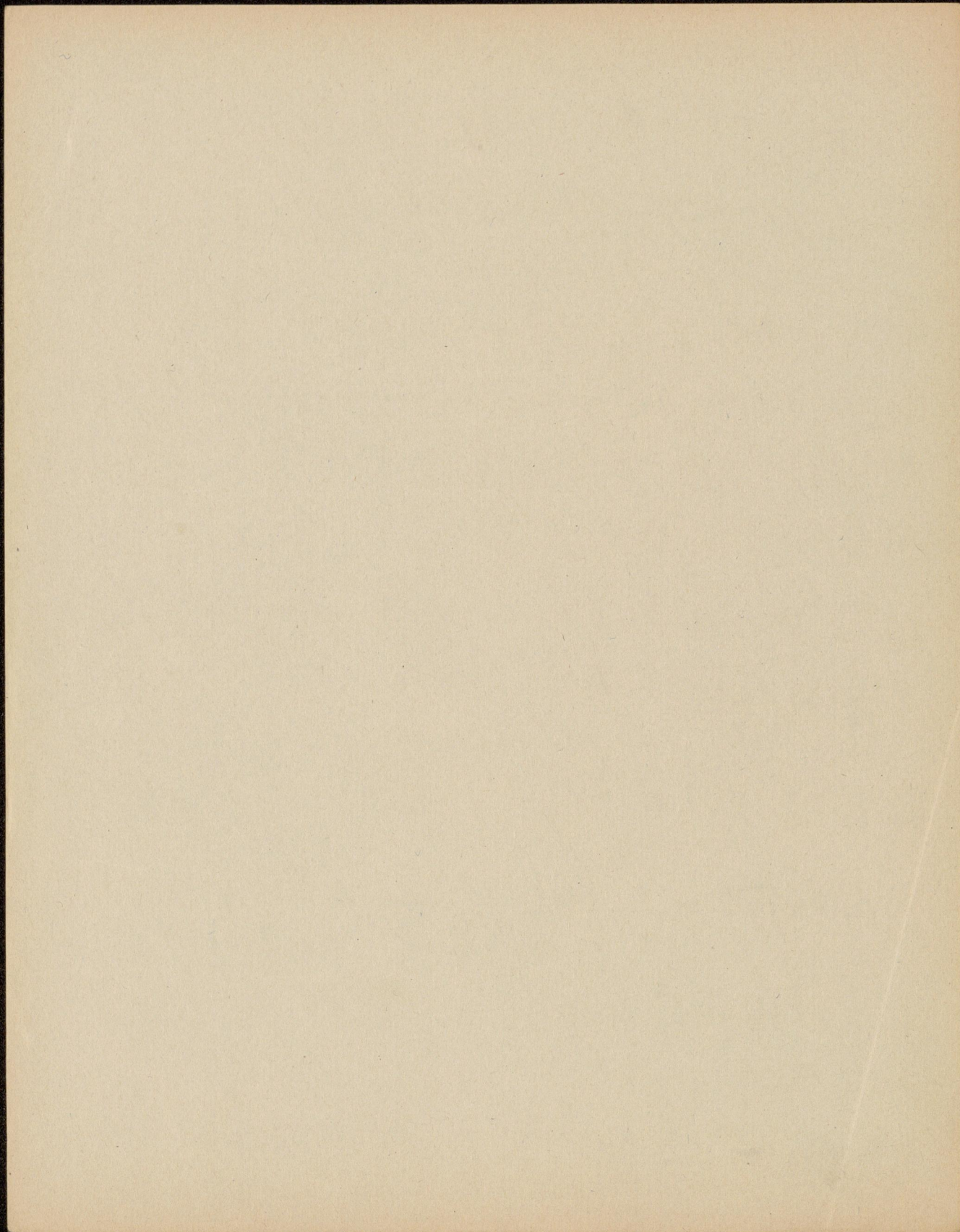
$$F(s) = \sum_1^{\infty} \frac{d(n)}{\sqrt{n}} e^{-s\sqrt{n}} = \frac{-4\log s}{s} + \mathcal{G}(s)$$

$$F(\sigma + 4\pi i\sqrt{q}) = \frac{e^{\frac{\pi i}{4}} d(q)}{q^{\frac{1}{4}}} \frac{\sqrt{\sigma}}{\sqrt{\sigma}} + O(1) \text{ f. } \sigma \rightarrow 0.$$

$$f(s) = -F'(s) = \sum_{n=1}^{\infty} d(n) e^{-s\sqrt{n}}$$

$$f(s) = \frac{-4\log s}{s^2} + \frac{4}{s^2} + \text{reg. F. bei } 0.$$

$$f(\sigma + 4\pi i\sqrt{q}) = \frac{e^{\frac{\pi i}{4}} d(q) \sqrt{\sigma}}{2q^{\frac{1}{4}} \sigma^{\frac{3}{2}}} (1 + o(1)) \text{ f. } \sigma \rightarrow 0.$$



$$\Phi(s) = \sum_{n=1}^{\infty} (\log n + \gamma) e^{-s \sqrt{n}}$$

164

$$\Phi(s) = \frac{1}{i\pi} \int_{\mathcal{C}-i\infty}^{\mathcal{C}+i\infty} \frac{\Gamma(z)}{s^z} \left(-\xi'\left(\frac{z}{2}\right) + \gamma \xi\left(\frac{z}{2}\right) \right) dz$$

$$\xi(1-s) = 2 (2\pi)^{-s} \cos \frac{\pi s}{2} \Gamma(s) \xi(s)$$

$$\xi(1-r) = O\left(\frac{\Gamma(r)}{(2\pi)^r}\right) \text{ für positive reelle } r \text{ und } r \rightarrow \infty.$$

$$\text{Aber auch } \xi'(1-r) = O\left(\frac{\Gamma(r)}{(2\pi)^r}\right)$$

$$\text{Res. in } \frac{\Gamma(z)}{s^z} \left(-\xi'\left(\frac{z}{2}\right) + \gamma \xi\left(\frac{z}{2}\right) \right) \text{ bei } z=n$$

$$= \frac{(-1)^n s^n}{n!} \left(-\xi'\left(-\frac{n}{2}\right) + \gamma \xi\left(-\frac{n}{2}\right) \right)$$

$$= \frac{(-1)^n}{n!} O\left(\frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}{(2\pi)^{\frac{n}{2}+1}}\right)$$

$$\Gamma'(2) = 1 + \Gamma'(1).$$

$$\Gamma'(1) = -\gamma.$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \text{Res.} = \text{gesamte Funktion} = s.$$

$$\text{Res. bei } z=2: \quad \xi\left(\frac{z}{2}\right) = \frac{1}{z-2} + \gamma + (z-2)$$

$$\xi'\left(\frac{z}{2}\right) = -\frac{1}{(z-2)^2} + \gamma.$$

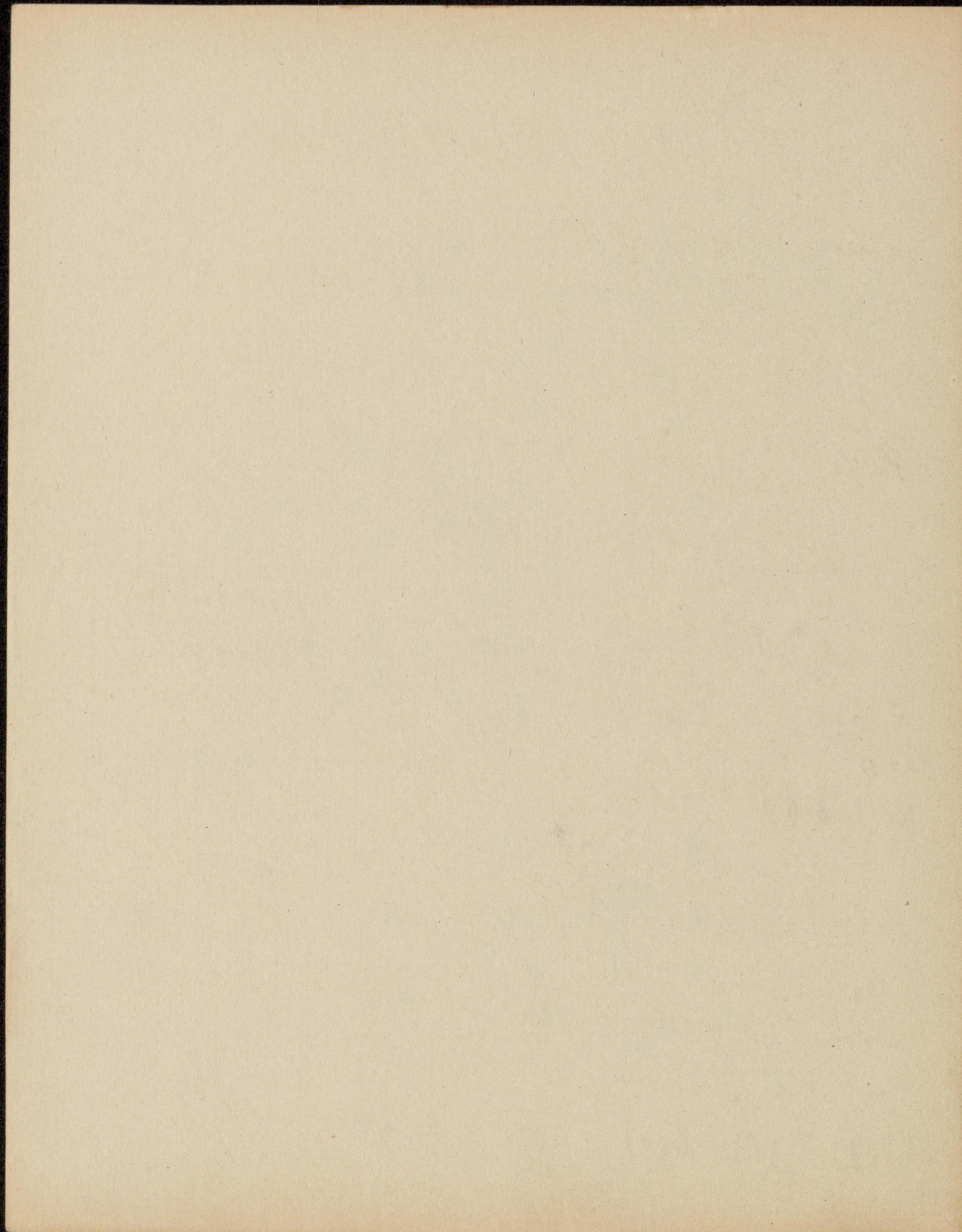
$$-\xi'\left(\frac{z}{2}\right) + \gamma \xi\left(\frac{z}{2}\right) = \frac{1}{(z-2)^2} + \frac{\gamma}{z-2} + \gamma.$$

$$\Gamma(z) = \Gamma(2) + (z-2) \Gamma'(2) + \dots$$

$$s^{-z} \Gamma(z) = s^{-2} (1 - (z-2) \log s + \dots) \left(\Gamma(2) + (z-2) \Gamma'(2) + \dots \right)$$

$$= s^{-2} \left(\Gamma(2) + (z-2) (\Gamma'(2) - \Gamma(2) \log s) + \dots \right)$$

$$\text{Res. bei } z=2: \frac{1}{s^2} (\Gamma'(2) - \log s) + \frac{\gamma}{s^2} = \frac{1}{s^2} - \frac{\gamma \log s}{s^2}$$



$$\Phi(s) = -\frac{4 \log 2}{s^2} + \frac{4}{s^2} + g(s)$$

(65)

$$\Psi(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-s \sqrt{n}}}{n^{\frac{1}{4}}}$$

$$z = (1 - \frac{1}{4})^2 = \frac{9}{16}$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{3-i\infty}^{3+i\infty} \frac{\Gamma(z)}{s^{z+2}} \zeta\left(\frac{z}{2} + \frac{1}{4}\right) dz$$

$$= \sqrt{\pi} \frac{1}{s^{\frac{3}{2}}} + \text{ganze Funkt.}$$

$f(s) - \Phi(s)$ ist regulär bei 0, hat aber nicht abh. von der Ordnung $\frac{3}{2}$ bei $s = \pm 4\pi i \sqrt{q}$.

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^x (d(n) - \log n - 2\gamma) &= \mathcal{J}(x) - 2\gamma x - \sum_{n \leq x} \log n \\ &= \mathcal{J}(x) - 2\gamma x - \sum_{n \leq x} \int_1^n (\log n - \log u) du \\ &= \mathcal{J}(x) - 2\gamma x - \int_1^x \log u du + \int_0^1 \left(\sum_{n=1}^x \log\left(1 + \frac{u}{n}\right) \right) du \\ &= \mathcal{J}(x) - 2\gamma x - x \log x + \int_0^1 du + O(\log x) + \int_0^1 O\left(\sum_{n \leq x} \frac{1}{n}\right) du \\ &= \mathcal{J}(x) - (2\gamma - 1)x - x \log x + O(\log x) \end{aligned}$$

Funktionentheoretischer Beweis, dass $\mathcal{J}(x) = x \log x + (2\gamma - 1)x + O(x^{\frac{1}{2} + \epsilon})$

$$\xi(s) + \xi'(s) - 2\gamma \xi(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d(n) - \log n - 2\gamma}{n^s} \text{ ist regulär bei } s=1.$$

und $O(A^{1-2\sigma+\epsilon})$. Die Bedg. $a = O(e^{-\ln n})$ ist erfüllt.

Nur Abwesen Landau'scher Konvergenzbedg.

$$\frac{\eta + (1-2\gamma)}{1 + (1-2\gamma)} = \frac{1-\eta}{2-2\gamma} \rightarrow \frac{1}{2}$$

$$\eta + k_2$$

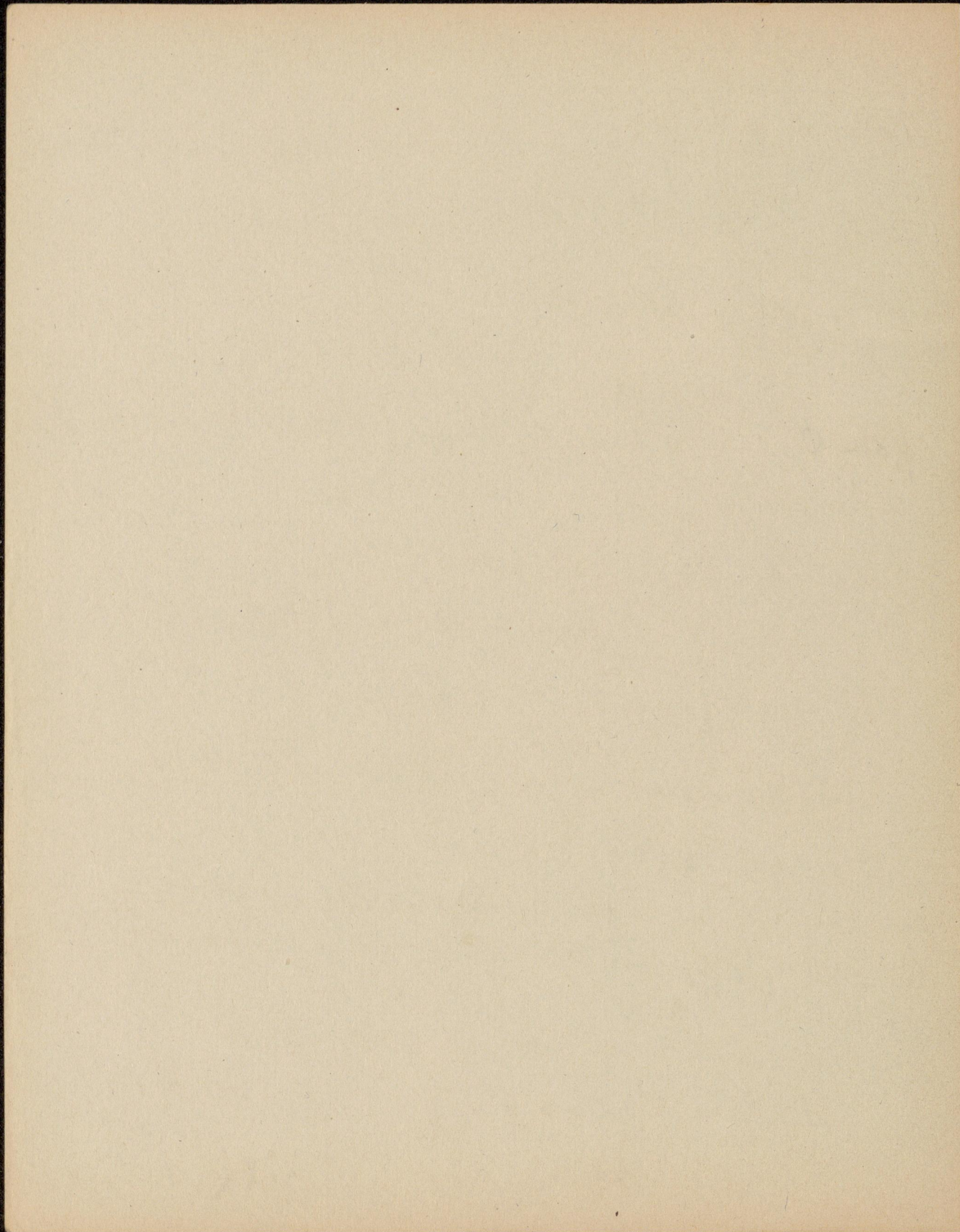
$$\eta + k_2$$

$$\eta = \frac{1}{2} - \sigma$$

$$\xi(s) = O(A^{\frac{1-\sigma}{2}})$$

$$\text{für } 0 < \sigma < 1.$$

$$\sigma + 2 - \frac{1}{2} = 2$$



$$f(s) - \Phi(s) = \sum_{n=1}^{\infty} (d(n) - \log n - 2\gamma) e^{-s\sqrt{n}}$$

166

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \Delta(n) \left(e^{-s\sqrt{n}} - e^{-s\sqrt{n+1}} \right)$$

$$e^{-s\sqrt{n}} - e^{-s\sqrt{n+1}} = e^{-s\sqrt{n}} \left(1 - e^{-s(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})} \right)$$

$$= e^{-s\sqrt{n}} \left(1 + s(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) + \frac{s^2(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})^2}{2} + \dots \right)$$

$$= e^{-s\sqrt{n}} + \frac{s e^{-s\sqrt{n}}}{\sqrt{n}} + O\left(\frac{e^{-s\sqrt{n}}}{n}\right)$$

$$f(s) - \Phi(s) = s \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Delta(n)}{\sqrt{n}} e^{-s\sqrt{n}} + \mathcal{H}(s),$$

$$\text{mit } |\mathcal{H}(s)| < s^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\Delta(n)|}{n} e^{-\sigma\sqrt{n}} < s^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\sigma\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}$$

$$\frac{f(\frac{1}{2} + \frac{1}{2})}{s^2} \\ s=1$$

$$|\mathcal{H}(s)| < \frac{\text{const.}}{\sigma} s^2 \quad \text{für } \sigma > 0$$

$$f(s) - \Phi(s) = \frac{s}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Delta(n)}{\sqrt{n}} e^{-s\sqrt{n}} + O\left(\frac{1}{\sigma}\right)$$

für alle $s = \sigma + it$
 $\sigma \rightarrow 0$

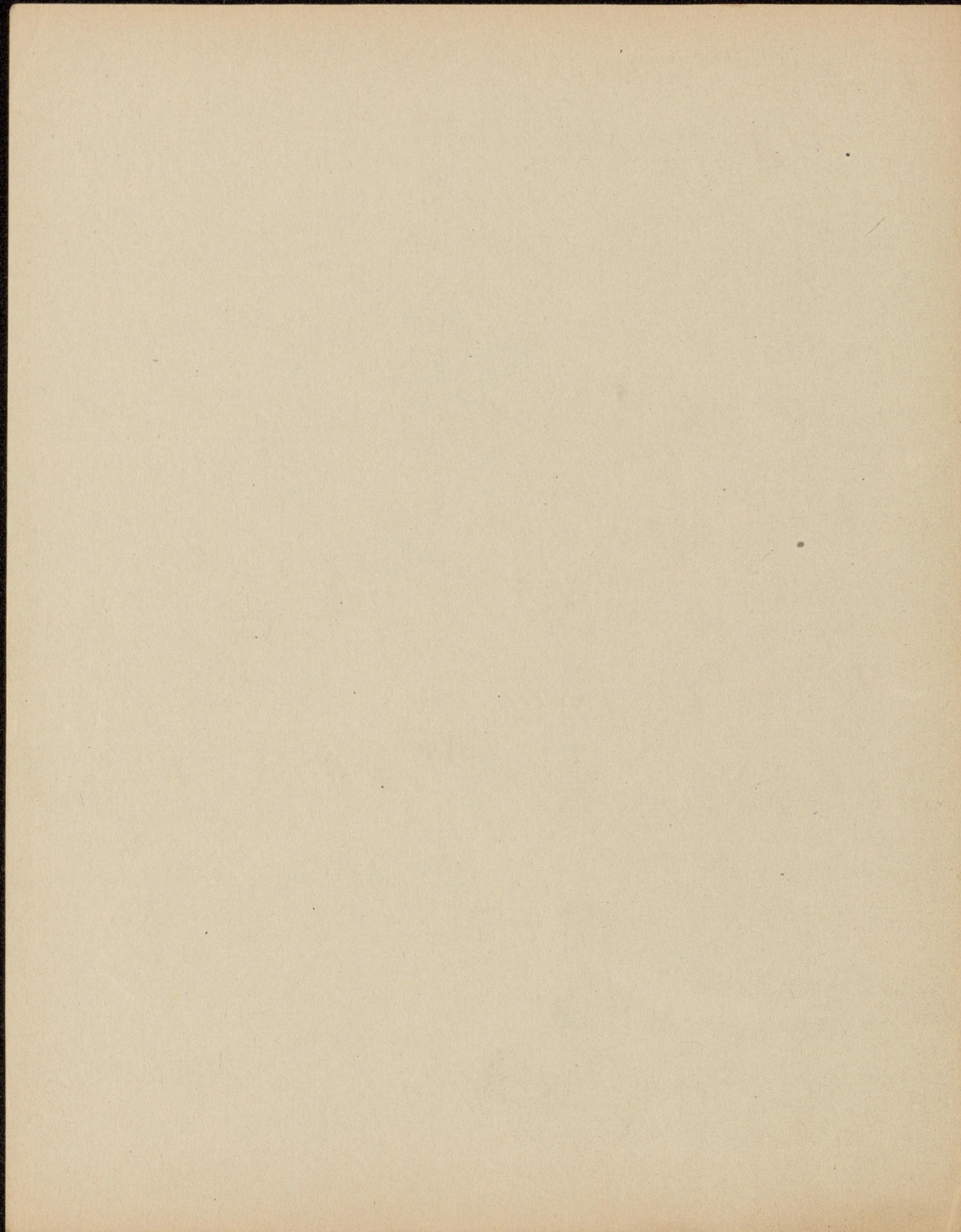
Nun in der Nähe von $\Re s = 0$:

$$e^{-s\sqrt{n}} - e^{-s\sqrt{n+1}} = \frac{s e^{-s\sqrt{n}}}{2\sqrt{n}} + e^{-s\sqrt{n}} \left(\frac{s^2}{n^{\frac{3}{2}}} \right) + e^{-s\sqrt{n}}$$

$$\sqrt{n} \left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{2}} - 1 \right) \\ \sqrt{n} \left(\frac{1}{2n} + \frac{1}{8n^{\frac{3}{2}}} + \dots \right) \\ \frac{1}{2\sqrt{n}} \\ \frac{1}{8n^{\frac{3}{2}}} \\ \vdots$$

$$\mathcal{U}(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Delta(n)}{\sqrt{n}} e^{-s\sqrt{n}} = O\left(\frac{1}{\sigma}\right) \quad \text{für } \sigma \rightarrow 0.$$

$$\mathcal{U}(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Delta(n)}{\sqrt{n}} e^{-s\sqrt{n}} = \frac{2(f(s) - \Phi(s))}{s} + O\left(\frac{1}{\sigma}\right) \quad \text{für } s = \sigma + im\sqrt{q}, \sigma \rightarrow 0$$



$\Delta(n)$ kann also nicht ein festes Zeichen haben
für alle genügend groÙen n , weil $U(s)$ bei 0 stärker ∞ wird.

67

Ferner

$$\Psi(s) = \sum_1^{\infty} \frac{e^{-s\sqrt{n}}}{n^{\frac{1}{4}}} = \frac{\sqrt{\pi}}{s^{\frac{3}{2}}} + O(1) \quad \text{für } s \rightarrow 0.$$

$$U(s) - K\Psi(s)$$

$$= \sum_1^{\infty} \frac{\Delta(n) - Kn^{\frac{1}{4}}}{\sqrt{n}} e^{-s\sqrt{n}} = \frac{f(s) - \phi(s)}{s} + O\left(\frac{1}{s}\right) \quad \text{für } s \rightarrow 0, \quad s = \sigma \pm 4\pi i \sqrt{q}$$

$$= -\frac{K\sqrt{\pi}}{s^{\frac{3}{2}}} + O\left(\frac{1}{s}\right), \quad \text{für } s = \sigma \rightarrow 0.$$

$U(s) - K\Psi(s)$ wird bei $s = 4\pi i \sqrt{q}$ stärker unendlich als bei 0,
also können die Koeffizienten kein festes Zeichen haben.

$$\frac{f(s) - \phi(s)}{s} \sim \frac{e^{\frac{\pi i}{4}} d(q) \sqrt{\pi}}{q^{\frac{1}{4}} 4\pi i \sqrt{q}} \cdot \frac{1}{s^{\frac{3}{2}}} \quad (s \rightarrow 0.)$$

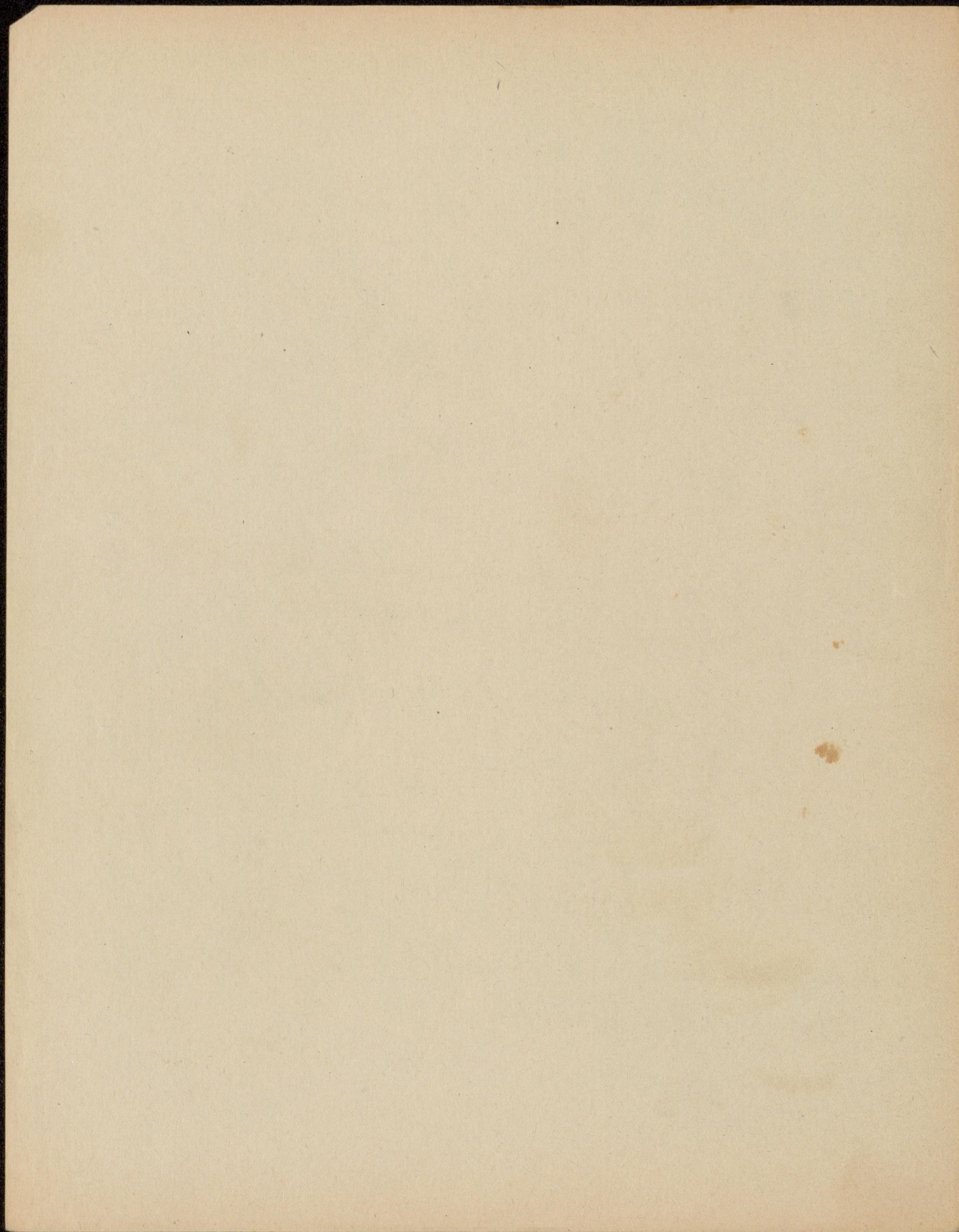
$$U(s) - K\Psi(s) \sim \frac{e^{\frac{\pi i}{4}} d(q) \sqrt{\pi}}{q^{\frac{3}{4}} 4\pi i} \cdot \frac{1}{s^{\frac{3}{2}}}$$

$$U(s) - K\Psi(s) \sim -\frac{K\sqrt{\pi}}{s^{\frac{3}{2}}}$$

Und die Koeffizienten bestimmt, wenn selbst beschränkt, wird

$$|U(s) - K\Psi(s)| \leq |U(\sigma) - K\Psi(\sigma)|$$

$$\left| \frac{d(q) \sqrt{\pi}}{4\pi q^{\frac{3}{4}}} \right| \leq |K| \sqrt{\pi}$$



* Bestimmung der Riemannschen Zetafunktion
durch innere Eigenschaften.

168

(Hamburger, Math. Zeits. 10 (1921).)

a) Sei $f(s)$ eine meromorphe Funktion mit unendlich vielen Polen

b) $|f(s)| < e^{|s|^{\delta}}$ für $|s| > r$, $\delta < 1$

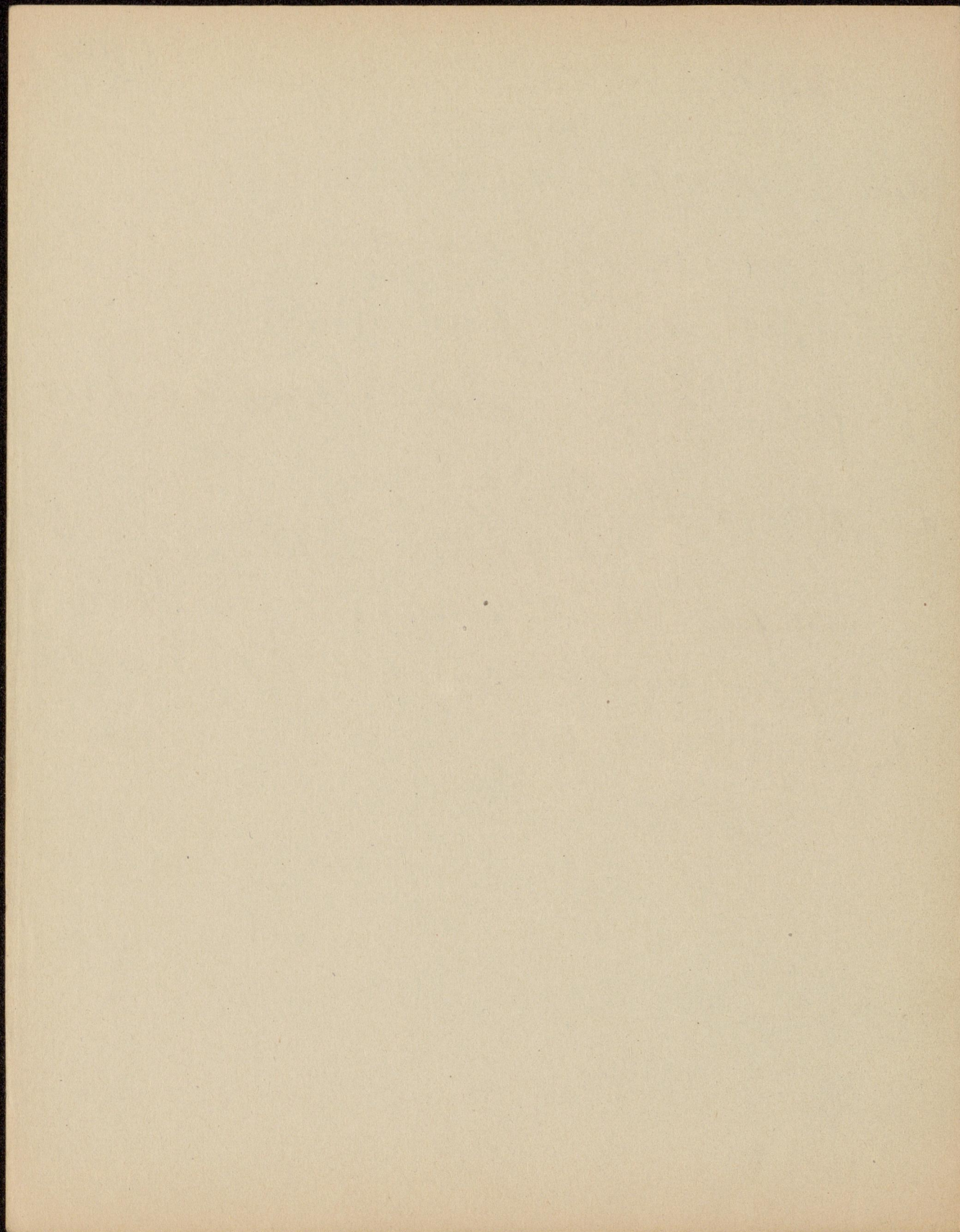
c) $f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$ ist absolut konvergent für $\sigma > 1$.

$$d') \quad g(1-s) = \frac{f(s) \Gamma(\frac{s}{2}) \pi^{-\frac{s}{2}}}{\Gamma(\frac{1-s}{2}) \pi^{\frac{1-s}{2}}}$$

ist ebenfalls in eine Dirichletreihe $= \sum \frac{b_n}{n^{1-s}}$

die irgendwo absolut konvergiert, d.h. für $1-\delta > \alpha$, $\sigma < 1-\alpha$.

Dann ist $f(s) = \text{cont. } \zeta(s)$.



Gedankengang des Beweises:

(69)

1) ξ wird $\frac{\Gamma(s) \Gamma(\frac{\sigma}{2}) \pi^{-\frac{\sigma}{2}}}{\Gamma(1-\frac{\sigma}{2}) \pi^{\frac{\sigma-1}{2}}} = \mathcal{K}(s)$ durch ein Integral dargestellt:

$\frac{\mathcal{K}(s) \mathcal{K}(s)}{(s-1)(s-2)} = \frac{1}{\pi^2} \int_0^\infty x^{s-3} \varphi(x) dx,$

mit $\varphi(x) = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^\infty \frac{a_n}{n^2} (\cos 2\pi n x - 1)$

Es gilt die Umkehrung $\frac{1}{2\pi i} \int_{\frac{\sigma}{2}-i\infty}^{\frac{\sigma}{2}+i\infty} x^{-s+2} \frac{\mathcal{K}(s)}{(s-1)(s-2)} ds$

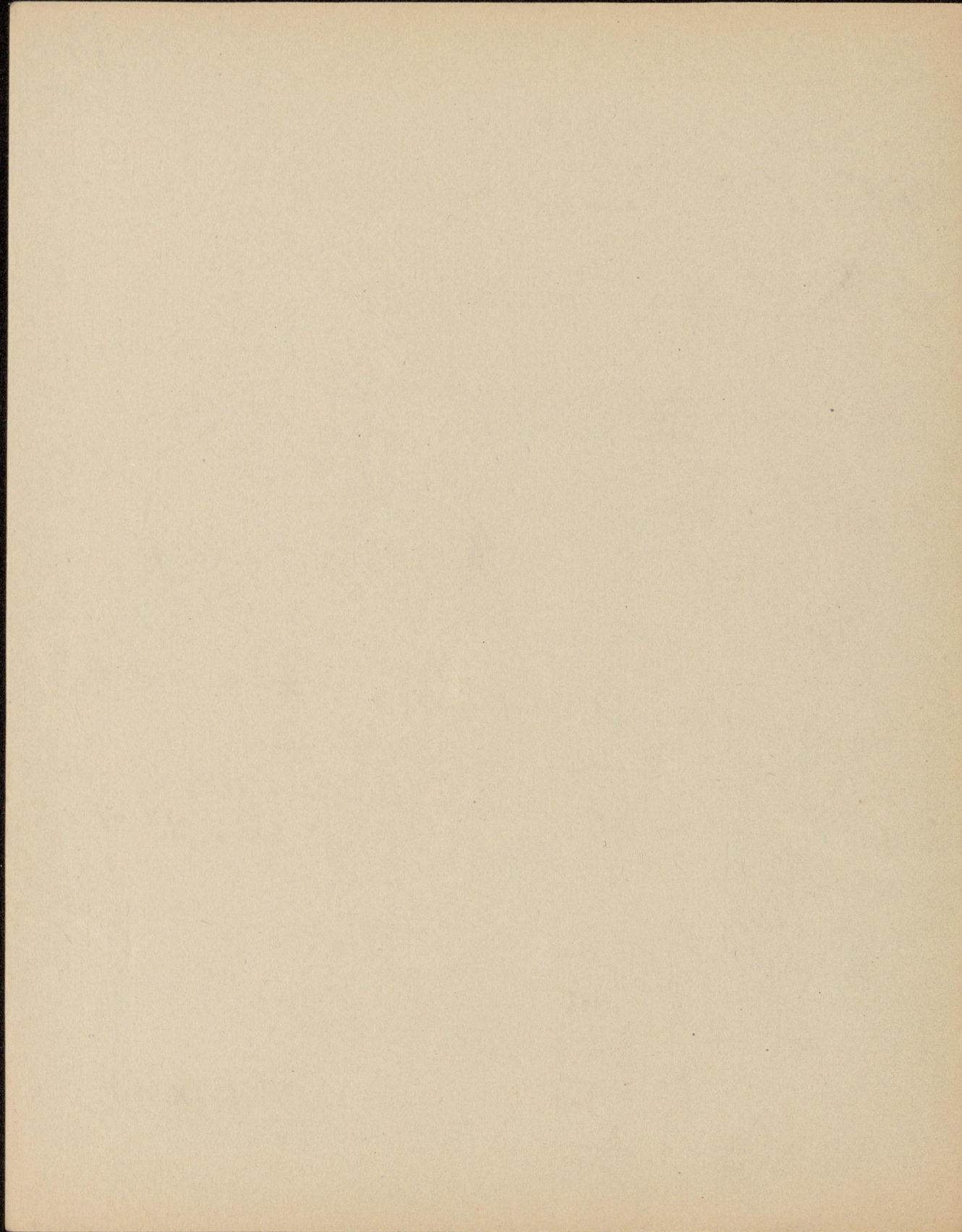
II

2) Wegen Var. d') ist $|\mathcal{K}(s)|$ beschränkt für $\sigma \geq -\alpha$ und $\sigma \geq \frac{\sigma}{2}$.
Nach Phragmen-Lindelöf aber auch dann nicht.
Dann hilft mit der Integrationsweg verschieben und links bis
zu einer Größe $-\alpha$, wo man für $\mathcal{K}(s)$ die Reihe $g(1-s) = \sum \frac{b_n}{n^{1-s}}$
einsetzen kann.

Das Integral II wird dann

$$\psi(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma+1-i\infty}^{\sigma+1+i\infty} \frac{x^{-s+2}}{(s-1)(s-2)} \sum \frac{b_n}{n^{1-s}} ds$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma+1-i\infty}^{\sigma+1+i\infty} \frac{x^{-s+1}}{s(s-1)} \sum \frac{b_n}{n^{1-s}} ds = \sum_{n \leq x} b_n (x-n)$$



Sehen

$$\psi(x) = \sum_{n \leq x} b_n(x-n) = -\frac{1}{2\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^2} (\cos 2\pi n x - 1) + \sum \text{Res.}$$

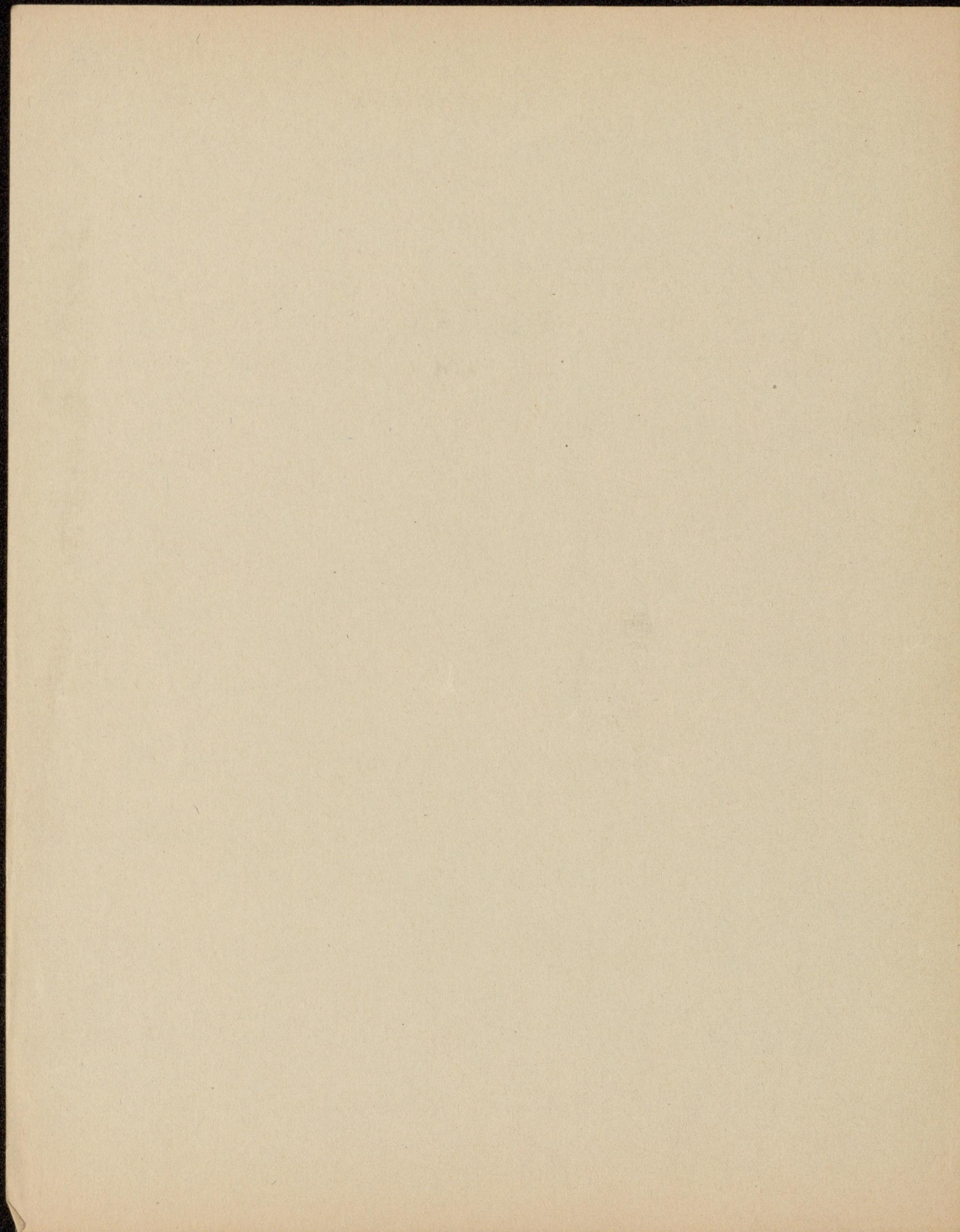
$R(x)$ 70
 = stetig differenzierbar
 für $x > 0$

$$\psi(x+1) - \psi(x) = R(x+1) - R(x)$$

$$b_{m+1}(x-m) + \sum_{r=1}^m b_r = R(x+1) - R(x) \quad m \leq x < m+1$$

stetig ~~und~~ differenzierbar

Die Ableitung ist b_{m+1} , damit nie abh. stetig ist, muss b_{m+1} konstant sein



$$g(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t_n}{n^s} \text{ absolut konverg. f. } \sigma = \beta (> 1)$$

71

$$g(1-s) = 2 f(s) (2\pi)^{-s} \cos \frac{\pi s}{2} \Gamma(s) \quad \left(f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s} \right)$$

$$\sum_{n \leq x} t_n(x-n) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\beta-i\infty}^{\beta+i\infty} x^{s'+1} \frac{g(s')}{s'(s'+1)} ds'$$

$g(1-s)$ ist konvergent f. $\sigma = \rho$
und $O(|A|^{\frac{1}{2}+\delta})$ f. $\sigma = 1+\delta$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{1-\beta-i\infty}^{1-\beta+i\infty} x^{2-s} \frac{g(1-s)}{(s-1)(s-2)} ds$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{1+\delta-i\infty}^{1+\delta+i\infty} x^{2-s} \frac{g(1-s)}{(s-1)(s-2)} ds + \sum \text{Res.}$$

$$= \frac{2}{2\pi i} \int_{1+\delta-i\infty}^{1+\delta+i\infty} x^{2-s} \frac{(2\pi)^{-s} \cos \frac{\pi s}{2} \Gamma(s)}{(s-1)(s-2)} f(s) ds + R(x)$$

$$= \frac{1}{\pi i} \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^2 \int_{1+\delta}^{\infty} (2\pi n x)^{-s} \cos \frac{\pi s}{2} \Gamma(s-2) ds + R(x)$$

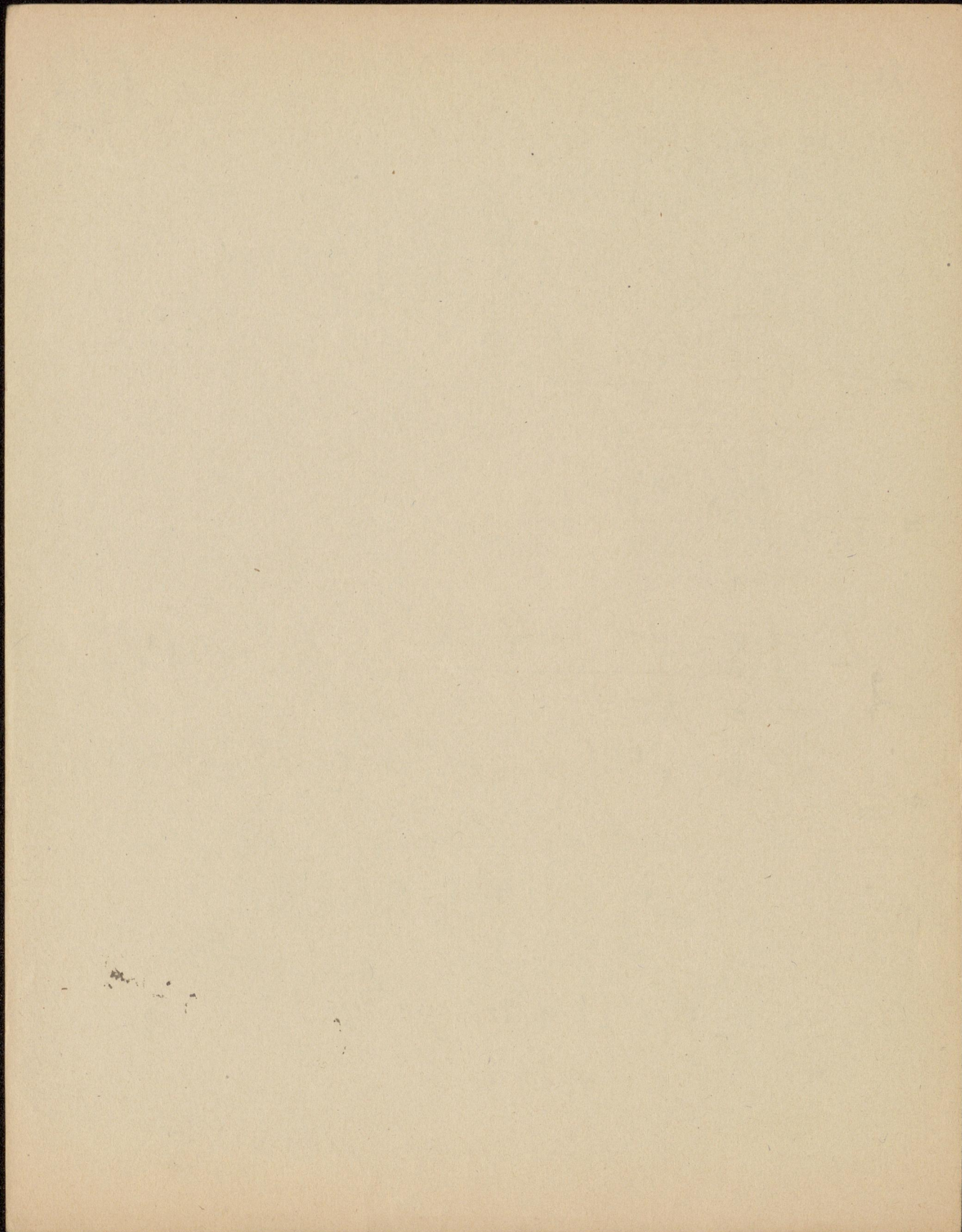
$$\Phi(y; \sigma) = \int_{\sigma} y^s e^{\frac{i\pi s}{2}} \Gamma(s-2) ds$$

$$\sigma < \frac{3}{2}$$

$$\begin{aligned} \Phi(y; \frac{3}{2} - \varepsilon) &= \Phi(y; \varepsilon) + 2\pi i y e^{\frac{i\pi}{2}} (-1) \\ &= \Phi(y; \varepsilon) + 2\pi y \end{aligned}$$

$$\int \frac{\Gamma(s-2)}{u^s} ds = \frac{1}{u^2} e^{-u}, \text{ wenn } u = y^2 e^{-\frac{2\pi i}{2}}$$

$$1 + \frac{1}{4} - \frac{1}{2}$$



$$\Phi'(y, \frac{\epsilon}{2}) = \int_{\epsilon}^{\frac{\epsilon}{2}} s y^{s-1} e^{\frac{i\pi s}{2}} \Gamma(s-2) ds$$

(72)

$$= 2 \int_{\epsilon}^{\frac{\epsilon}{2}} y^{s-1} e^{\frac{i\pi s}{2}} \Gamma(s-2) ds + \int_{\frac{\epsilon}{2}}^{\epsilon} y^{s-1} e^{\frac{i\pi s}{2}} \Gamma(s-1) ds$$

$$= \frac{2}{y} \Phi(y, \epsilon) - \frac{i}{y^2} \Phi(y, 1+\epsilon)$$

$$= \frac{2}{y} \Phi(y, \epsilon) - \frac{i}{y^2} (\Phi + 2\pi y)$$

$$\Phi' = \left(\frac{2}{y} - \frac{i}{y^2} \right) \Phi - \frac{2\pi i}{y}$$

$\kappa = -2\pi i$

$y \rightarrow +\infty : \frac{\Phi}{y^2} \rightarrow 0, \quad 2\pi i + \kappa = 0.$

$$\Phi = 2\pi(iy^2 - y) + c_1 y^2 e^{-\frac{i}{y}}$$

$$\Phi(y, \frac{3}{2} - \epsilon) = 2\pi i y^2 + c_1 y^2 e^{-\frac{i}{y}}$$

$$\int_{\frac{3}{2}-\epsilon}^{\frac{3}{2}} y^s e^{\frac{i\pi s}{2}} \cos \frac{\pi s}{2} \Gamma(s-2) ds = x y^2 \left(c_1 \cos \frac{1}{y} + c_2 \sin \frac{1}{y} \right)$$

$(c_1 = 1, c_2 = 0)$

$$\sum_{n \leq x} b_n(x-n) = \frac{\kappa}{\pi i} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n (c_1 \cos 2\pi n x + c_2 \sin 2\pi n x)}{(2\pi n)^2} + R(x)$$

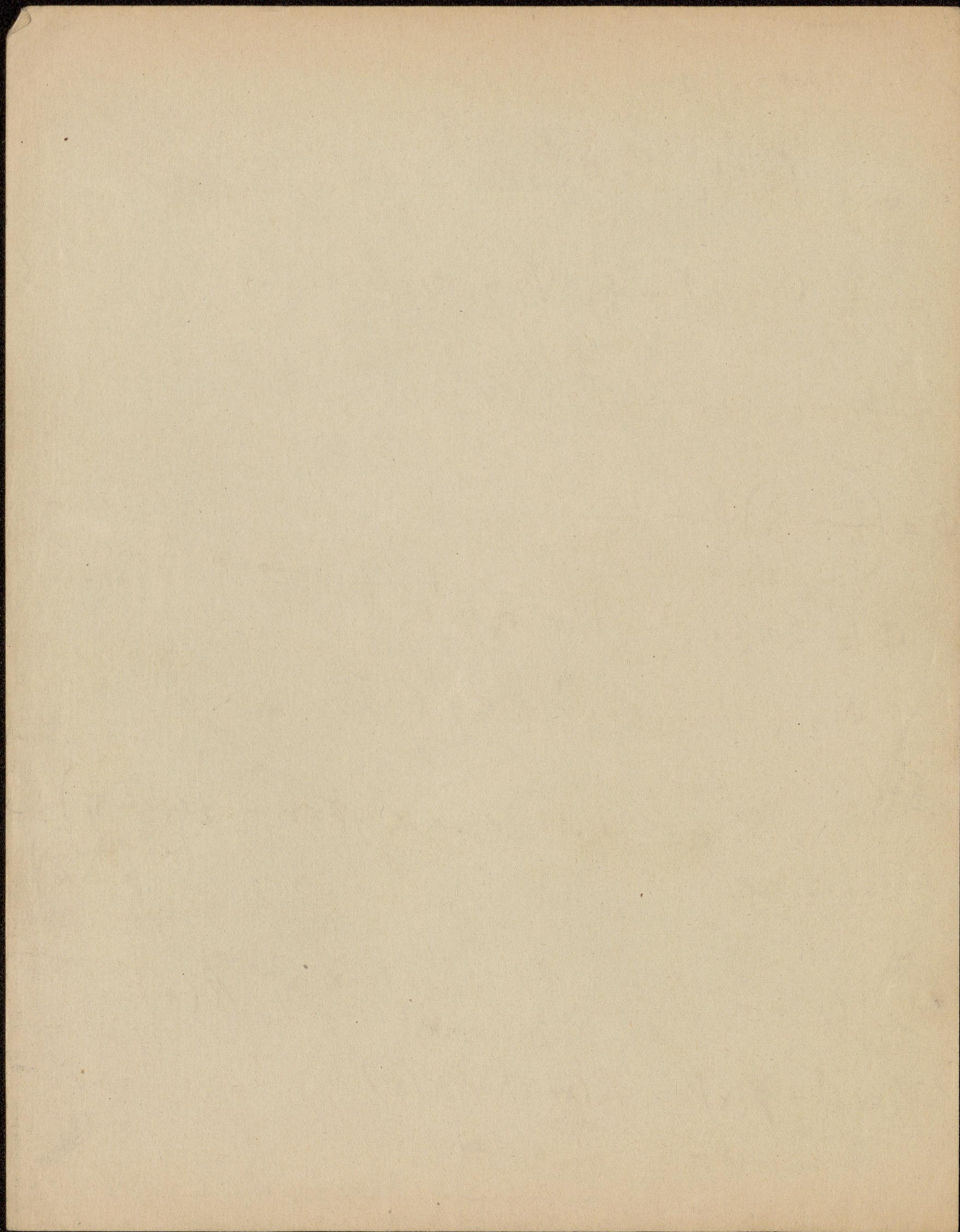
$$\Psi(x+1) - \Psi(x) = R(x+1) - R(x)$$

$m \leq x < m+1$

$m = [x]$

$$b_{m+1}(x-m) + \sum_{v=1}^m b_v = R(x+1) - R(x)$$

Ableitung ist b_{m+1} , muss das stetig sein, aber alle b_m einander gleich.



Beweis von Karanika (Math. Zuch. 33 (1931)) (1)

Kordy - Littlewood, Tauberian Theorem Proc. Lond. Math. Soc. (2) 13 1914.

R. Schmidt, Math. Zuch. 1925 (22)

Zuk.: Sei $\varphi(x) = x^\alpha L(x)$ $\alpha \geq 0$ ~~$\alpha > 0$~~

$L(x)$ schwach wachsend, d. h. $\frac{L(xr)}{L(x)} \rightarrow 1$ für $x \rightarrow \infty$, jedes $r > 0$

Aus $f(s) = \sum_n a_n e^{-\lambda_n s} \sim \varphi\left(\frac{1}{s}\right)$ für $s \rightarrow 0$, konv. für $s > 0$
und $a_n \geq 0$

folgt $A(x) = \sum_{\lambda_n \leq x} a_n \sim \frac{\varphi(x)}{\Gamma(\alpha+1)}$

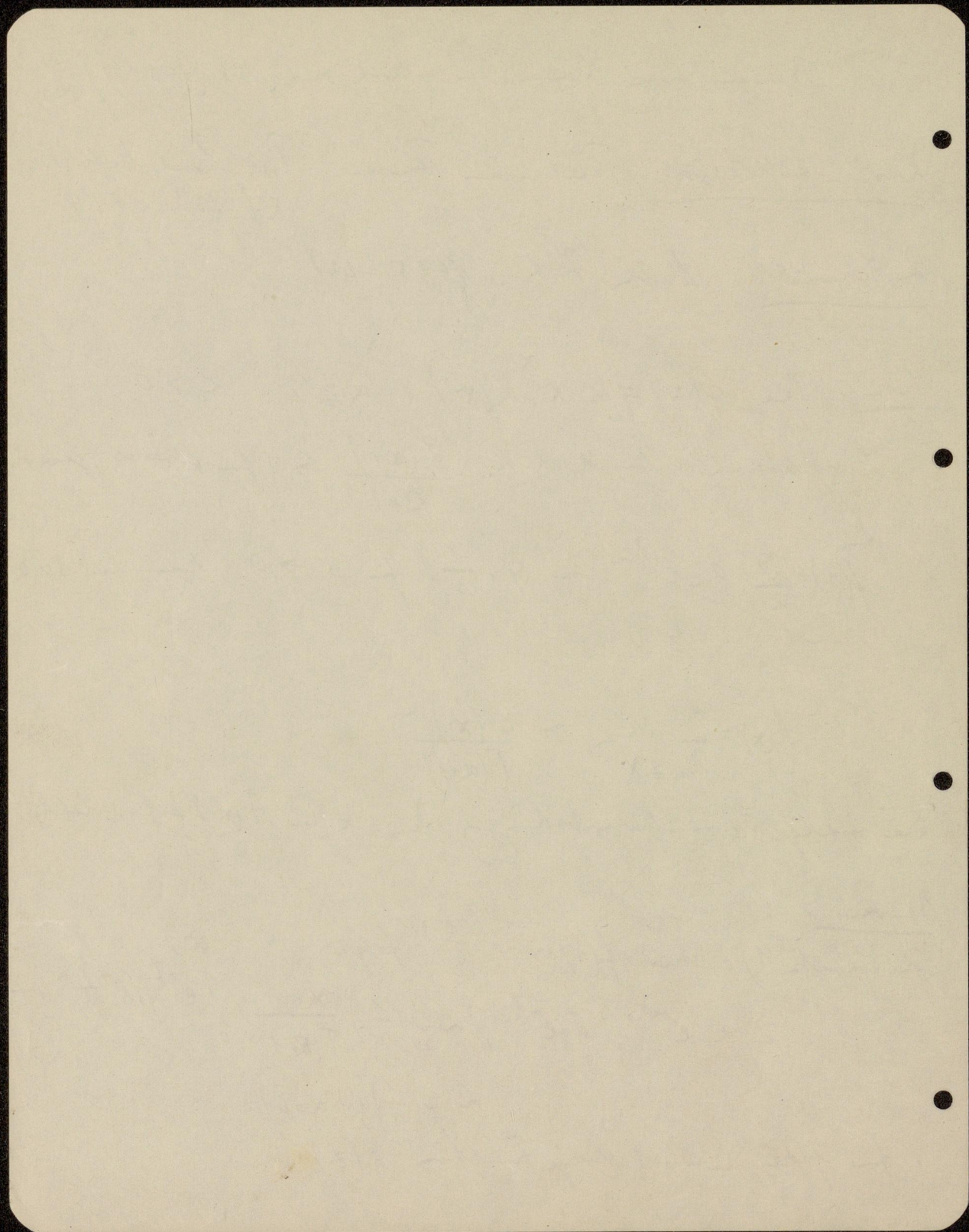
Die richtige Summationsbedingung $\lambda_n \leq x$ in $A(x)$ ist nicht!

Beweis:

Hilfssatz 1): Aus $f(s) \sim \varphi\left(\frac{1}{s}\right)$ folgt

$$\sum a_n e^{-\lambda_n s} g(e^{-\lambda_n s}) \sim \varphi\left(\frac{1}{s}\right) \frac{\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \int_0^\infty e^{-t} g(e^{-t}) t^{\alpha-1} dt \quad (\alpha > 0)$$
$$\sim \varphi\left(\frac{1}{s}\right) g(1) \quad (\alpha = 0)$$

für jede in $0 \dots 1$ stetige Funktion $g(z)$.



2. Reihe bilden man mit $k \geq 0$

$$f((k+1)s) = \sum_v a_v e^{-\lambda_v s} e^{-\lambda_v k s}$$

$$\sim \varphi\left(\frac{1}{(k+1)s}\right) = \varphi\left(\frac{1}{s}\right) \frac{1}{(k+1)^\alpha} \frac{\mathcal{L}\left(\frac{1}{s}\right)}{\mathcal{L}\left(\frac{1}{(k+1)s}\right)}$$

$$\sim \varphi\left(\frac{1}{s}\right) \frac{1}{(k+1)^\alpha} = \varphi\left(\frac{1}{s}\right) \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty e^{-t(k+1)} t^{\alpha-1} dt \quad \alpha > 0$$

$$\left\{ \varphi\left(\frac{1}{s}\right) \quad \alpha = 0. \right.$$

Also

$$\sum_v a_v e^{-\lambda_v s} g(e^{-\lambda_v s}) \sim \begin{cases} \varphi\left(\frac{1}{s}\right) \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty e^{-t} g(e^{-t}) t^{\alpha-1} dt & \alpha > 0 \\ \varphi\left(\frac{1}{s}\right) P(1) & \alpha = 0. \end{cases}$$

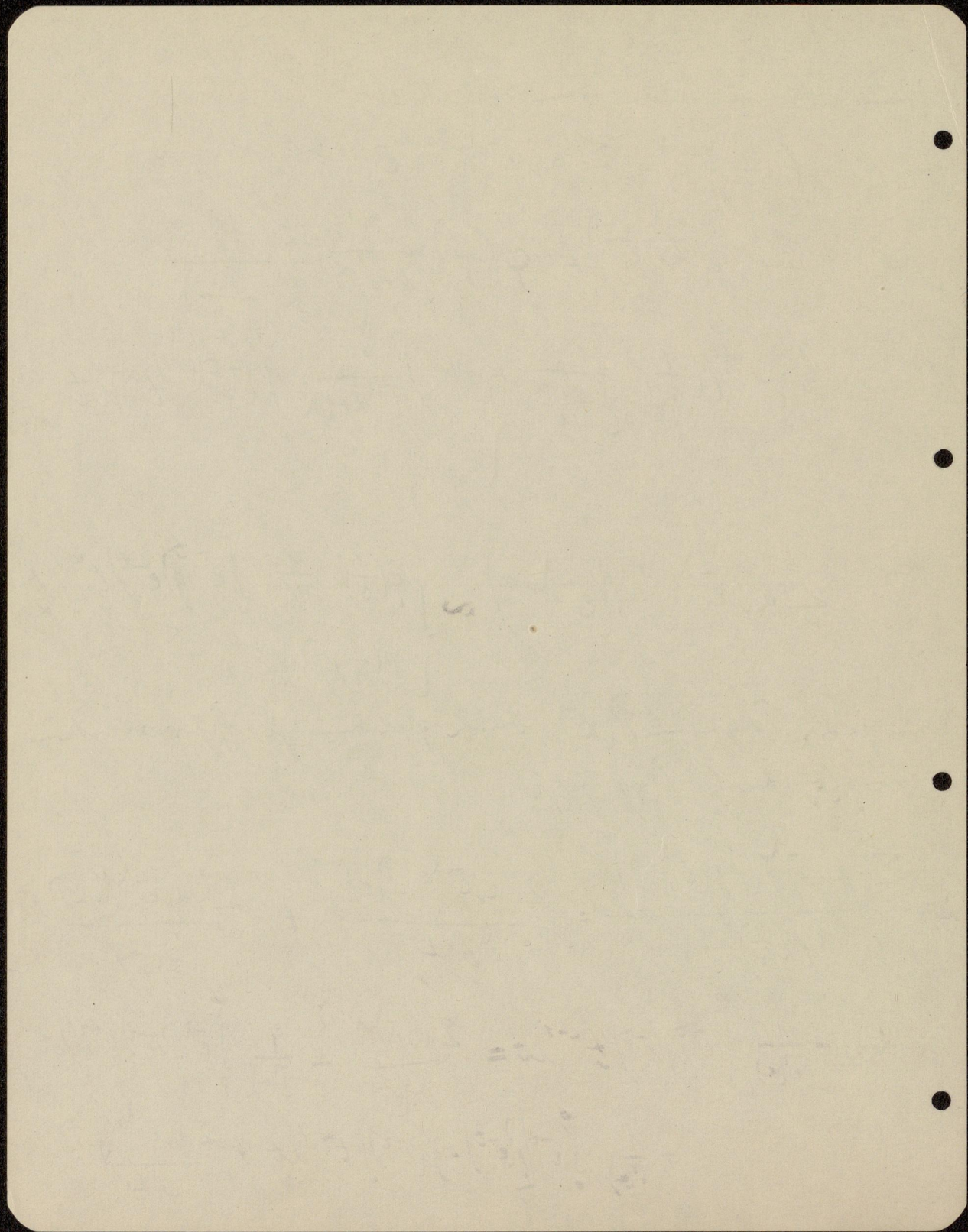
für jedes Polynom $P(x)$. Durch gleichmäßige Approximation

von $g(x)$ durch $P(x)$ folgt

$$\text{Bis)} \quad \frac{\sum a_v e^{-\lambda_v s} g(e^{-\lambda_v s})}{\varphi\left(\frac{1}{s}\right)} = \frac{\sum a_v e^{-\lambda_v s} P(e^{-\lambda_v s})}{\varphi\left(\frac{1}{s}\right)} + \frac{\sum a_v e^{-\lambda_v s} (g-P)}{\varphi\left(\frac{1}{s}\right)}$$

$$R(s) - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty e^{-t} g(e^{-t}) t^{\alpha-1} dt = \frac{\sum a_v e^{-\lambda_v s} P}{\varphi\left(\frac{1}{s}\right)} - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty e^{-t} P(e^{-t}) t^{\alpha-1} dt$$

$$+ \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty e^{-t} [P(e^{-t}) - g(e^{-t})] t^{\alpha-1} dt + \frac{\sum a_v e^{-\lambda_v s} (g-P)}{\varphi\left(\frac{1}{s}\right)}$$



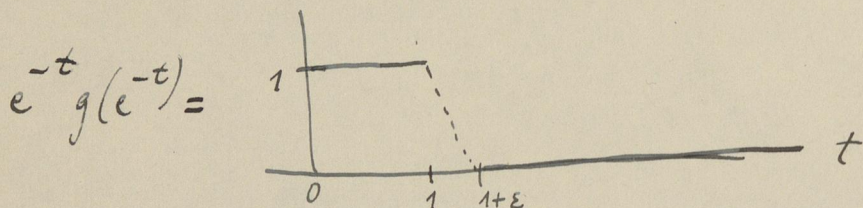
(3)

$\Delta_{\nu} \rightarrow 0$ für $s \rightarrow 0$, wenn

$$\frac{\sum |a_{\nu}| e^{-\lambda_{\nu} s}}{\varphi\left(\frac{1}{s}\right)} \text{ beschränkt bleibt für } s \rightarrow 0,$$

wenn aus $a_{\nu} \geq 0$ hier schon folgt.

Man wähle nun



dann ist $g(e^{-t}) = 0$ für $e^{-t} \leq e^{-(1+\epsilon)}$ $g(1) = 1$.

$g(x) = 0$ für $0 \leq x \leq e^{-(1+\epsilon)}$

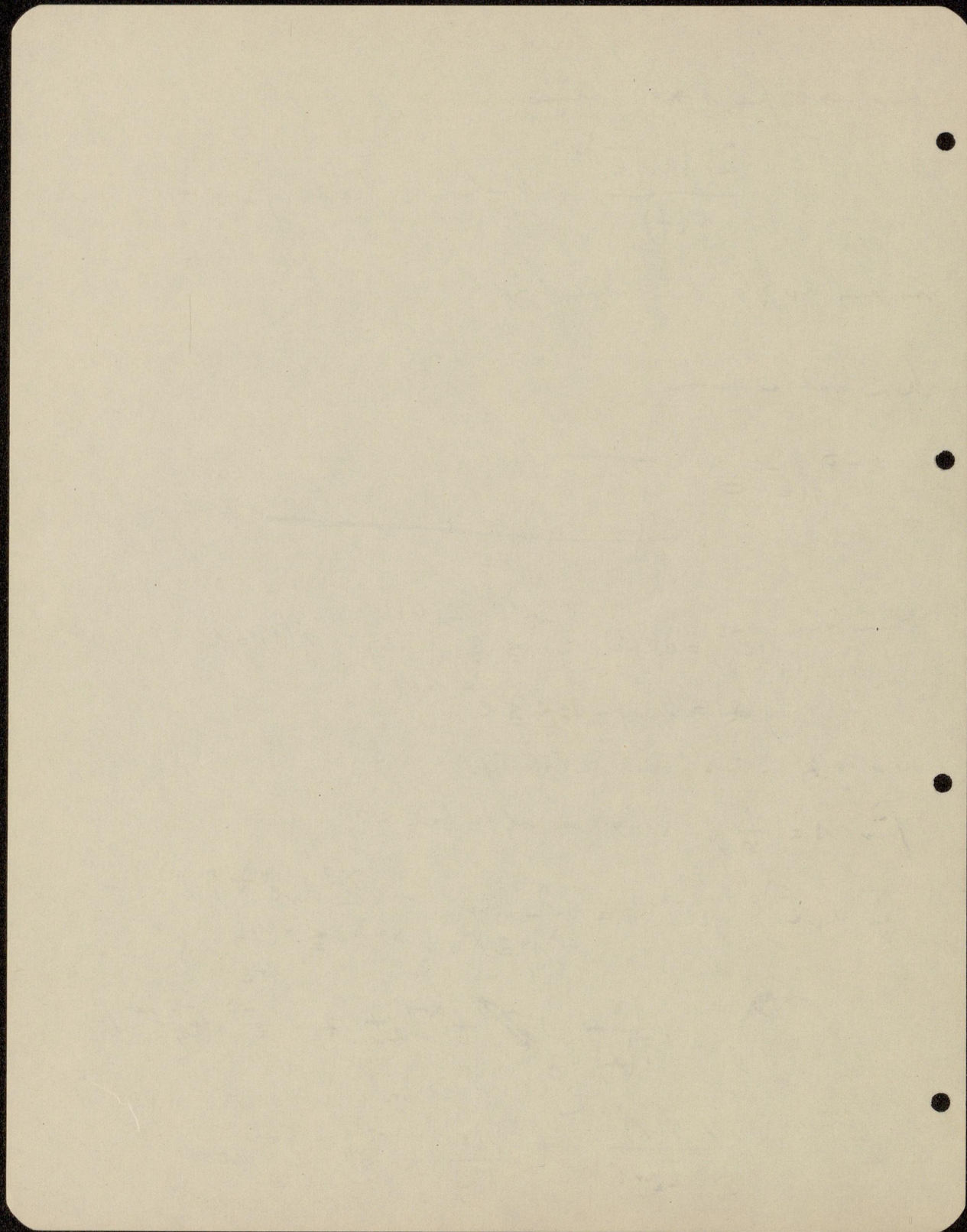
also $g(x) \in 0 \dots 1$ beliebig stetig.

für $s = \frac{1}{x}$, $x \rightarrow +\infty$ ist bei $\alpha > 0$

$$\sum_{\nu} a_{\nu} e^{-\lambda_{\nu} s} g(e^{-\lambda_{\nu} s}) = \sum_{\lambda_{\nu} \leq x} a_{\nu} + \sum_{x < \lambda_{\nu} \leq x(1+\epsilon)} a_{\nu} e^{-\frac{\lambda_{\nu}}{x}} g(e^{-\frac{\lambda_{\nu}}{x}})$$

$$\sim \frac{\varphi(x)}{\Gamma(\alpha)} \left[\int_0^1 t^{\alpha-1} dt + \int_1^{1+\epsilon} e^{-t} g(e^{-t}) t^{\alpha-1} dt \right]$$

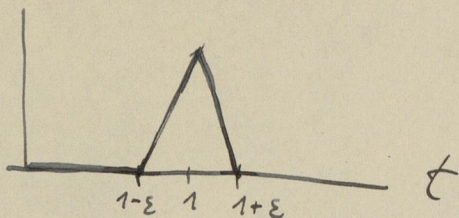
$$\sim \frac{\varphi(x)}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{\varphi(x)}{\Gamma(\alpha)} \int_1^{1+\epsilon} e^{-t} g(e^{-t}) t^{\alpha-1} dt$$



Man wähle anbremsen

(4)

$$e^{-t} g\left(\frac{x}{e^t}\right) =$$



$$g\left(\frac{x}{e^t}\right) = g\left(\frac{x}{e^0}\right) = 0.$$

so mit

$$\sum a_v e^{-\lambda_v t} g\left(\frac{x}{e^{-\lambda_v t}}\right) = \sum_{(1-\varepsilon)x \leq \lambda_v \leq x(1+\varepsilon)} a_v e^{-\frac{\lambda_v}{x} t} g\left(e^{-\frac{\lambda_v}{x} t}\right)$$

$$\rightarrow \frac{\varphi(x)}{\Gamma(\alpha)} \int_{1-\varepsilon}^{1+\varepsilon} e^{-t} g\left(\frac{x}{e^t}\right) t^{\alpha-1} dt$$

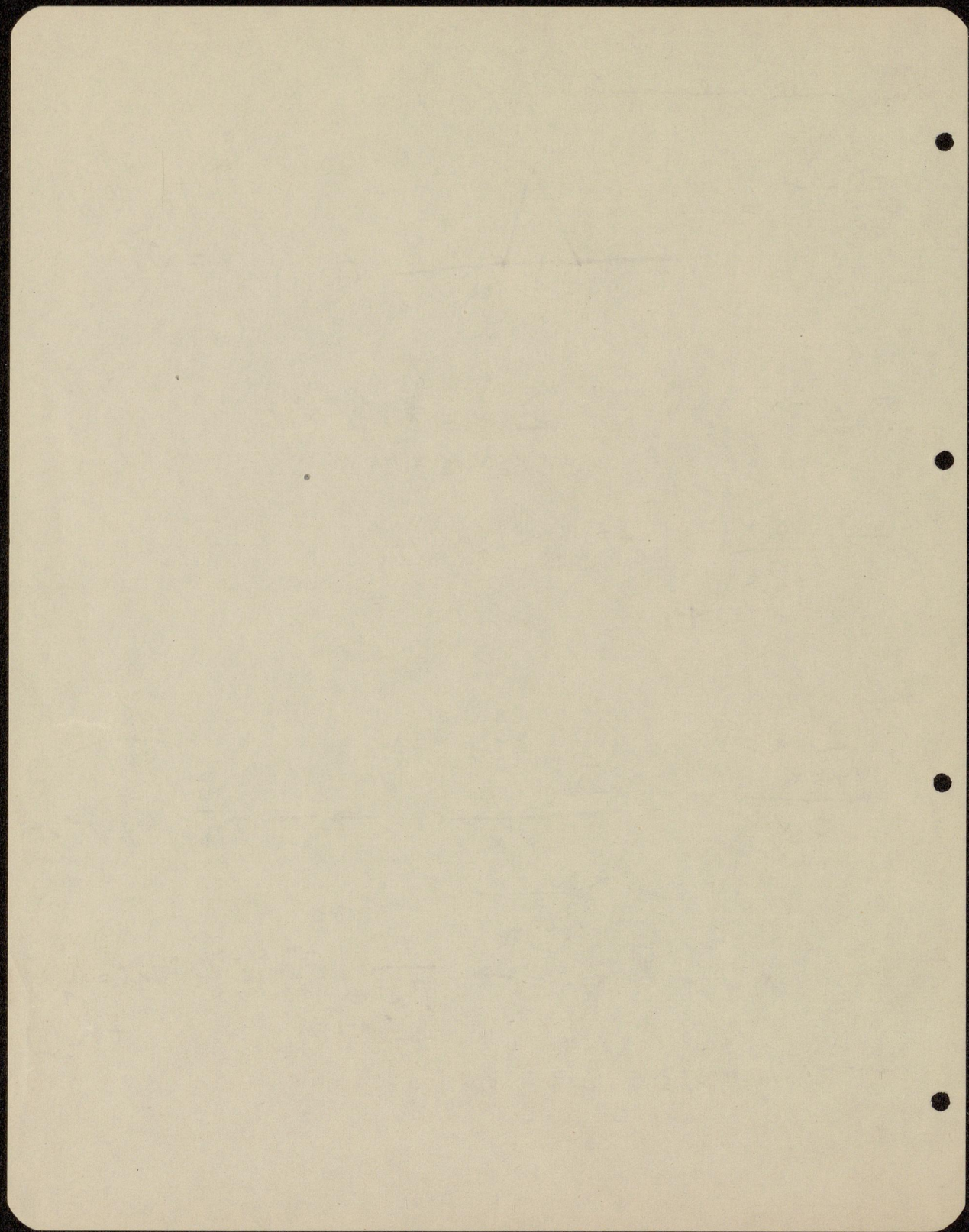
Also

$$\frac{\sum_{\lambda_v \leq x} a_v}{\varphi(x)}$$

$$+ \frac{\sum_{x < \lambda_v \leq (1+\varepsilon)x} a_v e^{-\frac{\lambda_v}{x} t} g\left(e^{-\frac{\lambda_v}{x} t}\right)}{\varphi(x)} \rightarrow \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_1^{1+\varepsilon} e^{-t} g\left(\frac{x}{e^t}\right) t^{\alpha-1} dt$$

$$P_1(x, \varepsilon) + P_2(x, \varepsilon) \rightarrow \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{1-\varepsilon}^{1+\varepsilon} e^{-t} g\left(\frac{x}{e^t}\right) t^{\alpha-1} dt = K_1(\varepsilon) + K_2(\varepsilon)$$

hier ist $P_1(x, \varepsilon) \geq 0$, $P_2(x, \varepsilon) \geq 0$.



$$K_1(\varepsilon) \rightarrow 0$$

$$K_2(\varepsilon) \rightarrow 0 \quad \text{für } \varepsilon \rightarrow 0$$

$$\text{Wg} \quad P_1(x, \varepsilon) + P_2(x, \varepsilon) \rightarrow K_1(\varepsilon) + K_2(\varepsilon)$$

gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ und $\delta > 0$ ein $x_0 = x_0(\delta, \varepsilon)$, so dass

$$|P_1(x, \varepsilon) + P_2(x, \varepsilon) - K_1(\varepsilon) - K_2(\varepsilon)| < \delta$$

$$\text{für } x > x_0(\delta, \varepsilon)$$

Man wähle ε_1 so, dass

$$K_1(\varepsilon_1) < \delta, \quad K_2(\varepsilon_1) < \delta \quad \varepsilon_1 = \varepsilon_1(\delta)$$

$$\text{dann} \quad P_1(x, \varepsilon_1) + P_2(x, \varepsilon_1) < \delta + K_1 + K_2 < 3\delta$$

$$\text{für } x > x_0(\delta, \varepsilon_1(\delta)) = x_0(\delta)$$

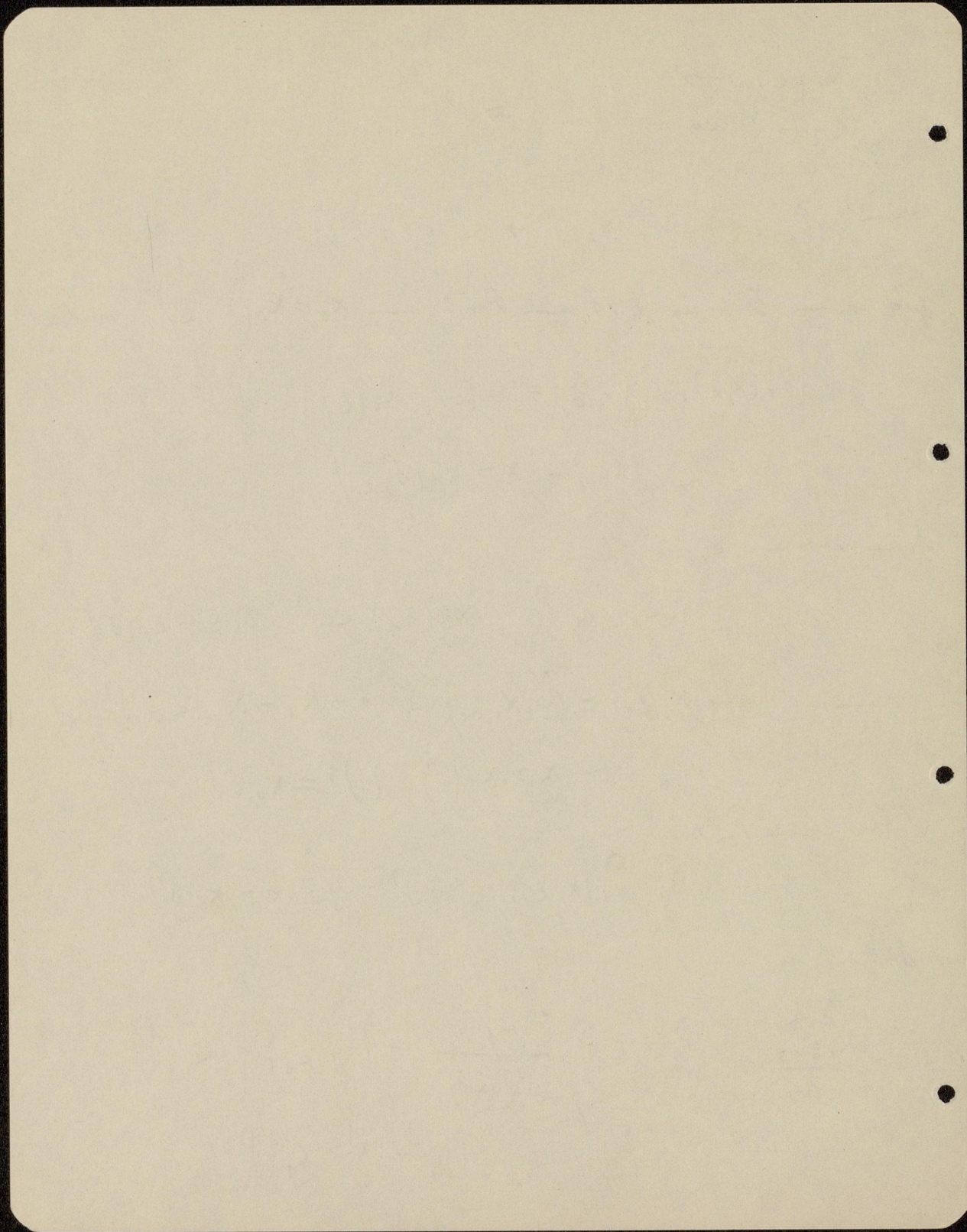
Aber wg $P_1 > 0, P_2 > 0$

$$P_1(x, \varepsilon_1) < 3\delta \quad \text{für } x > x_0(\delta)$$

Analog

$$\left| \frac{\sum_{\lambda \leq x} a_\lambda}{\varphi(x)} + P_1(x, \varepsilon_1) - \left(\frac{1}{T(a, 1)} + K_1(\varepsilon_1) \right) \right| < \delta$$

$$\text{für } x > x_1(\delta)$$



(6)

2. $x_2(\delta) = \max(x_0(\delta), x_1(\delta))$, weil
 ~~$x_2(\delta)$~~
 für $x > x_2(\delta)$

$$\left| \frac{\sum_{\lambda \leq x} a_\lambda}{\varphi(x)} - \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \right| < \delta + P_1(x, \varepsilon_1) + K_1(\varepsilon_1)$$

$$< \delta + 3\delta + \delta = 5\delta, \text{ da } \delta \rightarrow 0.$$

2. $\alpha = 0$, man wird

$$\frac{\sum_{\lambda \leq x} a_\lambda}{\varphi(x)} + P_1(x, \varepsilon) \rightarrow 1$$

$$P_1(x, \varepsilon) + P_2(x, \varepsilon) \rightarrow g^*(e^-) = 0.$$

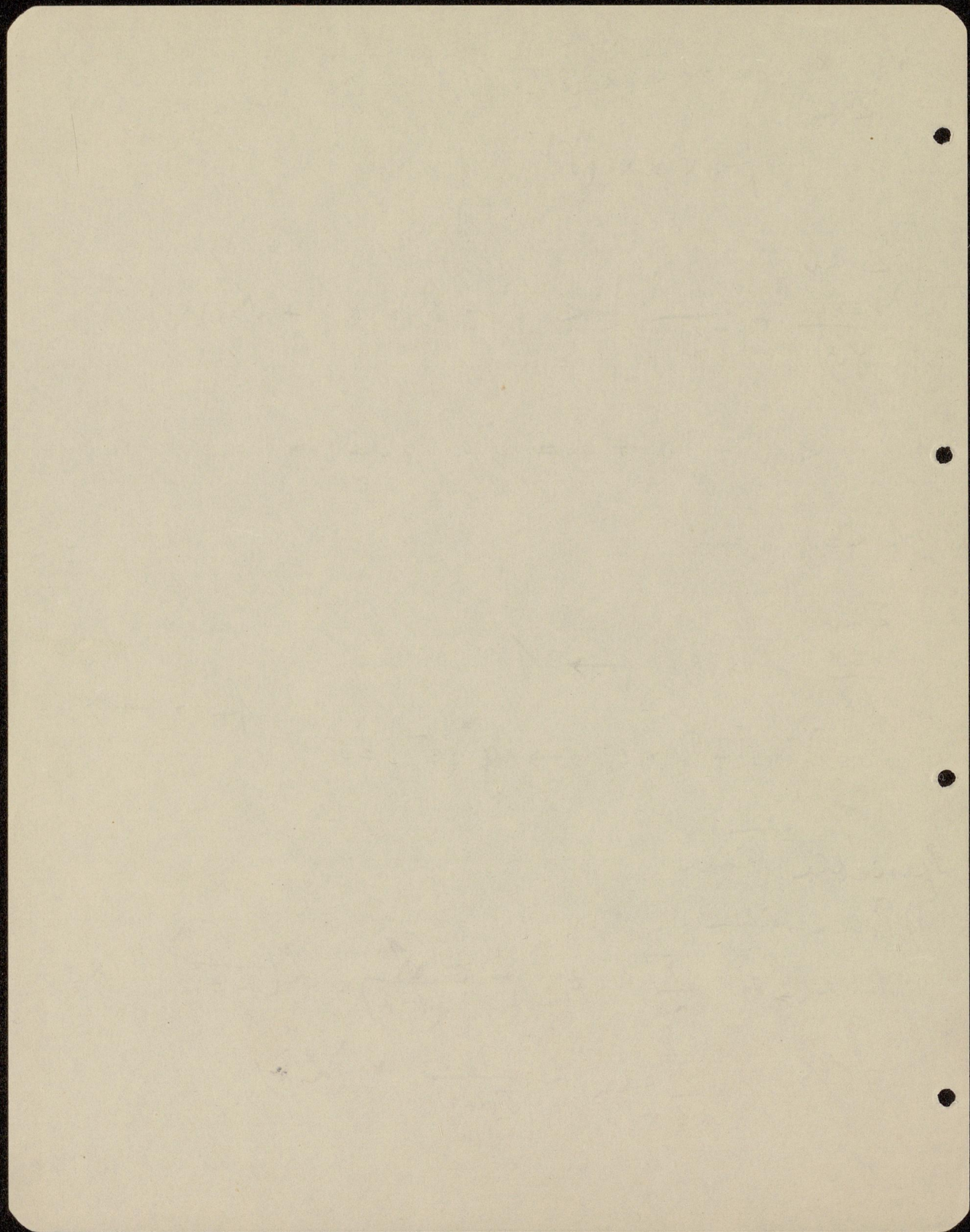
für $x \rightarrow \infty$

Spezielle Fälle

1) Potenzreihen:

$$\text{für } a_n \geq 0, \quad \sum_n a_n z^n \sim c \frac{1}{(1-z)^\alpha} \mathcal{L}\left(\frac{1}{1-z}\right) \quad \alpha \geq 0$$

$$\text{folgt} \quad \sum_{n \leq x} a_n \sim \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} x^\alpha \mathcal{L}(x)$$



7) Genitalreihe Dirichletreihe:

• Sei $a_n \geq 0$ $\sum \frac{a_n}{n^s} = \sum a_n e^{-\log n \cdot s}$

$$\sum_n \frac{a_n}{n^s} \sim c \frac{1}{s^\alpha} L\left(\frac{1}{s}\right) \quad \text{für } s \rightarrow 0$$

folgt $\sum_{\log n \leq x} a_n \sim \frac{c}{\Gamma(\alpha+1)} x^\alpha L(x)$

d.h. $\sum_{n \leq x} a_n \sim \frac{c}{\Gamma(\alpha+1)} (\log x)^\alpha L(\log x)$

z.B. bei $\zeta(s)$ mit $a_n = \frac{1}{n}$, $\alpha = \alpha = L(x) = 1$.

$$\sum_n \frac{1}{n^{1+s}} \sim \frac{1}{s}$$

$$\sum_{n \leq x} \frac{1}{n} \sim \log x$$

oder: Sei $(s-1) \sum \frac{a_n}{n^s} \rightarrow c$ für $s \rightarrow 1$, d.h.

$$\sum_n \frac{a_n}{n^{1+s}} \sim \frac{c}{s} \quad \text{für } s \rightarrow 0,$$

dann ist $\sum_{n \leq x} \frac{a_n}{n} \sim c \log x$ für $x \rightarrow \infty$.

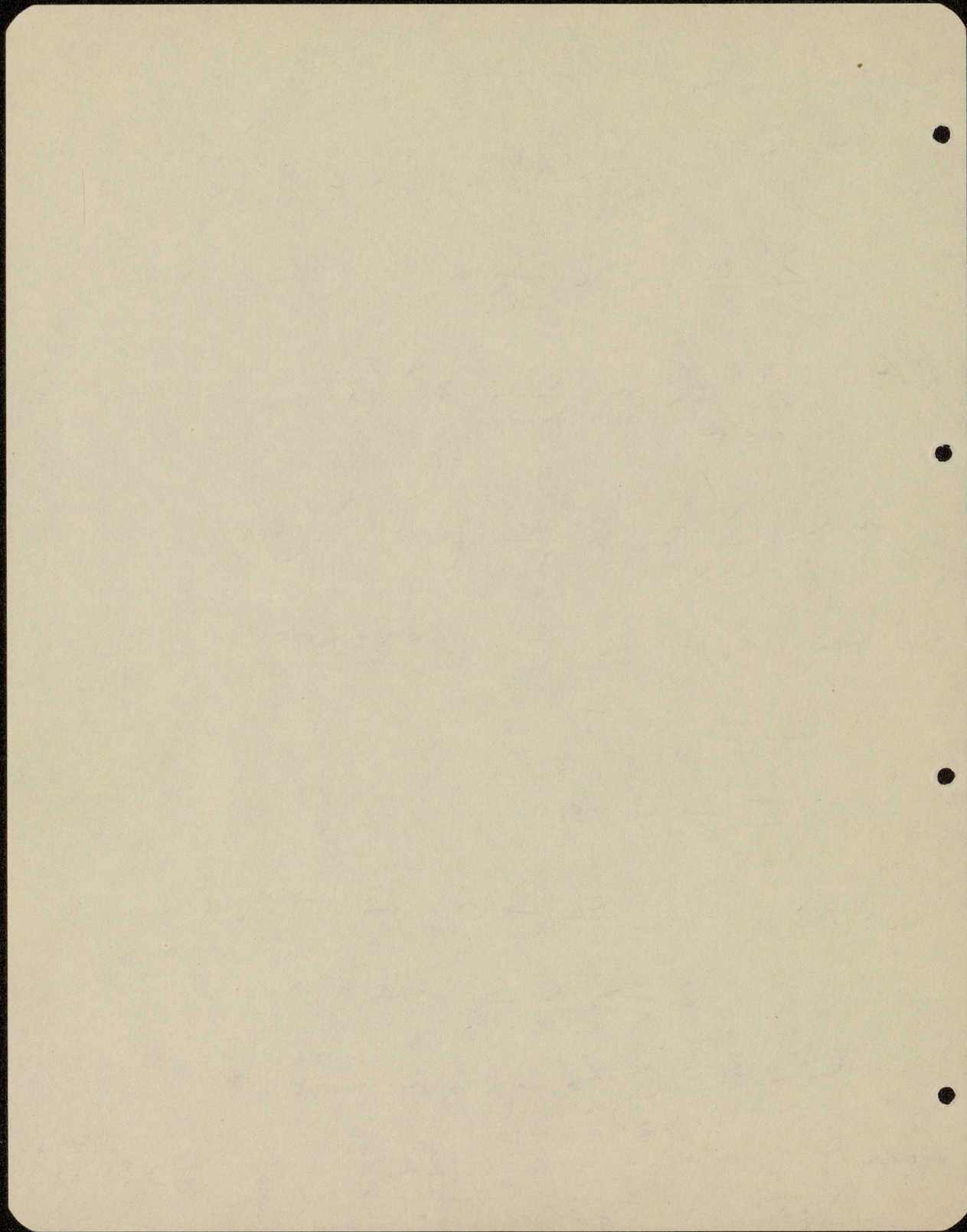
Aus der Konvergenz folgt

~~$$\sum_{n \leq x} \frac{a_n}{n}$$~~

hier nur

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log \left| \sum_{n \leq x} a_n \right|}{\log x} = 1, \text{ d.h.}$$

$$\sum_{n \leq x} a_n < e^{(1+\delta) \log x} = x^{1+\delta}$$



d. h.

$$\frac{\sum_{n \leq x} a_n}{x} < x^{\delta}$$

und umgekehrt

$$\frac{\sum_{n \leq x} a_n}{x} > x^{-\delta}$$

Vgl. denn den neuen Beweis des Primzahlgesetzes
von Wiener - London, Publ. Math. Ber. 1932,
da handelt es sich um die Voraussetzung:

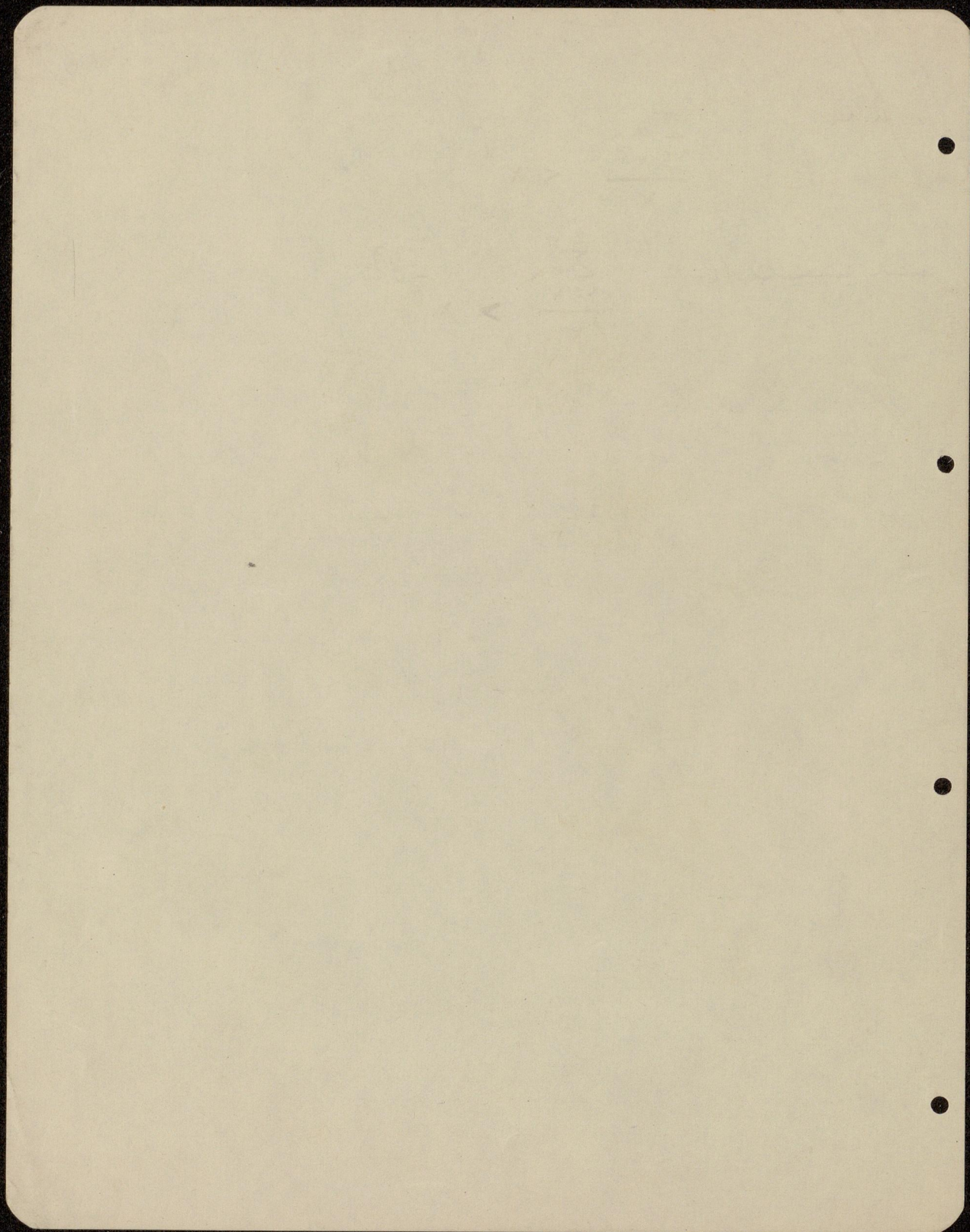
$$\sum \frac{a_n}{n^s} = \frac{1}{s-1} \text{ regulär bei } s=1 \text{ und auf } \sigma=1$$

z. B. gilt

Bei $a_n \geq 0$ und $f(s) = \sum \frac{a_n}{n^s}$ hat bei 1 einen Pol 1. Grades,

das ist $\sum_{n \leq x} a_n = O(x)!$, Wenn umgekehrt noch

regulär auf $\sigma=1$, dann $\sum_{n \leq x} a_n / x$ hat keinen



Neuer Beweis des Prinzipsatzes.

(62) 62

(Wiener-London, Math. Abh. Nr. 1932, pp. 514)

Allgemeine Form:

$$1) \quad f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s} \quad a_n \geq 0$$

ist regulär für $\sigma > 1$.

$$2) \quad f(s) - \frac{1}{s-1} = h(s) \quad \text{ist auf } \sigma = 1 \text{ nach rechts stetig.}$$

Dann ist $\varphi(x) = \sum_{n \leq x} a_n \sim x$.

Beweis: Durch partielle Integration, wobei $\varphi(x) = O(x^{\frac{1}{2}})$ benutzt wird, folgt für $\sigma > 1$:

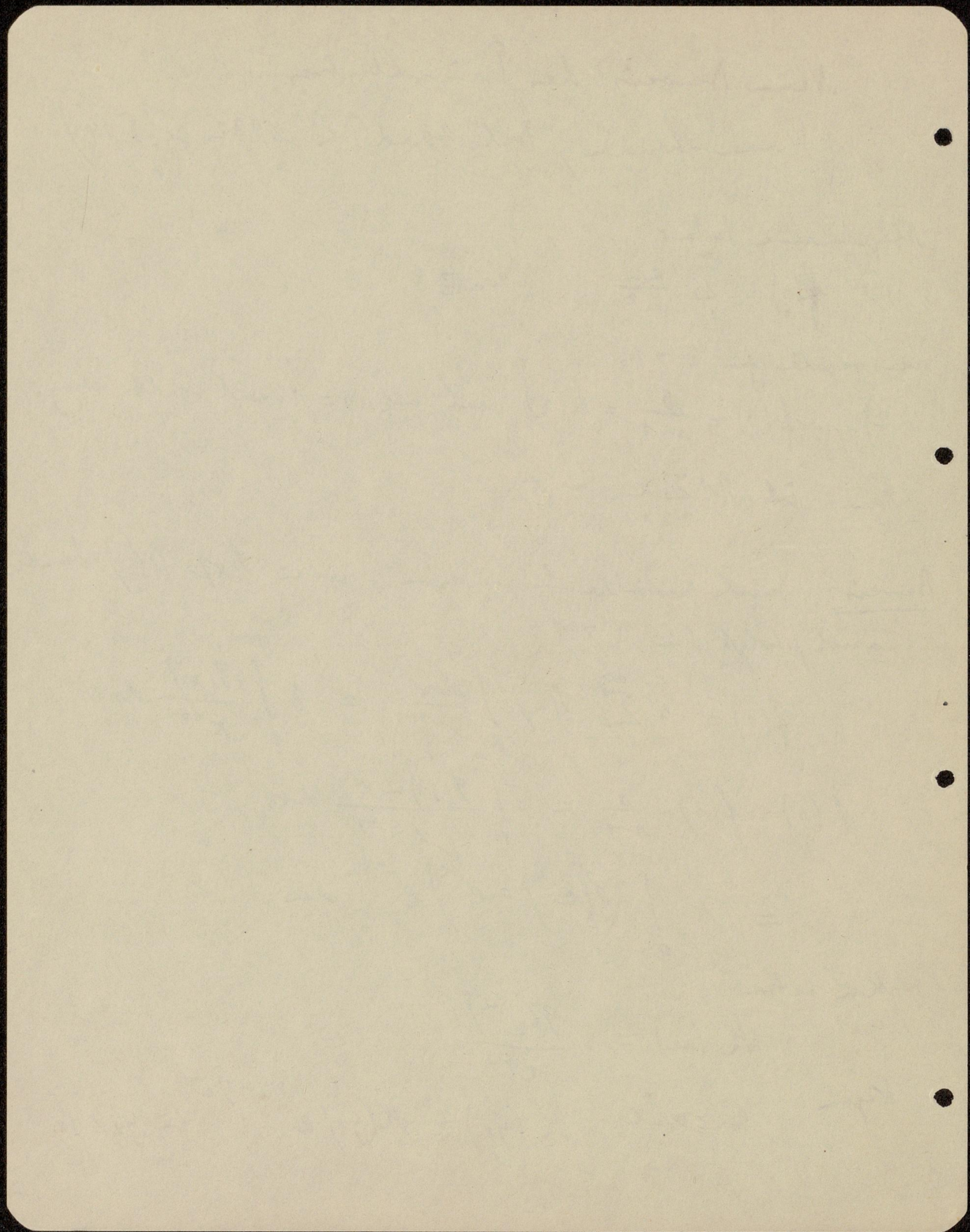
$$f(s) = s \sum_{n=1}^{\infty} \varphi(n) \int_{\frac{n}{x}}^{\frac{n+1}{x}} \frac{dx}{x^{s+1}} = s \int_1^{\infty} \frac{\varphi(x)}{x^{s+1}} dx$$

$$\begin{aligned} h(s) &= f(s) - \frac{1}{s-1} = s \int_1^{\infty} \frac{\varphi(x) - x}{x^{s+1}} dx \\ &= s \int_0^{\infty} (\varphi(e^u) - e^u) e^{-su} du \end{aligned}$$

Man setze

$$K(u) = \frac{\varphi(e^u)}{e^u}$$

Wegen $a_n \geq 0$ ist $K(y_2) \leq K(y_1) e^{y_1 - y_2}$ für $y_2 \geq y_1$.



(63)

$$g(s) = \frac{h(s)}{s} = \int_0^{\infty} (h(u) - 1) e^{-u(s-1)} du$$

Es ist also $g(s)$ regulär für $\sigma > 1$ und $\lim_{\sigma \rightarrow 1} g(\sigma + it)$ existiert und stetig ist.

Hilfsformeln:

$$I) \quad \frac{1}{2} \int_{-2}^{+2} \left(1 - \frac{|t|}{2}\right) e^{itv} dt = \frac{\sin^2 v}{v^2}$$

$$II) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2 v}{v^2} dv = \pi > 0 \text{ ist konvergent}$$

$$III) \quad \text{Man setze } y > 0, \lambda > 0$$

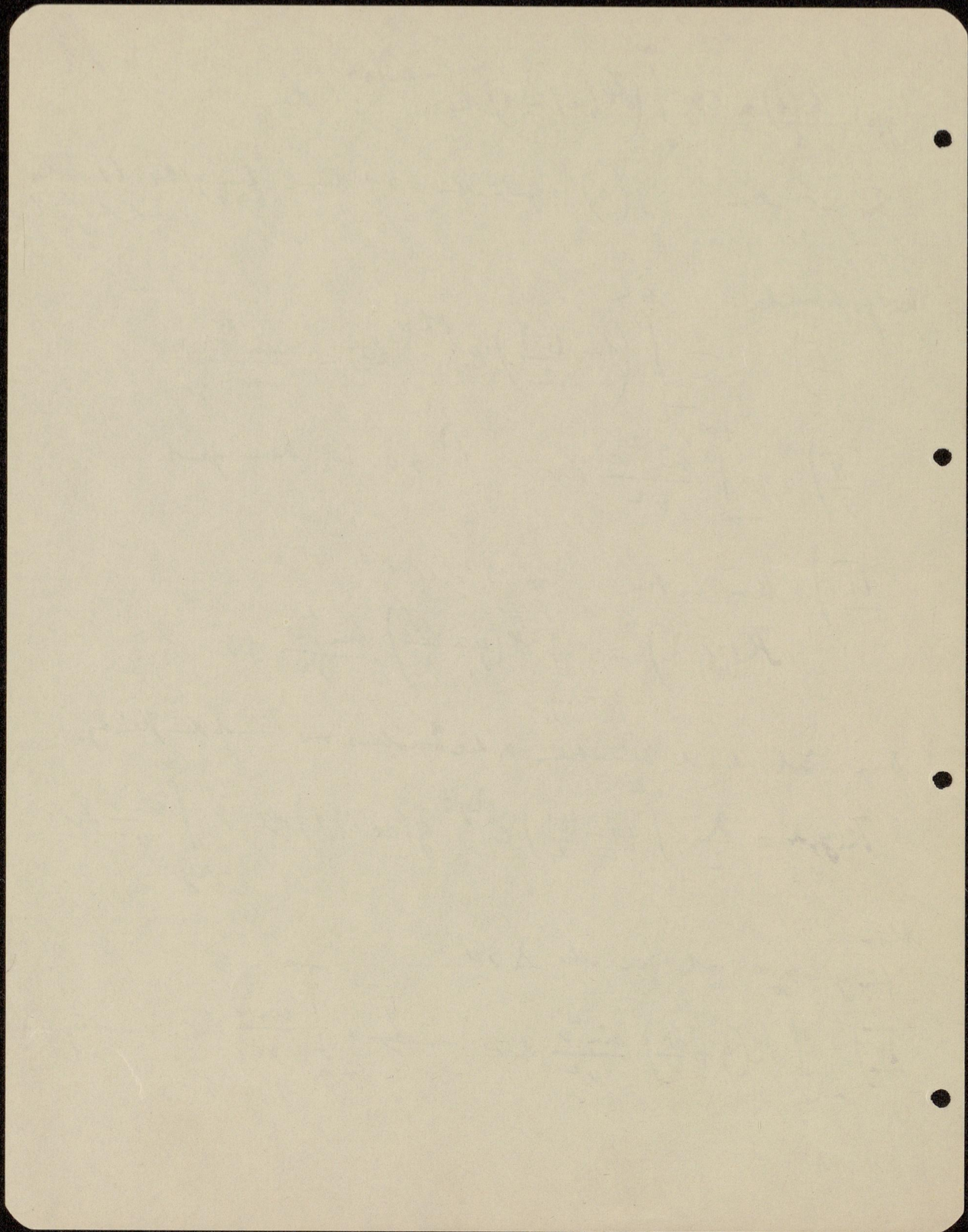
$$K(y, \lambda) = \int_{-\lambda y}^{\infty} h\left(y + \frac{v}{\lambda}\right) \frac{\sin^2 v}{v^2} dv.$$

Dies wird durch Zirkeln in die Existenz von K und die Stetigkeit.

$$K(y, \lambda) = \frac{\lambda}{2} \int_{-2}^{+2} \left(1 - \frac{|t|}{2}\right) e^{i\lambda y t} g(1 + i\lambda t) dt + \int_{-\lambda y}^{\infty} \frac{\sin^2 v}{v^2} dv$$

Man
für $y \rightarrow \infty$ ist für alle $\lambda > 0$

$$IV) \quad \int_{-\lambda y}^{\infty} h\left(y + \frac{v}{\lambda}\right) \frac{\sin^2 v}{v^2} dv \rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2 v}{v^2} dv. \text{ unabhängig von } \lambda.$$



V) Aus IV) folgt elementar $K(y) \rightarrow 1$. Denn

Beschränktheit von K : Für große λ ist
 $\equiv K(y, \lambda)$ das K „feinste Kornchen“ $= K(y)$, also

$$\begin{aligned} K(y, \lambda) &> \int_{-\sqrt{\lambda}}^{+\sqrt{\lambda}} K(y + \frac{v}{\lambda}) \frac{\sin^2 v}{v^2} dv \\ &\geq K(y - \frac{1}{\sqrt{\lambda}}) \int_{-\sqrt{\lambda} + \frac{1}{\sqrt{\lambda}}}^{+\sqrt{\lambda} - \frac{1}{\sqrt{\lambda}}} e^{-(y - \frac{1}{\sqrt{\lambda}} - y - \frac{v}{\lambda})} \frac{\sin^2 v}{v^2} dv \\ &\geq K(y - \frac{1}{\sqrt{\lambda}}) \int_{-\sqrt{\lambda}}^{+\sqrt{\lambda}} e^{-\frac{\sqrt{\lambda} + v}{\lambda}} \frac{\sin^2 v}{v^2} dv \\ &\geq K(y - \frac{1}{\sqrt{\lambda}}) e^{-\frac{2}{\sqrt{\lambda}}} \int_{-\sqrt{\lambda}}^{+\sqrt{\lambda}} \frac{\sin^2 v}{v^2} dv \end{aligned}$$

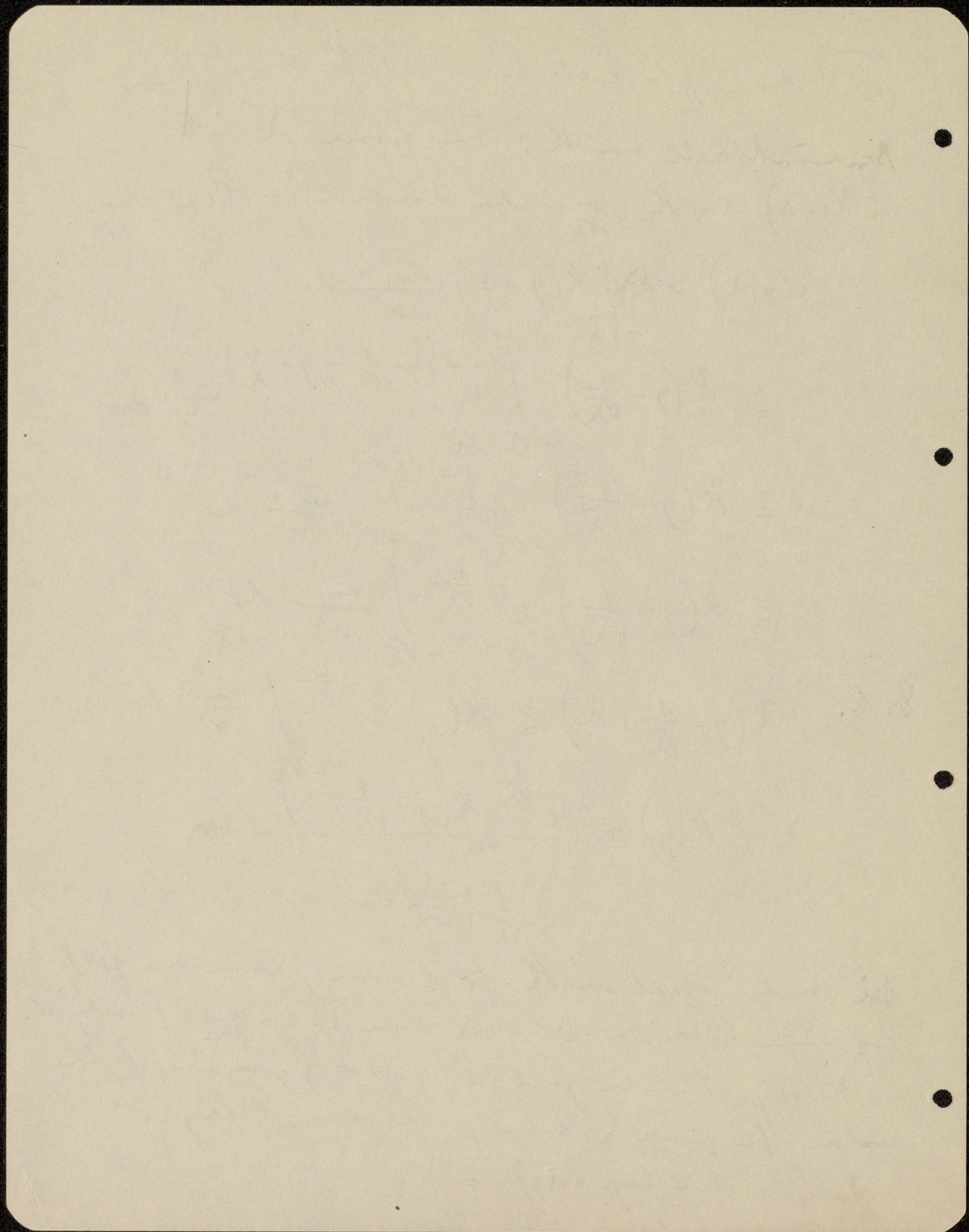
S. h. $K(y + \frac{1}{\sqrt{\lambda}}, \lambda) \geq K(y) e^{-\frac{2}{\sqrt{\lambda}}} \int_{-\sqrt{\lambda}}^{+\sqrt{\lambda}} \frac{\sin^2 v}{v^2} dv.$

$$K(y) \leq \frac{e^{\frac{2}{\sqrt{\lambda}}} K(y + \frac{1}{\sqrt{\lambda}}, \lambda)}{\int_{-\sqrt{\lambda}}^{+\sqrt{\lambda}} \frac{\sin^2 v}{v^2} dv}$$

Die Beschränktheit von K folgt also, wenn man $f(x)$ auf einem Stück $a \leq x \leq b$ annimmt $\lambda = 0$ auf $b = 1$ stetig ist.

Die obige Schranke geht für $y \rightarrow \infty$ gegen eine Zahl welche für große λ beliebig nahe an 1 liegt.

S. h. $\lim_{y \rightarrow \infty} K(y) \leq 1.$

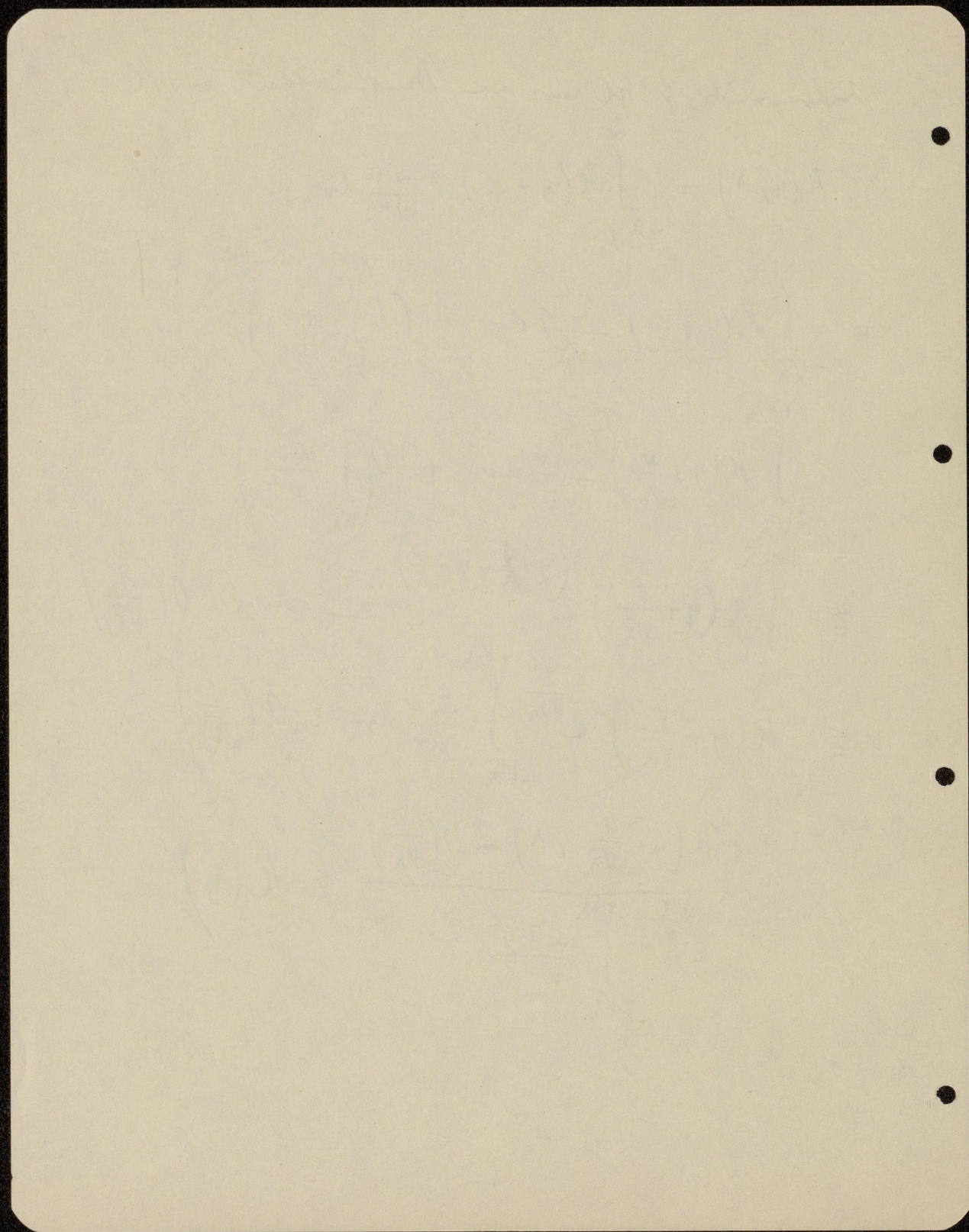


Andersweit folgt aus der Beschränktheit von $\mathcal{K}$: (65)

$$\begin{aligned}
 \mathcal{K}(y, \lambda) &= \int_{-\lambda y}^{\infty} \mathcal{K}(y + \frac{v}{\lambda}) \frac{\sin^2 v}{v^2} dv \\
 &= \int_{-\sqrt{\lambda}}^{+\sqrt{\lambda}} \mathcal{K}(y + \frac{v}{\lambda}) \frac{\sin^2 v}{v^2} dv + O\left(\int_{\sqrt{\lambda}}^{\infty} + \int_{-\lambda y}^{-\sqrt{\lambda}}\right) \\
 &= \int_{-\sqrt{\lambda}}^{+\sqrt{\lambda}} \mathcal{K}(y + \frac{v}{\lambda}) \frac{\sin^2 v}{v^2} dv + O\left(\int_{\sqrt{\lambda}}^{\infty} \frac{dv}{v^2}\right) \\
 &\leq \int_{-\sqrt{\lambda}}^{+\sqrt{\lambda}} \mathcal{K}(y + \frac{1}{\sqrt{\lambda}}) e^{\left(y + \frac{1}{\sqrt{\lambda}} - y - \frac{v}{\lambda}\right)} \frac{\sin^2 v}{v^2} dv + O\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right) \\
 &\leq \mathcal{K}(y + \frac{1}{\sqrt{\lambda}}) e^{\frac{2}{\sqrt{\lambda}}} \int_{-\sqrt{\lambda}}^{+\sqrt{\lambda}} \frac{\sin^2 v}{v^2} dv + O\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right)
 \end{aligned}$$

s. h.

$$\frac{\mathcal{K}(y - \frac{1}{\sqrt{\lambda}}, \lambda) - O\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right)}{e^{\frac{2}{\sqrt{\lambda}}} \int_{-\sqrt{\lambda}}^{+\sqrt{\lambda}} \frac{\sin^2 v}{v^2} dv} \leq \mathcal{K}(y)$$



$\alpha > 0, \lambda > 0, y \text{ reell.}$

(66)

$$F(x, \lambda, y) = \frac{1}{2} \int_{-2}^{+2} \left(1 - \frac{|t|}{2}\right) \frac{e^{it\lambda y}}{\alpha + it\lambda} dt$$

Durch Einführung von ∞

$$\frac{1}{\alpha + it\lambda} = \int_0^{\infty} e^{-(\alpha + it\lambda)u} du$$

mit

$$F(x, \lambda, y) = \int_0^{\infty} e^{-\alpha u} \frac{\sin^2 \lambda(y-u)}{\lambda^2(y-u)^2} du$$

Es existiert also

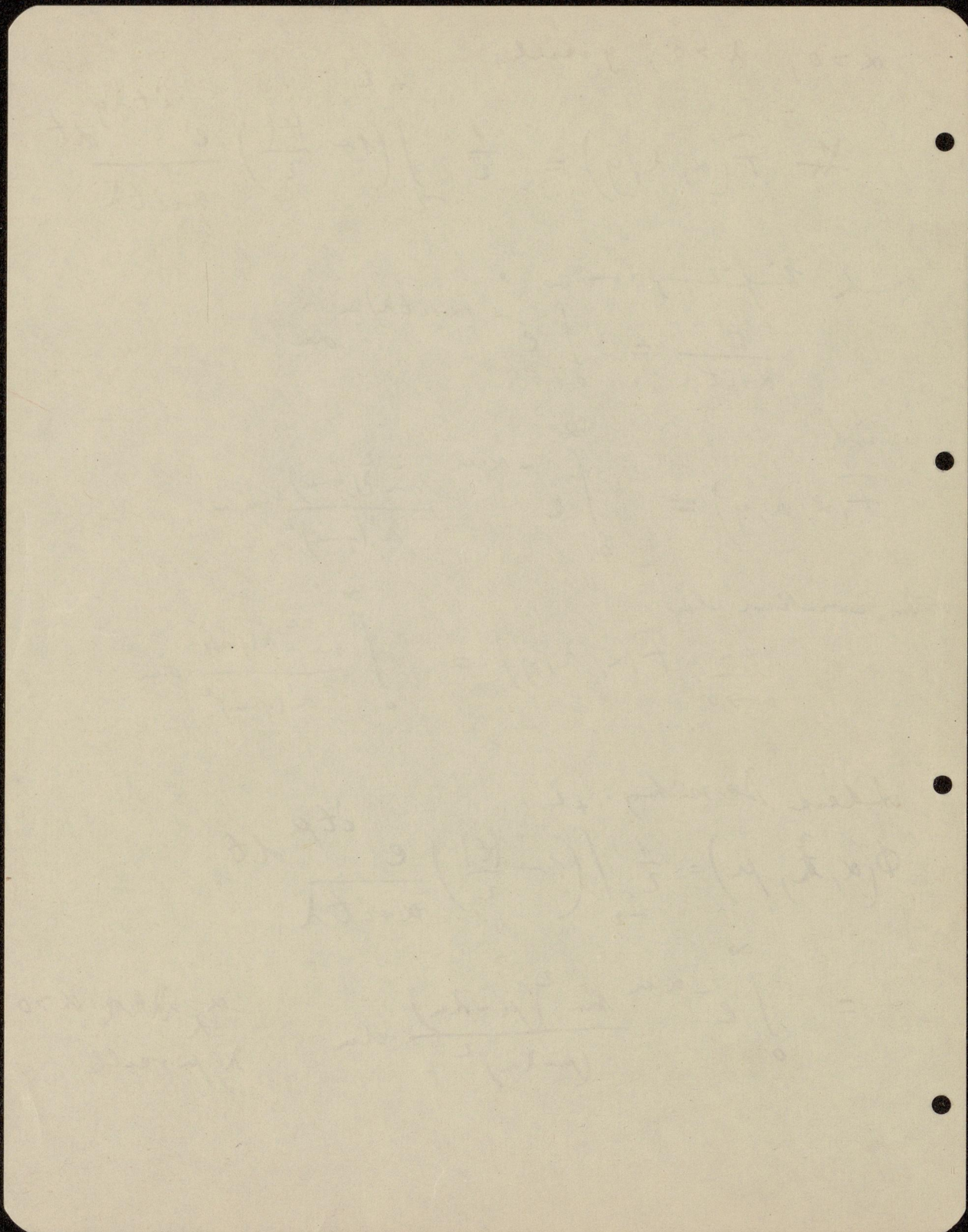
$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} F(x, \lambda, y) = \int_0^{\infty} \frac{\sin^2 \lambda(y-u)}{\lambda^2(y-u)^2} du$$

Andere Bezeichnung: $+2$

$$\Phi(x, \lambda, \mu) = \frac{1}{2} \int_{-2}^{+2} \left(1 - \frac{|t|}{2}\right) \frac{e^{it\mu}}{\alpha + it\lambda} dt$$

$$= \int_0^{\infty} e^{-\alpha u} \frac{\sin^2(\mu - \lambda u)}{(\mu - \lambda u)^2} du$$

~~$\alpha > 0$~~ $\alpha > 0$
 $\lambda, \mu \text{ reell}$



Beispiel einer Potenzreihe mit $a_n \geq 0$, der $(1-z)K(z)$ für $z \rightarrow 1$ beschränkt ist, aber oszilliert.

Man setze

$$\varphi(s) = \sum_{n=0}^{\infty} 2^n e^{-2^n s}, \quad \psi(s) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} e^{-\frac{s}{2^n}}$$

Dann ist für

$$g(s) = \varphi(s) + \psi(s) \quad \text{f.} \quad 2s g(2s) = s g(s)$$

Man ist $s g(s)$ eine Fourierreihe nach $s \frac{2\pi i k}{\log 2}$ entwickelbar:

$$s g(s) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k s^{\frac{2\pi i k}{\log 2}}$$

$$c_k = \int_{-\infty}^{+\infty} 2^x e^{-2^x} e^{-\frac{2\pi i k x}{\log 2}} dx = \frac{1}{\log 2} \int_0^{\infty} e^{-u} u^{-\frac{2\pi i k}{\log 2}} du$$

$$= \frac{\Gamma(1 - \frac{2\pi i k}{\log 2})}{\log 2}$$

$$s g(s) = -s \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\frac{s}{2^n}}}{2^n} + \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{\frac{2\pi i k \log s}{\log 2}}$$

Für $s \rightarrow 0$ hat $\sum_k$ keinen Limes, bleibt aber beschränkt.

Es ist

$$\varphi(s) \sim \frac{1}{s}$$

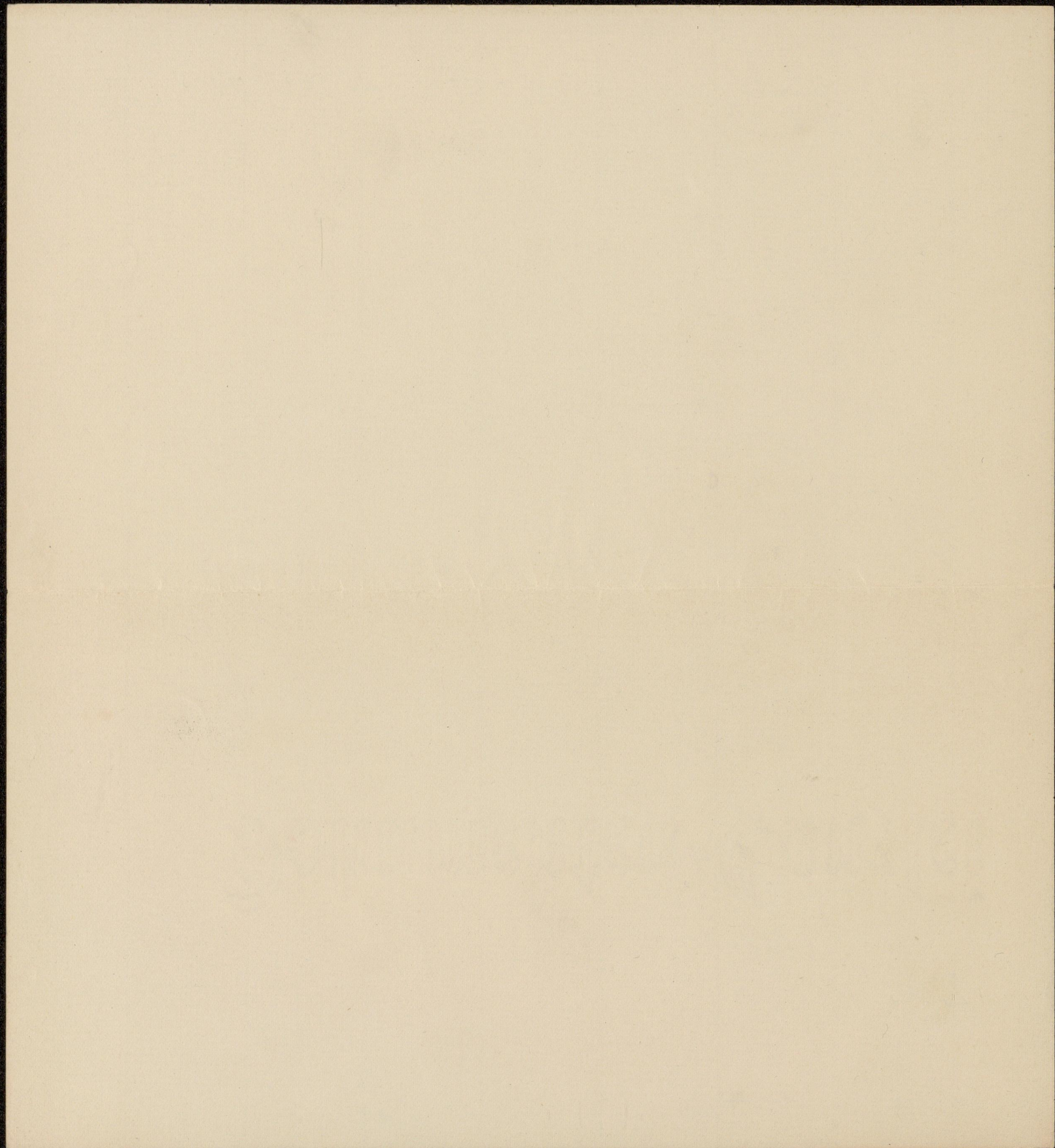
Die Koeffizientenreihe ist

$$\sum_{2^n \leq x} a_n = \sum_{2^n \leq x} 2^n = 2^{n'+1} - 1, \quad \text{w.} \quad 2^{n'} \leq x < 2^{n'+1}$$

$$n' = \frac{\log x}{\log 2} < n'+1$$

$$n' = \left[\frac{\log x}{\log 2} \right]$$

abroundet den zweiten x und $2x$



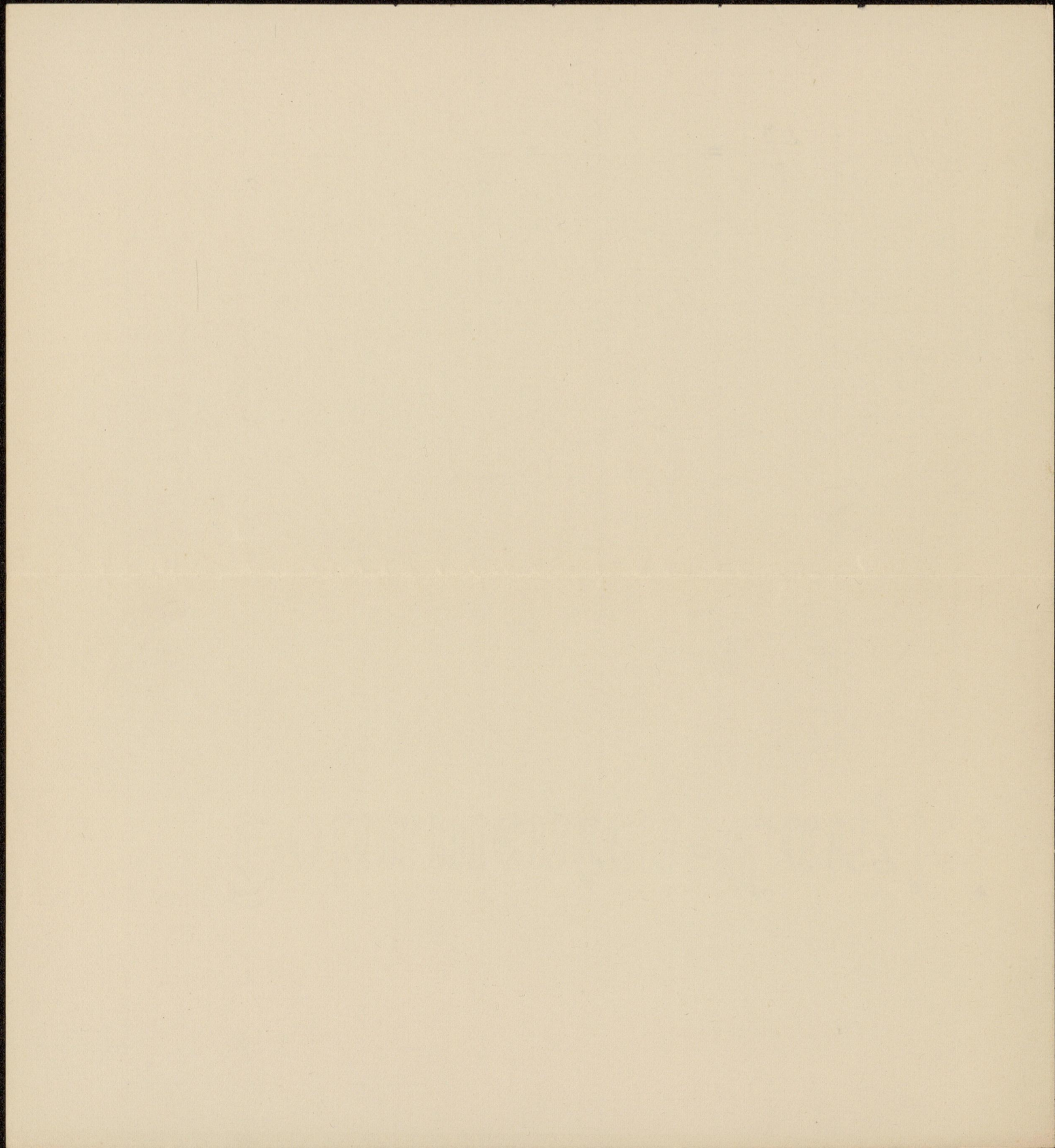
Die reguläre Dirichletreihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$ ist

$$f(s) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{2^{ns}} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{s-1}} \right)^n = \frac{1}{1 - \frac{1}{2^{s-1}}} = \frac{2^{s-1}}{2^{s-1} - 1}$$

hat auf $\sigma=1$ die unendlich vielen Pole $s = 1 + \frac{2\pi i k}{\log 2}$

Die Polenreihe ist wegen des Hadamardschen Lückensatzes nicht fortsetzbar.

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$
 $f(s)$ ist als Dirichletreihe darstellbar als $a_n = 0$, wenn $\log n \neq \log 2^k$,
 $a_n = n$, wenn $\log n = \log 2^k$, $\lambda_n = \log n$.



II

Def $(1-z)^2 \sum_1^\infty n \varepsilon_n z^n \rightarrow 0,$

$$\left| \sum_N^\infty n \varepsilon_n z^n \right| < \varepsilon \sum_N^\infty n z^{n-1}$$

$$< \varepsilon z \sum_1^\infty n z^{n-1} = \frac{\varepsilon z}{(1-z)^2}$$

$$(1-z)^2 \sum_1^\infty = (1-z)^2 \sum_1^N + (< \varepsilon z) \quad \text{g.e.d.}$$

Die Umkehrg. ist für Potenzreihen richtig)

man $a_n \geq 0$ mit der Verteilung

Verteilung: $\varphi(x) = a x^{\delta} (\log x)^{\delta_1} (\log \log x)^{\delta_2} \dots$

hier $\sum_1^x a_n z^n \sim \varphi\left(\frac{1}{1-z}\right) \quad \text{für } z \rightarrow 1 \quad C$

folgt da $a_n \geq 0$.

$$A(x) = \sum_{n \leq x} a_n \sim \frac{1}{\Gamma(\delta+1)} \varphi(x) \quad \text{für } x \rightarrow \infty.$$

Hardy-Littlewood: Tauberian Theorem

Proc. London Math. Soc. (2) 13, 1914

Richtmiller, Math. Z. 1925 (22)

Karamata, Math. Z. 1931 (33)

$$\begin{aligned}
\max \left(\left| \frac{p_1}{q_1} - \zeta \right|^{r-i}, \left| \frac{p_2}{q_2} - \zeta \right| \right) &\geq \{(8a)^{m+r+n} (4a)^{(m+r+1)\frac{n}{9}} |q_1|^{m+r+i} |q_2|^s\}^{-1}, \\
\max (|p_1 - q_1 \zeta_\tau|_{P_\tau}^{r-i}, |p_2 - q_2 \zeta_\tau|_{P_\tau}) \\
&\geq \{2^{2(m+r)+n} a^{m+r+n-1} (4a)^{(m+r+1)\frac{n}{9}} |p_1, q_1|^{m+r-i} |p_2, q_2|^s\}^{-1}, \\
\prod_{\tau=1}^t \max (|p_1 - q_1 \zeta_\tau|_{P_\tau}^{r-i}, |p_2 - q_2 \zeta_\tau|_{P_\tau}) \\
&\geq \{2^{2(m+r)+n} a^{m+r+n-1} (4a)^{(m+r+1)\frac{n}{9}} |p_1, q_1|^{m+r-i} |p_2, q_2|^s\}^{-1}, \\
\max \left(\left| \frac{p_1}{q_1} - \zeta \right|^{r-i}, \left| \frac{p_2}{q_2} - \zeta \right| \right) \prod_{\tau=1}^t \max (|p_1 - q_1 \zeta_\tau|_{P_\tau}^{r-i}, |p_2 - q_2 \zeta_\tau|_{P_\tau}) \\
&\geq \{a^{m+r+n-1} (8a)^{m+r+n} (4a)^{(m+r+1)\frac{n}{9}} |q_1|^{m+r-i} |q_2|^s\}^{-1}.
\end{aligned}$$

Die Ausdrücke auf der rechten Seite kann man noch etwas vereinfachen. Nach Voraussetzung ist

$$n \geq 3, \quad r \geq 2n^2 \geq 2 \cdot 3 \cdot n = 6n,$$

demnach

$$m+r+n \leq m+r+\frac{r}{6} \leq \left(1 + \frac{1}{6}\right)(m+r+1);$$

somit hat man

$$\begin{aligned}
(8a)^{m+r+n} &\leq (4a)^{3(m+r+1)}, \\
2^{2(m+r)+n} a^{m+r+n-1} &\leq (4a)^{3(m+r+1)}, \\
a^{m+r+n-1} (8a)^{m+r+n} &\leq (4a)^{3(m+r+1)},
\end{aligned}$$

und die obigen Ungleichungen gehen über in

$$\begin{aligned}
\max \left(\left| \frac{p_1}{q_1} - \zeta \right|^{r-i}, \left| \frac{p_2}{q_2} - \zeta \right| \right) &\geq \{(4a)^{(m+r+1)\left(3+\frac{n}{9}\right)} |q_1|^{m+r-i} |q_2|^s\}^{-1}, \\
\max (|p_1 - q_1 \zeta_\tau|_{P_\tau}^{r-i}, |p_2 - q_2 \zeta_\tau|_{P_\tau}) \\
&\geq \{(4a)^{(m+r+1)\left(3+\frac{n}{9}\right)} |p_1, q_1|^{m+r-i} |p_2, q_2|^s\}^{-1}, \\
\prod_{\tau=1}^t \max (|p_1 - q_1 \zeta_\tau|_{P_\tau}^{r-i}, |p_2 - q_2 \zeta_\tau|_{P_\tau}) \\
&\geq \{(4a)^{(m+r+1)\left(3+\frac{n}{9}\right)} |p_1, q_1|^{m+r-i} |p_2, q_2|^s\}^{-1}, \\
\max \left(\left| \frac{p_1}{q_1} - \zeta \right|^{r-i}, \left| \frac{p_2}{q_2} - \zeta \right| \right) \prod_{\tau=1}^t \max (|p_1 - q_1 \zeta_\tau|_{P_\tau}^{r-i}, |p_2 - q_2 \zeta_\tau|_{P_\tau}) \\
&\geq \{(4a)^{(m+r+1)\left(3+\frac{n}{9}\right)} |q_1|^{m+r-i} |q_2|^s\}^{-1}.
\end{aligned}$$

Man beachte, daß bei der ersten und letzten von diesen Ungleichungen

$$\left| \frac{p_1}{q_1} - \zeta \right| \leq 1, \quad \left| \frac{p_2}{q_2} - \zeta \right| \leq 1$$

Zu Schwarz's Lemma und
Hilfssatz in Funktionentheorie.

(13a)

1) Hilfssatz: (Offener) Gebiet G . In jedem abgegrenzten Teil von G konvergieren $f_n(z)$ gleichmäßig gegen das in G reguläre $\varphi(z)$.

$$f_n(z) \rightarrow \varphi(z), \quad \varphi(z) \neq 0.$$

Für jeden abgegrenzten Teil B von G , auf dem (rektifizierbaren) Rand R $\varphi(z) \neq 0$ gilt es ein $n_0 = n_0(B)$, sodass

$$f_n(z) = 0 \text{ und } \varphi(z) = 0 \quad z \text{ in } B + R$$

gleichviel Lösungen haben bei $n \geq n_0(B)$.

Beweis: Nach Weierstraß konvergiert auf R auch

$$f_n'(z) \rightarrow \varphi'(z) \text{ auf } R \text{ gleichm.}$$

Da $\varphi \neq 0$ auf R hat $|\varphi|$ auf R eine positive untere Schranke, also auf $|f_n(z)|$ für $n \geq n_0(B)$, also auch

$$\frac{1}{f_n} \rightarrow \frac{1}{\varphi} \text{ auf } R \text{ gleichm.}$$

$$\frac{f_n'}{f_n} \rightarrow \frac{\varphi'}{\varphi} \text{ auf } R \text{ gleichm.}$$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_R \frac{f_n'}{f_n} dz \rightarrow \frac{1}{2\pi i} \int_R \frac{\varphi'}{\varphi} dz, \text{ wegen Gesamtheit dieser Werte ist also}$$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_R \frac{f_n'}{f_n} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_R \frac{\varphi'}{\varphi} dz \text{ von einem } n_0(B) \text{ ab, g. e. d.}$$

Man beachte die Randvoraussetzungen: Für $|z| \leq 1$ $f_n(z) = 1 - z^n$

$f_n(z) \rightarrow 1$ für $|z| < 1$, ; $\varphi(z) = 1$ hat keine Nullstellen in $|z| \leq 1$

$f_n(z)$ hat dagegen auf dem Rande Nullstellen!

Die Voraussetzung, dass $\varphi \neq 0$ auf R' , ist nötig, weil die Nullstellen auf R'
durch die Nullstellen von

2) Die Menge der Funktionswerte $f_n(z)$ mit der Eigenschaft

$|f(z)|$ regulär in $|z| < 1$

$|f(z)| < M$ für $|z| < 1$

$f(0) = 1$, $f(z) \neq 0$ in $|z| < 1$

hat in jedem einzelnen Punkte z_0 eine positive absolute untere Schranke (nur von M und z_0 abhängig).

Beweis: Wäre die untere Schranke der $|f(z_0)|$ gleich Null, so gäbe es für Menge $f_n(z)$, wo $f_n(z_0) \rightarrow 0$, aber für ein gewisses ρ mit $|z_0| < \rho < 1$ nach Montel-Vitali eine Teilfolge, die in ρ -Kreis gleichmäßig konvergiert, gegen eine Grenzfunktion $\varphi(z)$.

$f_n(z) \rightarrow \varphi(z)$ für $|z| \leq \rho$.

Also $\varphi(0) = 1$, $\varphi(z) \neq 0$, $\varphi(z_0) = \lim f_n(z_0) = 0$.

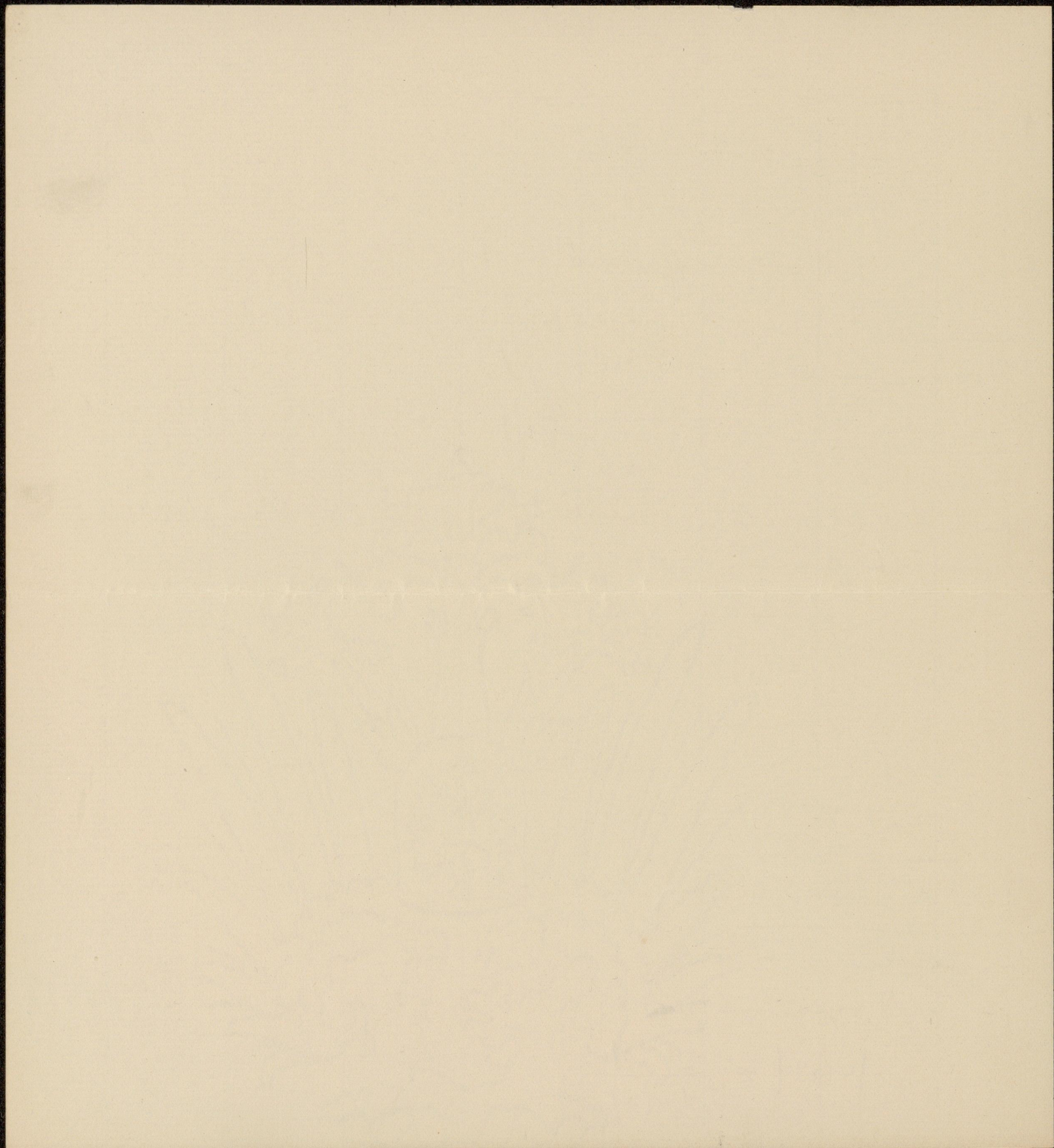
Da $\varphi(z)$ im Inneren des ρ -Kreises eine Nullstelle hat, müsste nach dem Hilfsatz auch die $f_n(z)$ für $n \geq n_0$ mindestens eine Nullstelle haben, gegen Vor. $f_n(z) \neq 0$.

Eine Normierung wie $f(0) = 1$ ist richtig, denn sonst würde man $\frac{f(z)}{f(0)}$ für $n \rightarrow \infty$ die Voraussetzungen erfüllen und doch beliebig klein werden.

Nach Carathéodory - Schwarz ist

für $\varphi(s)$ regulär mit $|s| \leq 1$, $\Re \varphi(s) \leq \frac{1}{2}$, $\varphi(0) = 0$ (also $\frac{1}{2} > 0$)

$$|\varphi(s)| \leq \frac{2 \frac{1}{2} |s|}{1 - |s|}$$



~~Man setze~~ Sei nun $f(s)$ regulär für $|s| < 1$, $f(0) = 1$,
 $|f(s)| < M$ für $|s| < 1$ (also $M > 1$), so ist

(13c)

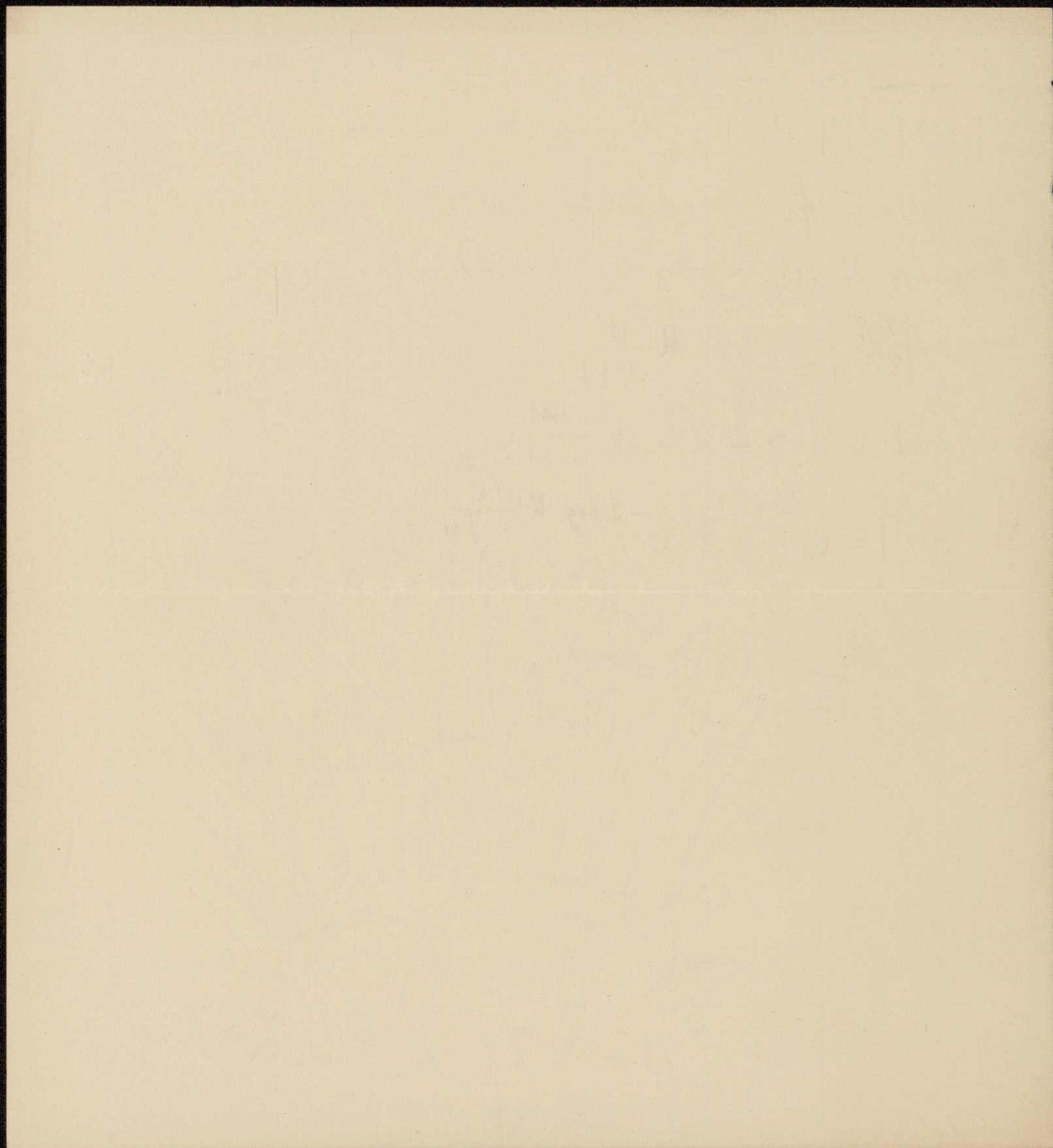
$\varphi(s) = \log f(s)$ regulär für $|s| < 1$, $\varphi(0) = 0$,

$$\Re \varphi(s) < \log M \quad \text{für } |s| < 1$$

Also $|\varphi(s)| \leq 2 \log M \frac{|s|}{1-|s|}$,

$$\Re \varphi(s) \geq -2 \log M \frac{|s|}{1-|s|}$$

$$|f(s)| = e^{\Re \varphi(s)} \geq e^{-2 \log M \frac{|s|}{1-|s|}}, \quad \text{wobei } f(0) = 1, \quad |f(s)| < M \quad \neq$$



Satz über singuläre Stellen auf der Konvergenzgrenze.

Nehmen $f(s) = \sum a_n e^{-\lambda_n s}$ die Konvergenzgrenze γ hat, und alle $a_n \geq 0$, so ist $s = \gamma$ singulärer Punkt.

(Vgl. v. Landau),

Wäre γ regulär, so müßte die Potenzreihe $\mathcal{P}(s - (\gamma - \alpha))$, mit $(\gamma - \alpha)$ für ein $s = \sigma < \gamma$, d.h. $\sigma - \alpha < \gamma - \alpha$ konvergieren.

$$f^{(k)}(s) = \sum_n (-1)^k \lambda_n^k a_n e^{-\lambda_n s}$$

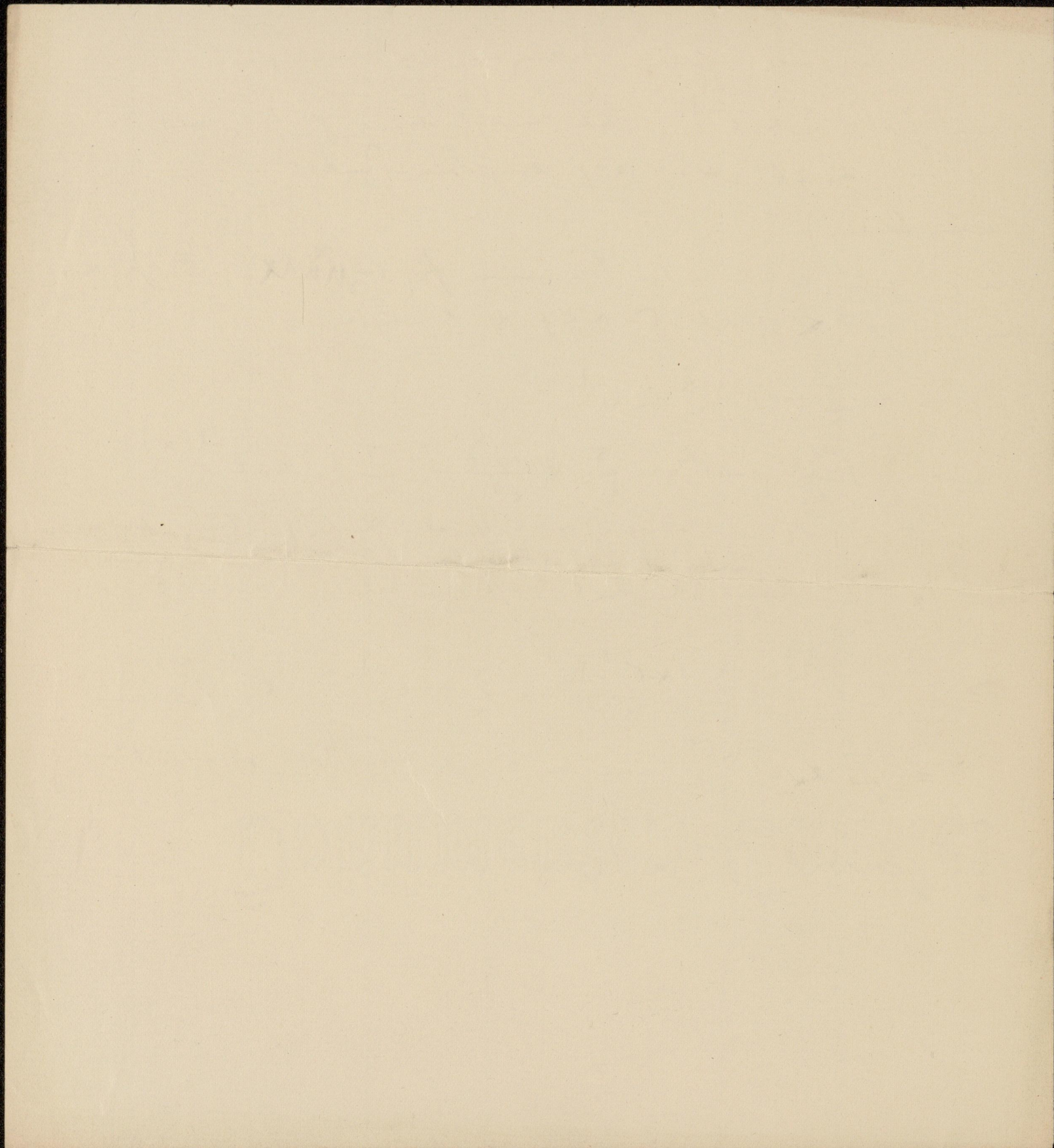
$$f(s) = \sum_k \frac{f^{(k)}(\alpha)}{k!} (s - \alpha)^k = \sum_k \frac{(s - \alpha)^k (-1)^k}{k!} \sum_n \lambda_n^k a_n e^{-\lambda_n \alpha}$$

Für $s = \sigma = \gamma - \varepsilon$ ist $-1 \cdot (s - \alpha) > 0$, also alle Glieder positiv, also 6

$$f(\sigma) = \sum_{k,n} \frac{(\alpha - \sigma)^k}{k!} \lambda_n^k a_n e^{-\lambda_n \alpha} \quad (\text{in beliebiger Reihenfolge summiert})$$

$$= \sum_n a_n e^{-\lambda_n \alpha} \sum_k \frac{(\alpha - \sigma)^k \lambda_n^k}{k!} = \sum_n a_n e^{-\lambda_n \alpha} \cdot e^{\lambda_n (\alpha - \sigma)}$$

$$= \sum_n a_n e^{-\lambda_n \sigma} \quad \text{wäre in } \sigma \text{ noch konvergent, obwohl } \sigma < \gamma.$$



Analytische Zahlentheorie.

Anwendungen der Analysis auf Zahlentheorie.

Gegeben: diskontinuierliche Funktion $a(n)$ definiert.

Man wähle sich eine Reihe von Funktionen $f_n(x)$.

Zur Funktion $a(n)$ wird so die Funktion

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a(n) f_n(x)$$

definiert (falls konvergent).

Wenn man eine Funktion auf höchstens eine Weise als unendl.

Reihe $\sum c_n f_n(x)$ darstellbar ist, muss sich rückwärts aus dem Verhalten von $\varphi(x)$ die Koeffizienten-Menge $a(n)$ bestimmen lassen.

Fall $\varphi(x)$ gelöst, ist die $\varphi(x)$ genaue Kenntnis von $a(n)$ bekannt, kann man mit Hilfe dieses Kenntnis φ wieder mehr über $a(n)$ aussagen.

Übertragung des Problems auf die Diskontinuität
in die Analysis Kontinuitäts Theorie.

Die eine Funktion $\varphi(x)$ spiegelt die Eigenschaften der unendl. Zahlenmenge $a(n)$.

Hauptbeispiel: 1) $f_n(x) = x^n$

$$2) f_n(x) = n^x$$

1) Potenzreihe, brauchen für additive Probleme

z.B. $a(n) =$ Anzahl der Darstellg. von n als Summe von 4 Quadraten.

$$\varphi(x) = \sum_{n_1, \dots, n_4} x^{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 + n_4^2} = \left(\sum x^{n^2} \right)^4$$

$$\begin{aligned}
 & \sum_{n \sim q} x(n) \int n t^a \quad n \equiv \omega^x + \omega^{-x} \\
 & \sum_{x \sim \frac{q+1}{2}} (\omega^x + \omega^{-x}) \int t^a (\omega^x + \omega^{-x}) \quad R(\omega, f) \\
 & a + \frac{q-1}{2}
 \end{aligned}$$

Σ

UT

$\varphi = \overline{\varphi}$

$$\begin{aligned}
 & \sum x(n) \int n t^a \quad x \quad \sum x(m) \int -m t^a \\
 & \sum x(n) x(m) \int t^a (n+m) \\
 & \sum x(n) x(-n+m) \int t^a m \\
 & \left(\sum_n x(n) x(m-n) \right) \quad \text{like}
 \end{aligned}$$

Man findet, dass

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} x^{n^2}\right)^4 \text{ und } \sum_{n=1}^{\infty} x^n \times \text{Summe der Teiler von } n$$

ähnliche Funktionaleigenschaften haben, wobei man ablesen kann (ellipt. Modulform)

$$\varphi(x) = \left(\sum x^{n^2}\right)^4 = \sum_{n=1}^{\infty} x^n \times t(n) + \text{elementare Funktion.}$$

$$\sum b_n x^n$$

also wegen Identifizierung

$$a(n) = t(n) + b_n$$

2) Dirichletreihe für multiplikative Probleme.

$$\text{z.B. } a(n) = \begin{cases} 1 & \text{wenn } n \text{ prim ist} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

$$\varphi(x) = \sum_p \frac{1}{p^x}$$

Man kann nun durch elementare Umformungen beweisen:

$$\xi(x) = \sum_n \frac{1}{n^x} = \prod_p \frac{1}{1 - \frac{1}{p^x}} \quad \Re(x) > 1.$$

$$\log \xi(x) = \sum_p \log\left(1 - \frac{1}{p^x}\right)$$

$$= \sum \left(\frac{1}{p^x} + \frac{1}{2p^{2x}} + \dots - \frac{1}{mp^{mx}} + \dots \right)$$

$$= \varphi(x) + \frac{1}{2} \varphi(2x) + \dots + \frac{1}{m} \varphi(mx) + \dots$$

$\log \xi(x) - \varphi(x)$ ist also rechts von $\frac{1}{2}$ in der x -Ebene regulär

Die Primzahlfunktion $\varphi(x)$ ist rechts von $\frac{1}{2}$ mit ausreichender Geringfügigkeit von $\log \xi(x)$ approximierbar.

$$\begin{pmatrix} a \\ \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \mathcal{L}^{-1} \begin{pmatrix} \omega & 0 \\ 0 & \bar{\omega} \end{pmatrix} \mathcal{L}$$

$$\left(\frac{r^2 - 4}{9} \right) = +1$$

$$\omega^x + \omega^{-x} = r$$

$$R^{\frac{q+1}{2}} = 1$$

$$R = \begin{pmatrix} \omega & 0 \\ 0 & \bar{\omega} \end{pmatrix}$$

$$\omega = e^{\frac{2\pi i}{q+1}}$$

$$\omega^{\frac{q+1}{2}} = -1$$

$$x(n)$$

$$X(\mathbb{R})$$

$$X(R^a) = \{ \rho_i^{a-a} \}$$

$$\frac{1}{q+1} R^* = \begin{pmatrix} \bar{\omega}^* & \omega^* \end{pmatrix}$$

$$\omega^* + \omega^{-x} = r t^{-a}$$

$$X(r t^{-a}) = -\frac{ix}{\omega + \omega^{-x}}$$

$$(r t^{-a})^2 - 4$$

$$\left(\frac{(r t^{-a})^2 - 4}{9} \right) + 1$$

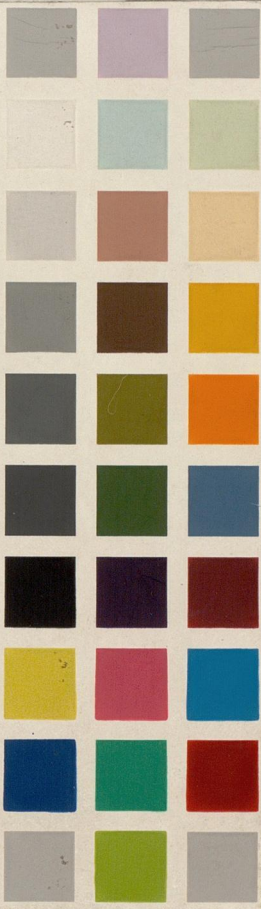
Dirichlet'sche Reihen
u. Neue Beweise d. Primzahlvertheilung

1922

(12)



10 20 30 40 50 60 70 80 90 100 110 130



OpCARD 201

© SUB GÖTTINGEN/GDZ