

---

## Cohomologie à coefficients non abéliens et espaces fibrés

Paul Dedecker

### Résumé

Le problème d'extension du groupe structural d'un espace fibré principal est résolu sans faire d'hypothèse sur le noyau de l'extension. L'obstacle est une classe de cohomologie de dimension deux de la base à coefficients dans un faisceau de groupes non abéliens. Ces classes dépendent d'une suite exacte et non du faisceau seul comme dans le cas abélien. Signification géométrique des classes « neutres ».

---

### Citer ce document / Cite this document :

Dedecker Paul. Cohomologie à coefficients non abéliens et espaces fibrés. In: Bulletin de la Classe des sciences, tome 41, 1955. pp. 1132-1146;

doi : <https://doi.org/10.3406/barb.1955.69497>;

[https://www.persee.fr/doc/barb\\_0001-4141\\_1955\\_num\\_41\\_1\\_69497](https://www.persee.fr/doc/barb_0001-4141_1955_num_41_1_69497);

---

Fichier pdf généré le 22/02/2024

**Cohomologie à coefficients non abéliens  
et espaces fibrés.**

par PAUL DEDECKER,  
*Chef de travaux à l'Université de Liège (\*)*.

*Résumé.* — Le problème d'extension du groupe structural d'un espace fibré principal est résolu sans faire d'hypothèse sur le noyau de l'extension. L'obstacle est une classe de cohomologie de dimension deux de la base à coefficients dans un faisceau de groupes non abéliens. Ces classes dépendent d'une suite exacte et non du faisceau seul comme dans le cas abélien. Signification géométrique des classes « neutres ».

1. PRÉLIMINAIRES.

Le problème d'extension du groupe structural d'un espace fibré est le suivant. Soit une suite exacte de groupes topologiques (non abéliens)

$$e \rightarrow N \rightarrow G \xrightarrow{j} H \rightarrow e.$$

*Trouver une condition nécessaire et suffisante pour qu'un espace fibré principal  $E'(B, H)$  de base  $B$  et groupe structural  $H$  soit l'espace fibré associé à un espace fibré principal  $E(B, G)$  lorsqu'on fait opérer  $G$  à gauche sur  $H$  par*

$$(g, h) \rightarrow j(g) \cdot h \quad (g \in G, h \in H).$$

Une solution a été trouvée indépendamment par J. Frenkel [4] et moi-même [2] <sup>(1)</sup> sous les hypothèses suivantes :

- (i) le noyau  $N$  de l'extension est dans le centre de  $G$  ;
- (ii)  $N$  admet une section locale dans  $G$  ;
- (iii) l'espace de base  $B$  est paracompact.

(\*) Présenté par M. L. GODEAUX.

(1) Ce travail sera désigné ici par E. G. S.

Voir également un travail récent de A. GROTHENDICK (Kansas University).

J. Frenkel obtient en outre une solution sous l'hypothèse plus faible :

(i') N est abélien.

Dans la présente Note nous nous débarassons de l'hypothèse (i) ou (i'). Il est nécessaire pour cela d'étendre à la dimension deux la cohomologie d'un complexe simplicial (d'un espace) à coefficients dans un groupe non abélien (dans un faisceau de groupes non abéliens). Les classes définies ici dépendent d'une suite exacte de coefficients ; si l'hypothèse (i) est vérifiée on retrouve *une partie* des classes usuelles.

Dans les numéros 2 et 3 nous rappelons les principaux résultats de E. G. S. relatifs à la cohomologie de dimensions zéro et un d'un complexe simplicial à coefficients dans un groupe non abélien.

## 2. COHOMOLOGIE D'UN COMPLEXE SIMPLICIAL A COEFFICIENTS NON ABÉLIENS.

Soient  $K$  un complexe simplicial,  $K_p$  l'ensemble des  $p$ -simplexes ordonnés de  $K$ . Pour tout groupe  $G$  on appellera  $p$ -cochaîne de  $K$  à coefficients dans  $G$  une fonction  $f: K_p \rightarrow G$ . Les cochaînes forment un groupe  $C^p(K, G)$  dont l'unité est l'application constante  $\gamma_G^p$  de  $K_p$  sur l'unité de  $G$ . Si une permutation paire (resp. impaire) des sommets d'un simplexe quelconque conserve la valeur d'une cochaîne  $f$  (resp. remplace cette valeur par son inverse), la cochaîne sera dite *alternée*. L'ensemble des  $p$ -cochaînes alternées sera noté  $C_a^p(K, G)$ .

La valeur de  $f$  sur le simplexe  $(i_0, i_1, \dots, i_p) \in K_p$  sera notée  $f_{i_0 i_1 \dots i_p}$ . Si  $f \in C_a^p(K, G)$  on a donc  $f_{i_0 i_1 \dots i_p} = f_{i_1 i_0 i_2 \dots i_p}^{-1} = f_{i_1 i_2 i_0 \dots i_p} = \text{etc.}$

A toute  $p$ -cochaîne  $f$  on associe une  $(p+1)$  cochaîne  $\delta f$  (*cobord* de  $f$ ) définie par

$$(2.1) \quad (\delta f)_{i_0 i_1 \dots i_{p+1}}^{(-1)^{p+1}} = f_{i_1 \dots i_{p+1}} f_{i_0 i_2 \dots i_{p+1}}^{-1} f_{i_0 i_1 i_3 \dots i_{p+1}} \dots f_{i_0 i_1 \dots i_p}^{(-1)^{p+1}}.$$

Si  $\delta f = \gamma_G^{p+1}$ , on dit que  $f$  est un *cocycle* lorsque  $p = 0, 1$  ; pour  $p = 2$  voir le n° 4.

On observe que si  $f \in C^0(K, G)$ ,  $\delta f \in C_a^1(K, G)$  et  $\delta(\delta f) = \gamma_c^2$ .

Soit  $Z_a^1(K, G)$  l'ensemble des cocycles alternés de dimension un. On fait opérer comme suit  $C^0(K, G) = C_a^0(K, G)$  à gauche sur  $Z_a^1(K, G)$ . Si

$$f = (f_i) \in C^0(K, G), \quad g = (g_{ij}) \in Z_a^1(K, G)$$

on pose

$$f \cdot g = (f_i g_{ij} f_j^{-1}).$$

ce qui définit bien un cocycle comme on le vérifie aisément.

Les classes d'intransitivité de  $Z_a^1(K, G)$  sont appelées *classes de cohomologie de dimension un* de  $K$  à coefficients dans  $G$ . On vérifie que tous les cobords appartiennent à une même classe et que tout élément de celle-ci est un cobord ; cette classe est appelée *neutre* ou *nulle*. On note  $H^1(K, G)$  l'ensemble des classes de cohomologie de dimension un de  $K$  à coefficients dans  $G$  et  $\mathfrak{g}^1$  la classe neutre.

Nous noterons  $H^0(K, G)$  le groupe des cocycles de dimension zéro de  $K$  à coefficients dans  $G$  ; ces cocycles sont aussi appelées *classes de cohomologie de dimension zéro*. Ce groupe s'identifie au groupe des applications de l'ensemble des composantes connexes de  $K$  dans  $G$ .

### 3. SUITE EXACTE DE COHOMOLOGIE A COEFFICIENTS NON ABÉLIENS.

La notion ci-dessous de suite exacte généralise un peu celle de E. G. S.

Nous considérons des paires  $(X, Y)$  où  $Y$  est une partie de  $X$  ; une *application de paires*

$$(3.1) \quad f : (X, Y) \rightarrow (X', Y')$$

est une application  $f : X \rightarrow X'$  telle que  $f(Y) \subset Y'$ .

DÉFINITION 3.1. Une suite de paires et d'applications

$$(3.2) \quad \dots \rightarrow (X_{i-1}, Y_{i-1}) \xrightarrow{f_{i-1}} (X_i, Y_i) \xrightarrow{f_i} (X_{i+1}, Y_{i+1}) \rightarrow \dots$$

est dite *exacte* si

$$f_{i-1}(X_{i-1}) = f_i^{-1}(Y_{i+1}).$$

Si  $Y$  contient le seul élément  $x \in X$ , nous écrivons  $(X, x)$  au lieu de  $(X, \{x\})$ . Si  $X$  est un groupe et si  $e$  est son unité, nous écrivons  $X$  au lieu de  $(X, e)$ . Si  $X$  et  $X'$  sont tous deux des groupes (topologiques), on supposera toujours que  $f: X \rightarrow X'$  est un homomorphisme (continu). Nous noterons  $e$  le groupe réduit à sa seule unité.

Si dans la suite exacte (3.2)  $X_{i+1}$  ne contient qu'un seul élément, l'application  $f_{i-1}: X_{i-1} \rightarrow X_i$  est surjective. Si  $X_{i-1}$  se réduit à un seul élément  $x_{i-1}$ ,  $Y_i$  se réduit à un seul élément  $x_i = f_{i-1}(x_{i-1})$ ; de plus  $x_i$  est le seul élément de  $X_i$  tel que  $f(x_i) \in Y_{i+1}$ ; on ne peut en général affirmer que  $f_i$  est biunivoque. S'il en est ainsi nous remplacerons la flèche de  $f_{i-1}$  par  $\Rightarrow$ .

Nous avons établi dans E. G. S. qu'à toute suite exacte de groupes

$$(3.3) \quad e \rightarrow N \rightarrow G \rightarrow H \rightarrow e$$

correspond une suite exacte de cohomologie

$$(3.4) \quad e \rightarrow H^0(K, N) \rightarrow H^0(K, G) \rightarrow H^0(K, H) \xrightarrow{\delta_0^*} \\ \rightarrow (H^1(K, N), \mathfrak{n}^1) \rightarrow (H^1(K, G), \mathfrak{g}^1) \rightarrow (H^1(K, H), \mathfrak{h}^1)$$

et que celle-ci se complète par un terme

$$(H^1(K, N), \mathfrak{h}^1) \xrightarrow{\delta_1^*} H^2(K, N)$$

lorsque  $N$  est dans le centre de  $G$ ;  $H^2(K, N)$  désigne le deuxième groupe de cohomologie usuel à coefficient dans le groupe abélien  $N$ .

Nous nous proposons de compléter la suite (3.4) par un terme

$$(H^1(K, H), \mathfrak{h}^1) \xrightarrow{\delta_1^*} (H^2(K, N), \mathfrak{n}^2), \quad \mathfrak{n}^2 \subset H^2(K, N)$$

sans faire d'hypothèse sur  $N$ .

#### 4. DÉFINITION DE $H^2(K, N)$ , $N$ QUELCONQUE.

La suite exacte de groupes (3.3) nous permet d'identifier  $N$  à un sous-groupe invariant de  $G$ ; de même nous identifierons  $C^p(K, N)$ ,  $C_a^p(K, N)$  à leurs images respectives dans  $C^p(K, G)$ ,  $C_a^p(K, G)$ .

Considérons le diagramme commutatif

$$(4.1) \quad \begin{array}{ccccccc} e \implies & (C_a^1(\mathbf{K}, \mathbf{N}), \gamma_{\mathbf{N}}^1) & \xrightarrow{i_1} & (C_a^1(\mathbf{K}, \mathbf{G}), \gamma_{\mathbf{G}}^1) & \xrightarrow{j_1} & (C_a^1(\mathbf{K}, \mathbf{H}), \gamma_{\mathbf{H}}^1) & \longrightarrow e \\ & \downarrow \delta & & \downarrow \delta & & \downarrow \delta & \\ e \longrightarrow & C^2(\mathbf{K}, \mathbf{N}) & \xrightarrow{i_2} & C^2(\mathbf{K}, \mathbf{G}) & \xrightarrow{j_2} & C^2(\mathbf{K}, \mathbf{H}) & \longrightarrow e \end{array}$$

où les lignes horizontales sont exactes. Toute classe de cohomologie  $\mathfrak{h} \in H^1(\mathbf{K}, \mathbf{H})$  est une partie de  $C_a^1(\mathbf{K}, \mathbf{H})$  et le diagramme montre que l'ensemble  $\delta(j_1^{-1}(\mathfrak{h})) \subset C^2(\mathbf{K}, \mathbf{G})$  s'identifie à une partie de  $C^2(\mathbf{K}, \mathbf{N})$  :

$$\delta(j_1^{-1}(\mathfrak{h})) \subset C^2(\mathbf{K}, \mathbf{N})$$

que nous voulons déterminer.

Soit  $h \in \mathfrak{h}$  et commençons par déterminer

$$\bar{h} = \delta(j_1^{-1}(h)).$$

Si  $h = (h_{ij})$ ,  $\bar{h}$  est l'ensemble des  $\delta g$  tels que

$$g \in C_a^1(\mathbf{K}, \mathbf{G}), \quad j_1(g) = h.$$

Notons  $\tilde{h}$  l'ensemble des  $g$  satisfaisant à ces conditions. Si  $g = (g_{ij}) \in \tilde{h}$ , tout autre  $g' = (g'_{ij}) \in \tilde{h}$  est de la forme

$$(4.2) \quad g'_{ij} = n_{ij} g_{ij}, \quad n_{ij} \in \mathbf{N} \quad (\text{où } n = (n_{ij}) \in C^1(\mathbf{K}, \mathbf{N}))$$

et on vérifie que

$$(4.3) \quad n_{ij} g_{ij} = g_{ij} n_{ji}^{-1}.$$

Réciproquement si  $g \in \tilde{h}$  et si  $n \in C^1(\mathbf{K}, \mathbf{N})$  vérifient (4.3), les relations (4.2) définissent un élément  $g' = n \cdot g \in \tilde{h}$ .

Supposons  $g$  fixé dans  $\tilde{h}$  et pour tout  $n \in C^1(\mathbf{K}, \mathbf{N})$  définissons pour  $(i, j) \in \mathbf{K}_1, (i, j, k) \in \mathbf{K}_2, (i, j, k, l) \in \mathbf{K}_3, \text{ etc...} :$

$$n_{ij}^i = n_{ij}, \quad n_{jh}^{ij} = g_{ij} n_{jh} g_{ji}, \quad n_{hl}^{ijh} = g_{ij} g_{jh} n_{hl} g_{hj} g_{ji}, \text{ etc...}$$

(Pour la signification de ces quantités, voir le n° 6 ci-dessous).

Moyennant quoi la condition (4.3) devient équivalente à l'une des suivantes

$$n_{ij}^i = (n_{ji}^{ij})^{-1} \quad \text{ou} \quad n_{jk}^{ij} = (n_{kj}^{ij})^{-1} \quad \text{ou} \quad \text{etc...}$$

(Notons que  $n_{jl}^{ijk} = n_{jl}^{ij}$  etc...). Pour tout  $n \in C^1(K, N)$  définissons encore  $(\Delta_g n) \in C^2(K, N)$  par

$$(\Delta_g n)_{ijk} = n_{jk}^j n_{ki}^{jk} n_{ij}^{ki}.$$

Il en résulte la formule

$$\delta(n \cdot g) = \Delta_g n \cdot \delta g$$

ou

$$(n_{jk} g_{jk})(n_{ki} g_{ki})(n_{ij} g_{ij}) = (\Delta_g n)_{ijk} \cdot (\delta g)_{ijk}.$$

Nous dirons que toute  $n$  vérifiant (4.3) est une *cochaîne multiplicatrice* de  $g$  et que  $\Delta_g n$  est son *g-cobord*. Nous avons la

PROPOSITION 4.1 *A tout élément  $g \in \tilde{h}$  correspond dans  $C^1(K, N)$  un ensemble  $\mu(g)$  de cochaînes multiplicatrices et l'ensemble  $\bar{h} = \delta(j_1^{-1}(h)) \subset C^2(K, N)$  s'obtient en multipliant à gauche le cobord de  $g$  par les g-cobords des cochaînes multiplicatrices de  $g$  :*

$$\bar{h} = \{ \Delta_g n \cdot \delta g, n \in \mu(g) \}.$$

Faisons maintenant varier le cocycle  $h$  dans sa classe de cohomologie  $\mathfrak{h}$ . Cela revient à remplacer  $h = (h_{ij})$  par  $h' = (h'_{ij})$  où

$$h'_{ij} = \eta_i h_{ij} \eta_j^{-1}, \quad \eta = (\eta_i) \in C^0(K, H).$$

Soit alors une cochaîne  $\xi \in C^0(K, G)$  telle que  $j_0(\xi) = \eta$ ,  $\xi = (\xi_i)$ ; pour  $g \in \tilde{h}$ , on a  $g' = \xi \cdot g \in \tilde{h}'$  ( $g'_{ij} = \xi_i g_{ij} \xi_j^{-1}$ ).

LEMME 4.1. *A toute cochaîne multiplicatrice  $n$  de  $g$  correspond une multiplicatrice  $n'$  de  $g'$  définie par*

$$n'_{ij} = \xi_i n_{ij} \xi_j^{-1}.$$

Il faut montrer que  $n'_{ij} g'_{ij} = g'_{ij} n_{ij}^{-1}$ . Cela résulte de

$$\begin{aligned} n'_{ij} g'_{ij} &= \xi_i n_{ij} \xi_i^{-1} \xi_i g_{ij} \xi_j^{-1} = \xi_i n_{ij} g_{ij} \xi_j^{-1} \\ &= \xi_i g_{ij} n_{ij}^{-1} \xi_j^{-1} = \xi_i g_{ij} \xi_j^{-1} \xi_j n_{ij}^{-1} \xi_j^{-1} = g'_{ij} n'_{ij}^{-1}. \end{aligned}$$

LEMME 4.2. Si  $\nu = (\nu_{ijk}) \in \bar{h}$ , l'élément  $\nu' = (\xi_j \nu_{ijk} \xi_j^{-1})$  appartient à  $\bar{h}'$ .

En effet on a

$$\nu = \delta(n \cdot g) \quad n \in \mu(g)$$

et

$$\begin{aligned} \nu'_{ijk} &= \xi_j (n_{jk} g_{jk}) \xi_k^{-1} \xi_k (n_{ki} g_{ki}) \xi_i \xi_i^{-1} (n_{ij} g_{ij}) \xi_j^{-1} \\ &= (n'_{jk} g'_{jk}) (n_{ki} g_{ki}) (n'_{ij} g'_{ij}) \end{aligned}$$

d'où  $\nu' = \delta(n'g)$ . La propriété résulte donc du lemme 4.1.

On voit que l'application  $\nu \rightarrow \nu'$  est une application biunivoque de  $\bar{h}$  sur  $\bar{h}'$  et que si  $\bar{h}$  contient  $\gamma_N^2$  il en est de même de  $\bar{h}'$ . On peut poser  $\nu' = \xi \cdot \nu$  et il est clair que

$$\xi' \cdot (\xi \cdot \nu) = (\xi' \cdot \xi) \cdot \nu, \quad \gamma_G^0 \cdot \nu = \nu.$$

Par suite  $C^0(K, G)$  opère à gauche sur  $C^2(K, N)$  ; nous désignons par  $\rho$  la relation d'équivalence sur  $C^2(K, N)$  dont les classes sont les classes d'intransitivité par rapport à cette loi de groupe d'opérateurs. Nous pouvons énoncer la

PROPOSITION 4.2. Soit  $\bar{h}$  l'ensemble  $\delta(j_1(h))$  de 2-cochaînes associé à un cocycle  $h \in C_a^1(K, H)$ . L'ensemble  $\bar{h} = \delta(j_1(\bar{h}))$  associé à sa classe de cohomologie s'obtient en saturant  $\bar{h}$  par la relation d'équivalence  $\rho$ .

En combinant les propositions 4.1 et 4.2 on obtient

PROPOSITION 4.3. La réunion des classes  $\bar{h}$  est l'ensemble  $Z^2(K, N) = C^2(K, N) \cap \delta C_a^1(K, G)$ . Cet ensemble est saturé pour l'équivalence  $\rho$ . Si  $\nu \in Z^2(K, N)$  on obtient une classe  $\bar{h}$  contenant  $\nu$  en choisissant une cochaîne  $g \in C_a^1(K, G)$  de cobord  $\delta g = \nu$  ; on multiplie alors  $\nu$  à gauche par les  $g$ -cobords des multiplicatrices de  $g$  puis on sature l'ensemble obtenu par la relation d'équivalence  $\rho$ .

Les éléments de  $Z^2(K, N)$  seront appelés cocycles.

Enfin on a

PROPOSITION 4.4. Lorsque  $N$  est dans le centre de  $G$  et est donc abélien  $Z^2(K, N)$  est une partie de l'ensemble des cocycles alternés de  $K$  à coefficients dans  $N$  et les classes  $\bar{h}$  sont des classes de cohomologie au sens usuel.

DÉFINITION 4.1. On appelle *classe de cohomologie de dimension deux de K à coefficients dans N* (relativement à la suite exacte (2.2)) toute partie  $\bar{\mathfrak{h}} \subset C^2(K, N)$  correspondant à une classe de cohomologie  $\mathfrak{h} \in H^1(K, H)$  ; on écrira

$$(4.5) \quad \bar{\mathfrak{h}} = \delta_1^* \mathfrak{h}.$$

Une classe  $\bar{\mathfrak{h}}$  sera dite *neutre* si elle contient la cochaîne unité  $\gamma_N^2$ . On notera  $H^2(K, N)$  l'ensemble des classes  $\bar{\mathfrak{h}}$  et  $\mathfrak{n}^2$  et le sous-ensemble des classes neutres. La formule (4.5) définit une application

$$\delta_1^* : H^1(K, H) \rightarrow H^2(K, N).$$

THÉORÈME 4.1 *La suite (3.3) prolongée par*

$$(H^1(K, H), \mathfrak{h}^1) \xrightarrow{\delta_1^*} (H^2(K, N), \mathfrak{n}^2)$$

*est encore exacte.*

Il y a lieu de vérifier d'abord  $\delta_1 \mathfrak{h}^1 \in \mathfrak{n}^2$  et ensuite que le noyau de  $\delta_1^*$  coïncide avec l'image de  $j_1^*$ .

Dans  $\mathfrak{h}^1$  prenons comme représentant le cocycle  $h = \gamma_H$  ; son image réciproque  $\tilde{h}$  contient le cocycle  $g = g_G^1$  d'où il résulte que  $\bar{h}$  contient  $\gamma_N^2 = \gamma_G^2$  c'est-à-dire que  $\bar{\mathfrak{h}}^1$  est une classe neutre. On vérifie d'ailleurs qu'elle est identique à  $\delta(C_a^1(K, N))$  ; en effet pour  $g = g_G^1$  la condition (4.3) signifie  $n_{ij} = n_{ji}^{-1}$  et  $\Delta_g$  coïncide avec  $\delta$ . Ceci donne lieu à la proposition 4.5 ci-dessous.

Supposons maintenant que la classe  $\mathfrak{h} \in H^1(K, H)$  soit dans l'image de  $j_1^*$  ; plus précisément supposons  $\mathfrak{h} = j_1^*(\mathfrak{g})$ ,  $\mathfrak{g} \in H^1(K, G)$  ; alors tout représentant  $h \in \mathfrak{h}$  est l'image d'un cocycle  $g \in \mathfrak{g}$ . Comme  $\delta g = \gamma_N^2$ , la classe  $\delta_1^* \mathfrak{h}$  est bien neutre.

Enfin si  $\delta_1^* \mathfrak{h}$  contient  $\gamma_N^2$ , il existe un cocycle  $g$  dont l'image  $j_1(g)$  est dans  $\mathfrak{h}$  ; celle-ci est donc l'image de la classe  $\mathfrak{g}$  de  $\mathfrak{g}$ . Ceci achève la démonstration.

PROPOSITION 4.5 *Quelle que soit la suite exacte (2.2), l'ensemble  $\delta C_a^1(K, N) \subset C^2(K, N)$  est une classe neutre de  $H^2(K, N)$  ; on l'appellera la classe nulle et on a*

$$\delta C_a^1(K, N) = \delta_1^* \mathfrak{h}^1.$$

5. EXTENSION DU GROUPE STRUCTURAL D'UN ESPACE FIBRÉ.

La méthode précédente s'étend à la cohomologie à coefficients dans un faisceau de groupes  $\mathcal{G}$  sur un espace topologique  $B$ . Nous avons défini dans E. G. S. un groupe  $H^0(B, \mathcal{G})$  et un ensemble  $H^1(B, \mathcal{G})$  muni d'un élément neutre  $\mathfrak{g}^1$ . Pour toute suite exacte de faisceaux de groupes

$$(5.1) \quad e \rightarrow \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{H} \rightarrow e$$

on définit alors une suite exacte

$$(5.2) \quad e \rightarrow H^0(B, \mathcal{N}) \rightarrow H^0(B, \mathcal{G}) \rightarrow H^0(B, \mathcal{H}) \xrightarrow{\delta_0^*} \\ \rightarrow (H^1(B, \mathcal{N}), \mathfrak{n}^1) \rightarrow (H^1(B, \mathcal{G}), \mathfrak{g}^1) \rightarrow (H^1(B, \mathcal{H}), \mathfrak{h}^1).$$

Nous allons maintenant définir une paire  $(H^2(B, \mathcal{N}), \mathfrak{n}^2)$  et lorsque  $B$  est paracompact, prolonger la suite exacte (5.2) d'un terme

$$\delta_1^* : (H^1(B, \mathcal{H}), \mathfrak{h}^1) \rightarrow (H^2(B, \mathcal{N}), \mathfrak{n}^2).$$

Rappelons encore que tout espace fibré principal  $E(B, G)$  définit un élément  $\mathfrak{g}(E) \in H^1(B, \mathcal{G})$  où  $\mathcal{G}$  est le faisceau des jets locaux d'applications continues de  $B$  dans le groupe structural  $G$ . Voir [1], théorème 3, p. 124 et [3]. Deux espaces  $E(B, G)$  sont isomorphes à la condition nécessaire et suffisante que leurs classes  $\mathfrak{g}(E)$  soient les mêmes ; toute classe correspond à des espaces  $E(B, G)$ .

Soit  $A$  un ensemble équipotent à l'ensemble des recouvrements ouverts de  $B$  et indexons ces recouvrements par des indices supérieurs  $\alpha, \beta \in A$ . A chaque recouvrement ouvert  $\mathfrak{U}^\alpha$  associons un ensemble d'indices  $I^\alpha$  servant à indexer les ouverts  $U^\alpha$  de  $\mathfrak{U}^\alpha$ . On aura donc  $\mathfrak{U}^\alpha = (U_i^\alpha)_{i \in I^\alpha}$ . Pour chaque  $\mathfrak{U}^\alpha$  et tout faisceau  $\mathcal{G}$  on définit des groupes  $C^p(\mathfrak{U}^\alpha, \mathcal{G})$  dont les éléments sont les fonctions associant à tout  $p$ -simplexe  $(U_{i_0}^\alpha, U_{i_1}^\alpha, \dots, U_{i_p}^\alpha)$  du nerf de  $\mathfrak{U}^\alpha$  une section

$$f_{i_0 i_1 \dots i_p} : U_{i_0}^\alpha \cap U_{i_1}^\alpha \cap \dots \cap U_{i_p}^\alpha \rightarrow \mathcal{G};$$

on définit aussi des ensembles  $C_a^p(\mathfrak{U}^\alpha, \mathcal{G})$  de cochaînes alternées, des opérateurs de cobord  $\delta : C^p(\mathfrak{U}^\alpha, \mathcal{G}) \rightarrow C^{p+1}(\mathfrak{U}^\alpha, \mathcal{G})$ , des classes

de cohomologie de dimensions zéro et un tout comme dans le cas d'un complexe simplicial.

A la suite exacte (5.1) correspond alors le diagramme commutatif

$$(5.3) \quad \begin{array}{ccccc} e \Rightarrow (C_a^1(\mathbf{U}^\alpha, \mathcal{N}), \gamma_{\mathcal{N}}^1) & \rightarrow & (C_a^1(\mathbf{U}^\alpha, \mathcal{G}), \gamma_{\mathcal{G}}^1) & \xrightarrow{j_1} & (C_a^1(\mathbf{U}^\alpha, \mathcal{H}), \gamma_{\mathcal{H}}^1) \\ & \downarrow \delta & \downarrow \delta & & \downarrow \delta \\ e \rightarrow C^2(\mathbf{U}^\alpha, \mathcal{N}) & \rightarrow & C^2(\mathbf{U}^\alpha, \mathcal{N}) & \xrightarrow{j_2} & C^2(\mathbf{U}^\alpha, \mathcal{N}) \end{array}$$

où les lignes horizontales sont exactes mais où les  $j_1$  et  $j_2$  ne sont pas des applications surjectives en général. Alors pour toute cochaîne  $\mathbf{g} \in C_a^1(\mathbf{U}^\alpha, \mathcal{G})$  dont l'image  $j_1(\mathbf{g})$  est un cocycle de  $C^1(\mathbf{U}^\alpha, \mathcal{H})$ , son cobord est une cochaîne  $\nu$  de  $C^2(\mathbf{U}^\alpha, \mathcal{N})$ . Supposons  $\mathbf{g} = (g_{ij})$ ; une cochaîne  $\mathbf{n} = (n_{ij}) \in C^2(\mathbf{U}^\alpha, \mathcal{N})$  est dite multiplicatrice de  $\mathbf{g}$  si

$$n_{ij} g_{ij} = g_{ij} n_{ji}^{-1} \quad \text{dans} \quad U_i^\alpha \cap U_j^\alpha.$$

En prenant les cobords des produits  $\mathbf{n} \cdot \mathbf{g}$  où  $\mathbf{n}$  est multiplicatrice de  $\mathbf{g}$  on obtient un ensemble  $\bar{\mathbf{g}}$  de cochaînes  $\nu \in C^2(\mathbf{U}^\alpha, \mathcal{N})$ . Comme dans le cas d'un complexe simplicial on fait opérer  $C^0(\mathbf{U}^\alpha, \mathcal{G})$  à gauche sur  $C^2(\mathbf{U}^\alpha, \mathcal{N})$  et le saturé  $\hat{\mathbf{g}}$  d'un ensemble  $\bar{\mathbf{g}}$  est appelé *classe de cohomologie de dimension deux* de  $\mathbf{U}^\alpha$  à coefficient dans  $\mathcal{N}$  (relativement à la suite exacte (5.1)). Une classe est dite *neutre* si elle contient la cochaîne unité  $\gamma_{\mathcal{N}}^2$ . Soient  $H^2(\mathbf{U}^\alpha, \mathcal{N})$  l'ensemble de ces classes,  $\mathbf{n}^2$  l'ensemble des classes neutres.  $\mathbf{n}^2$  contient une *classe nulle*  $\mathbf{n}^2 = \delta C_a^1(\mathbf{U}^\alpha, \mathcal{N})$ .

Nous laissons au lecteur le soin d'énoncer les propriétés analogues aux propositions 4.1, 4.2, 4.3 et 4.4.

Soient  $\mathbf{U}^\beta$  un recouvrement plus fin que  $\mathbf{U}^\alpha$  et  $\omega_{\alpha\beta}$  une application de  $I^\beta$  dans  $I^\alpha$  telle que

$$U_i^\beta \subset U_{\omega_{\alpha\beta}(i)}^\alpha, \quad U_i^\beta \in \mathbf{U}^\beta, \quad U_j^\alpha \in \mathbf{U}^\alpha;$$

une telle application sera dite *admissible*. Ceci définit par restriction des cochaînes des applications

$$\omega_{\alpha\beta}^* : C^p(\mathbf{U}^\alpha, \mathcal{G}) \rightarrow C^p(\mathbf{U}^\beta, \mathcal{G})$$

commutant avec le cobord, c'est-à-dire que le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} C^p(\mathbf{U}^\alpha, \mathcal{G}) & \xrightarrow{\omega_{\alpha\beta}^*} & C^p(\mathbf{U}^\beta, \mathcal{G}) \\ \downarrow \delta & & \downarrow \delta \\ C^{p+1}(\mathbf{U}^\alpha, \mathcal{G}) & \xrightarrow{\omega_{\alpha\beta}^*} & C^{p+1}(\mathbf{U}^\beta, \mathcal{G}). \end{array}$$

Si  $\mathfrak{g} \in C_a^1(\mathbf{U}^\alpha, \mathcal{G})$  a son cobord dans  $C^2(\mathbf{U}^\alpha, \mathcal{N})$  on a donc une propriété analogue pour  $\omega_{\alpha\beta}^*(\mathfrak{g})$ . De même si  $\mathfrak{n} \in C^1(\mathbf{U}^\alpha, \mathcal{N})$  est multiplicatrice de  $\mathfrak{g}$ ,  $\omega_{\alpha\beta}^*(\mathfrak{n})$  est multiplicatrice de  $\omega_{\alpha\beta}^*(\mathfrak{g})$ . Enfin les  $\omega_{\alpha\beta}^*$  sont compatibles avec les lois suivant lesquelles les  $C^0(\mathbf{U}, \mathcal{G})$  opèrent sur les  $C^2(\mathbf{U}, \mathcal{N})$  ; de façon précise si  $\xi \in C^0(\mathbf{U}^\alpha, \mathcal{G})$  et  $\nu \in C^2(\mathbf{U}^\alpha, \mathcal{N})$ , on a

$$\omega_{\alpha\beta}^*(\xi \cdot \nu) = \omega_{\alpha\beta}^*(\xi) \cdot \omega_{\alpha\beta}^*(\nu).$$

Il en résulte que la classe  $\hat{\mathfrak{g}}$  définie par  $\mathfrak{g} \in C_a^1(\mathbf{U}^\alpha, \mathcal{G})$  est envoyée par  $\omega_{\alpha\beta}^*$  dans la classe  $\widehat{\omega_{\alpha\beta}^*(\mathfrak{g})}$ . Ceci définit une application

$$\tilde{\omega}_{\beta\alpha} : H^2(\mathbf{U}^\alpha, \mathcal{N}) \rightarrow H^2(\mathbf{U}^\beta, \mathcal{N}).$$

PROPOSITION 5.1. Si  $\varpi_{\alpha\beta} : I^\beta \rightarrow I^\alpha$  est une autre application admissible, l'application correspondante

$$\tilde{\varpi}_{\beta\alpha} : H^2(\mathbf{U}^\alpha, \mathcal{N}) \rightarrow H^2(\mathbf{U}^\beta, \mathcal{N})$$

coïncide avec  $\tilde{\omega}_{\beta\alpha}$ .

Les éléments de  $I^\beta$  seront notés  $i, j, \dots$ , ceux de  $I^\alpha$ ,  $i', j', i'', \dots$  et nous poserons

$$i' = \omega_{\alpha\beta}(i) \quad j' = \omega_{\alpha\beta}(j), \quad i'' = \varpi_{\alpha\beta}(i), \quad j'' = \varpi_{\alpha\beta}(j).$$

Soit  $\mathfrak{g} = (g_{ij})$  une cochaîne de  $C_a^1(\mathbf{U}^\alpha, \mathcal{G})$  dont le cobord appartient à  $C^2(\mathbf{U}^\alpha, \mathcal{N})$  ; son image  $\mathfrak{h} = j_1(\mathfrak{g})$  est donc un cocycle de  $C_a^1(\mathbf{U}^\alpha, \mathcal{H})$ . La cochaîne  $\mathfrak{g}' = \omega_{\alpha\beta}^*(\mathfrak{g})$  est définie par les restrictions  $g'_{ij}$  des  $g_{i'j'}$ , aux  $U_i^\beta \cap U_j^\beta$ , tandis que  $\mathfrak{g}'' = \varpi_{\alpha\beta}^*(\mathfrak{g})$  est définie par les restrictions  $g''_{ij}$  des  $g_{i''j''}$ . Les  $\mathfrak{h}' = j_1(\mathfrak{g}')$ ,  $\mathfrak{h}'' = j_1(\mathfrak{g}'')$  sont des cocycles de  $C_a^1(\mathbf{U}^\beta, \mathcal{H})$  définis de façon analogue par

restriction des composantes  $h_{ij}$  du cocycle  $\mathfrak{h}$ . On doit montrer que les classes  $\hat{\mathfrak{g}}'$  et  $\hat{\mathfrak{g}}''$  sont identiques. Il suffit pour cela de trouver une 1-cochaîne  $\mathfrak{n} = (n_{ij}) \in C^1(\mathfrak{U}^\beta, \mathcal{N})$  multiplicatrice de  $\mathfrak{g}'$  et une 0-cochaîne  $\xi \in C^0(\mathfrak{U}^\beta, \mathcal{G})$  telles que

$$\xi \cdot \mathfrak{g}'' = \mathfrak{n} \cdot \mathfrak{g}' \quad \text{ou} \quad \xi_i g''_{ij} \xi_j^{-1} = n_{ij} g'_{ij}.$$

Nous prendrons  $\xi$  telle que  $\xi_i$  soit la restriction à  $U_i^\beta$  de  $g_{i i i}$ . L'existence de  $\mathfrak{n}$  est alors équivalente à

$$j(\xi_i g''_{ij} \xi_j^{-1}) = j(g'_{ij}).$$

Or on a

$$j(\xi_i g''_{ij} \xi_j^{-1}) = \eta_i h''_{ij} \eta_j^{-1}$$

où  $\eta = j(\xi)$  a pour composantes  $\eta_i$  les restrictions aux  $U_i^\beta$  des  $h_{i i i}$ . Comme  $h$  est un cocycle, il en résulte bien

$$\eta_i h''_{ij} \eta_j^{-1} = h'_{ij} = j(g'_{ij}).$$

C. q. f. d.

Si  $\mathfrak{U}^\beta$  est plus fin que  $\mathfrak{U}^\alpha$  on a donc une application bien déterminée

$$\varphi_{\beta\alpha} : H^2(\mathfrak{U}^\alpha, \mathcal{N}) \rightarrow H^2(\mathfrak{U}^\beta, \mathcal{N})$$

et il est clair que si  $\mathfrak{U}^\gamma$  est un troisième recouvrement ouvert plus fin que  $\mathfrak{U}^\beta$  on a

$$\varphi_{\gamma\alpha} = \varphi_{\gamma\beta} \circ \varphi_{\beta\alpha}.$$

Il est clair aussi que les  $\varphi_{\beta\alpha}$  transforment une classe neutre en une classe neutre (resp. la classe nulle en la classe nulle).

**DÉFINITION 5.1** Les éléments de la limite inductive  $H^2(\mathfrak{B}, \mathcal{N})$  des  $H^2(\mathfrak{U}^\alpha, \mathcal{N})$  par rapport aux  $\varphi_{\beta\alpha}$  seront appelés *classes de cohomologie de dimension deux de l'espace  $\mathfrak{B}$  à coefficients dans  $\mathcal{N}$*  (relativement à la suite exacte (5.1)). Les éléments de  $H^2(\mathfrak{B}, \mathcal{N})$  images d'une classe neutre d'un  $H^2(\mathfrak{U}^\alpha, \mathcal{N})$  seront appelés *neutres*; l'ensemble des classes neutres sera noté  $\mathfrak{n}^2$ . Dans  $\mathfrak{n}^2$  l'image des classes nulles sera appelée classe nulle de  $H^2(\mathfrak{B}, \mathcal{N})$ ; elle est définie indépendamment de toute suite exacte  $e \rightarrow \mathcal{N} \rightarrow \dots$

THÉORÈME 5.1. *Si l'espace B est paracompact, il existe une application de paires*

$$\delta_1^* : (H^1(B, \mathcal{H}), \mathfrak{h}^1) \rightarrow (H^2(B, \mathcal{N}), \mathfrak{n}^2)$$

*qui complète la suite (5.2) en conservant son exactitude.*

La seule difficulté est dans la définition de  $\delta_1^*$  ; elle provient de ce que les lignes du diagramme (5.3) ne peuvent être complétées à droite par  $\rightarrow e$ . On doit utiliser le lemme 5.1 de E. G. S. (p. 11) dont nous rappelons l'énoncé

LEMME. *Lorsque l'espace B est paracompact, pour toute p-cochaîne  $\mathfrak{h}^\alpha \in C^p(\mathfrak{U}^\alpha, \mathcal{H})$ , il existe un recouvrement  $\mathfrak{U}^\beta$  plus fin que  $\mathfrak{U}^\alpha$ , une application admissible  $\omega_{\alpha\beta} : I^\beta \rightarrow I^\alpha$  et une p-cochaîne  $\mathfrak{g}^\beta \in C^p(\mathfrak{U}^\beta, \mathcal{G})$  telle que  $j_p(\mathfrak{g}^\beta) = \omega_{\alpha\beta}^*(\mathfrak{h}^\alpha)$  (1).*

Pour la démonstration, voir E. G. S. Voir également [5], lemme 2, p. 218.

Soit alors  $\mathfrak{h} \in H^1(B, \mathcal{H})$  image de  $\mathfrak{h}^\alpha \in H^1(\mathfrak{U}^\alpha, \mathcal{H})$ ,  $\delta_1^*\mathfrak{h}$  est l'image dans  $H^2(B, \mathcal{N})$  de la classe  $\hat{\mathfrak{g}}^\beta \in H^2(\mathfrak{U}^\beta, \mathcal{N})$  associée à la cochaîne  $\mathfrak{g}^\beta$  du lemme ;  $\delta^1\mathfrak{h}$  est bien définie en vertu des propriétés de la limite inductive (i. e. ne dépend pas des représentants  $\mathfrak{h}^\alpha$  et  $\mathfrak{g}^\beta$ ). La démonstration s'achève comme au n° 4, en tenant compte en outre des propriétés de la limite inductive.

Soit

$$(5.4) \quad e \rightarrow N \rightarrow G \rightarrow H \rightarrow e$$

une suite exacte de groupe topologiques et supposons que N admette une section locale dans G (Steenrod [6], p. 30). Le résultat précédent résoud le problème d'extension à G du groupe structural H d'un espace fibré principal E(B, H) lorsque la base B est paracompacte sans devoir faire d'autre hypothèse sur N. De façon précise, soient  $\mathcal{N}, \mathcal{G}, \mathcal{H}$  les faisceaux de jets locaux d'applications continues de B dans les groupes N, G, H et

$$e \rightarrow \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{H} \rightarrow e$$

la suite exacte de faisceau déduite de (5.4). On a le

---

(1) Si cela est vrai pour  $C^p$  il est clair que cela est vrai également pour  $C^p_{\mathfrak{a}}$ .

THÉORÈME 5.2. *Pour que l'on puisse faire l'extension à G du groupe structural H d'un espace fibré principal E(B, H) de base B paracompacte, il faut et il suffit que la classe de cohomologie de dimension deux  $\delta_1^* \mathfrak{g}(E) \in H^2(B, \mathcal{N})$  soit neutre.*

6. Il y aurait lieu de donner des interprétations géométriques des éléments de  $H^2(B, \mathcal{N})$ . Voici un résultat partiel concernant les classes neutres ; il s'apparente à un résultat de J. Frenkel dans le cas particulier où N est abélien [4].

Plaçons-nous dans les hypothèses du théorème 5.2 et soit  $\mathfrak{h}$  une classe neutre. Il existe un recouvrement ouvert  $\mathbf{U}^\alpha$  de B et un cocycle  $\mathfrak{g}^\alpha = (g_{ij}^\alpha) \in C^1(\mathbf{U}^\alpha, \mathcal{G})$  tel que  $\mathfrak{h}$  soit l'image de  $\mathfrak{h}^\alpha = \hat{\mathfrak{g}}^\alpha \in H^2(\mathbf{U}^\alpha, \mathcal{N})$ . On a un espace fibré principal E(B, G) obtenu au moyen des  $U_i^\alpha \times G \times \{i\}$  par la relation d'équivalence classique associée aux  $g_{ij}^\alpha$  :

$$(x_i, g_i, i) \sim (x_j, g_j, j) \iff x_i = x_j \in U_i^\alpha \cap U_j^\alpha = U_{ij}^\alpha \quad \text{et} \quad g_i = g_{ij}^\alpha g_j$$

(on identifie la section  $g_{ij}^\alpha : U_{ij}^\alpha \rightarrow \mathcal{G}$  à la fonction  $g_{ij}^\alpha : U_{ij}^\alpha \rightarrow G$ , qu'elle définit). Le groupe G opère naturellement sur N par  $(n, g) \rightarrow g n g^{-1}$  d'où un espace fibré associé F(B, N, G, E) dont chaque fibre  $N_x (x \in B)$  est munie d'une structure de groupe ; la fibre de l'espace des repères est un ensemble d'isomorphismes du groupe-fibre type N sur  $N_x$ . Il en résulte que l'espace des jets de sections locales de F est un faisceau  $\mathcal{F}$  de groupes sur B.

Soit  $\mathfrak{n}^\alpha = (n_{ij}^\alpha) \in C^1(\mathbf{U}^\alpha, \mathcal{N})$  une cochaîne multiplicatrice de  $\mathfrak{g}^\alpha$  ; les  $n_{ij}^\alpha$  définissent des sections

$$\begin{aligned} \nu_{ij}^{\alpha i} : U_{ij}^\alpha &\rightarrow U_{ij}^\alpha \times N \times \{i\}, & \nu_{ij}^{\alpha i}(x) &= (x, n_{ij}^\alpha(x), i), \\ \nu_{ij}^{\alpha j i} : U_{ij}^\alpha &\rightarrow U_{ij}^\alpha \times N \times \{j\}, & \nu_{ij}^{\alpha j i}(x) &= (x, g_{ji}^\alpha(x) n_{ij}^\alpha(x), j), \\ \nu_{ij}^{\alpha k i} : U_{ijk}^\alpha &\rightarrow U_{ijk}^\alpha \times N \times \{k\}, & \nu_{ij}^{\alpha k i}(x) &= (x, g_{ki}^\alpha(x) n_{ij}^\alpha(x), k). \end{aligned}$$

Il est clair que les  $\nu_{ij}^{\alpha i}, \nu_{ij}^{\alpha j i}, \nu_{ij}^{\alpha k i}$  sont les expressions par rapport à des cartes locales d'une fonction  $\nu^\alpha$  qui associe à tout couple  $(i, j)$  du nerf de  $\mathbf{U}^\alpha$  une section

$$\nu_{ij}^\alpha : U_{ij}^\alpha \rightarrow F$$

que l'on identifiera à son flot

$$j^{\lambda} \nu_{ij}^{\alpha} : U_{ij}^{\alpha} \rightarrow \mathcal{F}.$$

Dire que  $n^{\alpha}$  est multiplicatrice de  $g^{\alpha}$  signifie que  $\nu_{ij}^{\alpha} = (\nu_{ji}^{\alpha})^{-1}$ . Autrement dit, toute cochaîne multiplicatrice  $n^{\alpha}$  de  $g^{\alpha}$  définit une cochaîne alternée

$$\nu^{\alpha} \in C^1(\mathcal{U}^{\alpha}, \mathcal{F})$$

et réciproquement.

Le  $g$ -cobord de  $n^{\alpha} : \Delta_g n^{\alpha}$  définit de même des sections

$$\mu_{ijk} : U_{ijk}^{\alpha} \rightarrow U_{ijk}^{\alpha} \times N \times \{j\}, \quad \mu_{ijk}(x) = (x, (\Delta_g n^{\alpha})_{ijk}(x), j)$$

qui coïncident avec les représentations locales

$$(\delta \nu^{\alpha})_{ijk}^j : U_{ijk}^{\alpha} \rightarrow U_{ijk}^{\alpha} \times N \times \{j\}$$

du cobord  $\delta \nu^{\alpha}$  de  $\nu^{\alpha}$ . On obtient ainsi une application bijective de la classe  $\mathfrak{h}^{\alpha}$  sur la classe nulle de  $H^2(\mathcal{U}^{\alpha}, \mathcal{F})$  (définie indépendamment de toute suite exacte  $e \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \dots$ ). En passant à la limite inductive, on voit que *la classe neutre  $\mathfrak{h} \in H^2(B, \mathcal{N})$  correspond à la classe nulle de  $H^2(B, \mathcal{F})$* .

L'espace fibré  $F$  et par suite le faisceau  $\mathcal{F}$  ne sont pas uniques si l'on peut trouver un  $\mathcal{U}^{\alpha}$  et une classe  $\mathfrak{h}^{\alpha}$  pouvant être définie par deux cocycles  $g^{\alpha}$  et  $\bar{g}^{\alpha}$  non cohomologues (chacun d'eux est alors le produit de l'autre par un *cocycle* multiplicateur de celui-ci).

---

#### BIBLIOGRAPHIE

- [1] P. DEDECKER, Jets locaux, faisceaux, germes de sous-espaces, *Bull. Soc. Math. Belg.*, VI, pp. 97-125, 1953.
- [2] P. DEDECKER, Extension du groupe structural d'un espace fibré, Colloque de Topologie de Strasbourg, mai 1955.
- [3] J. FRENKEL, Sur une classe d'espaces fibrés analytiques, *Comptes rendus*, Paris, t. 236, pp. 40-41, (1953).
- [4] J. FRENKEL, Cohomologie à coefficients dans un faisceau non abélien, *Comptes rendus*, Paris, séance du 13-6-1955.
- [5] J. P. SERRE, Faisceaux algébriques cohérents, *Ann. Math.*, v. 61, 1955.
- [6] N. E. STEENROD, *Topology of fibre bundles*, Princeton, 1951.