ANALYSE FONCTIONNELLE. — *Existence de traces non normales.*

Note (*) de M. **Jacques Dixmier**, présentée par M. Gaston Julia.

Soit H un espace hilbertien. Sur l'ensemble des opérateurs positifs de H, une fonction positive, additive, homogène, unitairement invariante, s'appelle une trace. Toute trace normale (c'est-à-dire complètement additive) est proportionnelle à la trace usuelle. Un problème assez ancien est de savoir si toute trace f est proportionnelle à la trace usuelle sur l'ensemble où f est finie. On résoudra ici ce problème par la négative.

1. Soient R l'ensemble des nombres réels, B_1 l'espace vectoriel des fonctions réelles bornées sur R. Soit G le groupe des transformations affines $x \mapsto ax + b$ de R ($a, b \in \mathrm{R}, a \neq 0$). Le groupe G opère sur B_1 par transport de structure. Il existe [1] une forme linéaire positive m sur B_1, invariante par G, telle que $m(1) = 1$. La positivité de m et son invariance par translation entraînent que $m(f) = 0$ si f est à support compact.

2. Lemme. — *Soit* B *l'espace vectoriel des suites infinies bornées* $s = (s_1, s_2, \ldots)$ *de nombres réels. Il existe une forme linéaire* $s \mapsto \mathrm{Lim}\, s$ *sur* B *possédant les propriétés suivantes :*

(1) $\mathrm{Lim}\, s \geqq 0$ *pour* $s \geqq 0$;

(2) $\mathrm{Lim}(1, 1, \ldots) = 1$;

(3) $\mathrm{Lim}(s_1, s_2, s_3, \ldots) = \mathrm{Lim}(s_1, s_1, s_2, s_2, s_3, s_3, \ldots)$;

(4) *si* $s, t \in \mathrm{B}$ *et si* $s_n - t_n \to 0$ *quand* $n \to +\infty$, *on a* $\mathrm{Lim}\, s = \mathrm{Lim}\, t$.

Adoptons les notations de 1. Pour $s = (s_1, s_2, \ldots) \in \mathrm{B}$, définissons $f_s \in \mathrm{B}_1$ de la manière suivante :

$$f_s(x) = s_i \quad \text{pour} \quad x \in [i-1, i[\cup]-i, -i+1].$$

Posons $\mathrm{Lim}\, s = m(f_s)$. Les propriétés (1) et (2) sont immédiates. La fonction f_s se déduit par homothétie de $f_{(s_1, s_1, s_2, s_2, \ldots)}$, d'où la propriété (3). La positivité de Lim entraîne que Lim est continue pour la norme de la convergence uniforme. Comme $\mathrm{Lim}\, s = 0$ si s est à support fini, on a $\mathrm{Lim}\, s = 0$ si $s_n \to 0$ quand $n \to +\infty$, d'où la propriété (4).

3. Soit H un espace hilbertien séparable de dimension infinie. Soit C l'ensemble des opérateurs compacts positifs dans H. Pour tout $A \in C$, soit $\lambda_1(A), \lambda_2(A), \ldots$ la suite des valeurs propres > 0 décroissantes de A, chacune écrite un nombre de fois égal à sa multiplicité (cette suite étant complétée par une infinité de zéros si A est de rang fini).

4. Fixons une suite croissante $(a_1, a_2, \ldots)$ de nombres > 0, tels que

$$a_n \to +\infty, \qquad a_1 \geqq a_2 - a_1 \qquad \text{et} \qquad a_{n+1} - a_n \geqq a_{n+2} - a_{n+1} \qquad \text{pour} \quad n \geqq 1,$$

et tels que $a_n^{-1} a_{2n} \to 1$ quand $n \to +\infty$. Soit P l'ensemble des $A \in C$ tels que

$$\lambda_1(A) + \lambda_2(A) + \ldots + \lambda_n(A) = O(a_n) \qquad \text{quand} \qquad n \to +\infty.$$

Si $A \in P$ et si U est un opérateur unitaire dans H, on a $UAU^{-1} \in P$. Si $A \in P$ et si B est un opérateur $\geqq 0$ dans H majoré par A, alors $B \in P$ [car on sait que $B \in C$ et que $\lambda_n(B) \leqq \lambda_n(A)$ pour tout n]. Si $A, B \in C$, on a

$$(1) \quad \lambda_1(A+B) + \ldots + \lambda_n(A+B) \leqq \lambda_1(A) + \ldots + \lambda_n(A) + \lambda_1(B) + \ldots + \lambda_n(B)$$

(inégalités de Rayleigh-Ritz), donc $A + B \in P$ si $A, B \in P$.

5. Pour $A \in P$, on pose

$$s_n(A) = a_n^{-1}(\lambda_1(A) + \ldots + \lambda_n(A)),$$

et

$$f(A) = \operatorname{Lim}(s_n(A)) \in [0, +\infty[.$$

Si $A \in P$ et si U est un opérateur unitaire dans H, on a $f(UAU^{-1}) = f(A)$. Prenant A de telle sorte que $\lambda_1(A) = a_1$ et $\lambda_i(A) = a_i - a_{i-1}$ pour $i > 1$, on a $f(A) = 1$, donc f n'est pas identiquement nulle. Si $\lambda \geqq 0$ et $A \in P$, $f(\lambda A) = \lambda f(A)$. L'inégalité (1) entraîne que $f(A+B) \leqq f(A) + f(B)$ pour $A, B \in P$. On a $f(A) = 0$ pour A de rang fini.

6. Comme $a_n^{-1} a_{n+1} \to 1$, on a, pour tout $A \in P$,

$$s_n(A) - s_{n+1}(A) = (a_n^{-1} a_{n+1} - 1) s_{n+1}(A) - a_n^{-1} \lambda_{n+1}(A) \to 0,$$

donc

$$f(A) = \operatorname{Lim}(s_2(A), s_2(A), s_4(A), s_4(A), s_6(A), s_6(A), \ldots),$$

donc, d'après le lemme 2,

$$(2) \quad f(A) = \operatorname{Lim}(s_2(A), s_4(A), s_6(A), \ldots).$$

Pour $A, B \in C$, on sait [2] que

$$(3) \quad \lambda_1(A) + \ldots + \lambda_n(A) + \lambda_1(B) + \ldots + \lambda_n(B) \leqq \lambda_1(A+B) + \ldots + \lambda_{2n}(A+B),$$

donc, si $A, B \in P$,

$$\begin{aligned} f(A) + f(B) &\leqq \operatorname{Lim}(a_n^{-1}(\lambda_1(A+B) + \ldots + \lambda_{2n}(A+B))) \\ &= \operatorname{Lim}(a_{2n}^{-1}(\lambda_1(A+B) + \ldots + \lambda_{2n}(A+B))), \end{aligned}$$

donc, d'après (2), $f(A) + f(B) \leqq f(A+B)$. Ainsi, f est additive.

Posant $f(A) = +\infty$ pour $A \geqq 0$ et $A \notin P$, *f est une trace non proportionnelle à la trace usuelle sur l'ensemble* P *où f est finie* [3].

(*) Séance du 9 mai 1966.

[1] J. VON NEUMANN, *Fundamenta Mathematicae*, 3, 1929, p. 73-116 (et plus spécialement p. 90 et 95).

[2] J. HERSCH, *Comptes rendus*, 252, 1961, p. 1714 et 2496. Soit E_n l'ensemble des projecteurs orthogonaux de rang n dans H. Les méthodes maximinimales montrent facilement que $\lambda_1(A) + \ldots + \lambda_n(A) = \sup_{P \in E_n} \operatorname{Tr}(PAP)$, ce qui entraîne aussitôt les inégalités (1) et (3) (ceci est l'idée de Hersch).

[3] M. N. Aronszajn, alors que j'étudiais $\operatorname{Lim}(n\lambda_n(A))$, m'a suggéré d'étudier $\operatorname{Lim}((\log n)^{-1}(\lambda_1(A) + \ldots + \lambda_n(A)))$.

(64, *rue Gay-Lussac, Paris*, 5e.)