

Avant-propos, Freeman Dyson

Certains mathématiciens sont des oiseaux, d'autres sont des grenouilles. Les oiseaux volent haut dans les airs et explorent de larges perspectives mathématiques jusqu'à l'horizon lointain. Ils se plaignent des concepts qui unifient notre pensée et rassemblent divers problèmes provenant de différentes parties du paysage. Les grenouilles vivent dans la boue en contrebas et ne voient que les fleurs qui poussent à proximité. Elles se délectent des détails d'objets particuliers et résolvent les problèmes un par un. Manin est un oiseau. Il se trouve que je suis une grenouille, mais je suis heureux de vous présenter ce livre qui nous montre sa vision plongeante des mathématiques.

“Les mathématiques comme métaphore” est un bon slogan pour les oiseaux. Cela signifie que les concepts les plus profonds des mathématiques sont ceux qui relient un monde d'idées à un autre. Au XVII^e siècle, Descartes a lié les mondes disparates de l'algèbre et de la géométrie à son concept de coordonnées, et Newton a lié les mondes de la géométrie et de la dynamique avec son concept de fluxions, aujourd'hui appelé calcul. Au XIX^e siècle, Boole a lié les mondes de la logique et de l'algèbre à son concept de logique symbolique, et Riemann a lié les mondes de la géométrie et de l'analyse avec son concept de surfaces de Riemann. Les coordonnées, les fluxions, la logique symbolique et les surfaces de Riemann sont autant de métaphores, qui étendent le sens des mots de contextes familiers à des contextes inconnus. Manin voit l'avenir des mathématiques comme l'exploration de métaphores déjà visibles mais non encore comprises.

La métaphore la plus profonde est la similitude de structure des idées entre la théorie des nombres et la physique. Dans les deux domaines, Manin voit des aperçus alléchants de concepts parallèles, de symétries reliant le continu avec le discret. Il attend avec impatience une unification qu'il appelle la quantification des mathématiques.

Manin n'est pas d'accord avec l'histoire largement acceptée selon laquelle Hilbert a établi le programme des mathématiques du XX^e siècle, lorsqu'il présenta au Conseil sa célèbre liste de vingt-trois problèmes non résolus au Congrès international des mathématiciens à Paris en 1900. Manin voit dans cette histoire que les avancées importantes, dans les mathématiques, proviennent de programmes et non de problèmes. Les problèmes sont généralement résolus en appliquant de vieilles idées de manière nouvelle. Les programmes de recherche sont des pépinières où naissent de nouvelles idées. Il voit le programme Bourbaki, réécrivant l'ensemble des mathématiques dans un langage plus abstrait, comme la source de nombreuses idées nouvelles du XX^e siècle. Il voit le programme de Langlands, unifiant la théorie des nombres avec la géométrie, comme une source prometteuse d'idées nouvelles pour le XXI^e siècle. Les gens qui résolvent des problèmes célèbres non résolus peuvent gagner de grands prix, mais les personnes qui lancent de nouveaux programmes sont les véritables pionniers. L'une des sources d'idées les plus riches du XX^e siècle a été le programme de recherche commencé par Georg Cantor au XIX^e, explorant le monde des ensembles infinis et des cardinaux infinis et les ordinaux. Hilbert a choisi dans ce programme un problème particulier, la preuve ou la réfutation de la l'hypothèse du continu, qui est devenue la première sur sa liste. Le problème s'est avéré avoir une réponse qui était plus profonde et plus significative que ce que Hilbert avait imaginé. Kurt Gödel en 1938 a montré que l'hypothèse ne pourrait jamais être réfutée, et Paul Cohen a montré en 1963 qu'elle ne pourrait jamais être prouvée. L'hypothèse du continu est devenue un exemple d'énoncé mathématique indécidable, et cette existence démontre qu'aucun ensemble

d'axiomes ne peut englober l'ensemble de mathématiques. Manin dit que l'hypothèse du continu elle-même s'est révélée sans importance.

Aujourd'hui, peu de mathématiciens se soucient de savoir si l'hypothèse du continu est vraie ou fausse. Le progrès important a été la compréhension que de nombreux ensembles alternatifs d'axiomes peuvent servir de fondements des mathématiques. Cette compréhension est née du programme de Cantor dans son ensemble, et non du problème particulier de l'hypothèse du continu. Dans son essai sur le programme de Cantor, Manin rassemble deux domaines mathématiques historiquement distincts, la théorie des nombres infinis créée par Cantor au XIXe siècle, et la théorie de la calculabilité finie créée par Alan Turing au XXe. Manin réunit ces deux mondes en un seul énoncé : “ 2^x est considérablement plus grand que x ”. Il remarque que les mathématiques profondes commencent dès que nous essayons de donner un sens précis à ce mot innocent, “considérablement”. Lorsque x est dénombrablement infini, l'énoncé devient l'hypothèse du continu de Cantor, l'hypothèse selon laquelle l'ensemble des points sur une droite est le plus petit ensemble de cardinal infini supérieur à celui de l'ensemble des nombres entiers. Lorsque x est grand mais fini, 2^x correspond approximativement au nombre d'instances à vérifier pour trouver un nombre possédant une propriété générique donnée, parmi tous les entiers dont le développement binaire n'excède pas x (ou pour prouver qu'un tel nombre n'existe pas). L'affirmation que 2^x est considérablement plus grand que x signifie que la plupart des problèmes impliquant x inconnues, chacune prenant les valeurs 0 ou 1, ne peuvent être résolus par un ordinateur dans un délai raisonnable (un temps polynomial dépendant de la longueur de l'entrée). Cet énoncé est à la base de la théorie moderne de la calculabilité. Le problème de déterminer quelles fonctions arithmétiques sont en principe calculables n'a pas de réponse générale. Manin suggère que ce n'est pas un hasard. Il existe une similarité formelle entre la théorie de Cantor des ensembles infinis et la théorie de Turing de la calculabilité des fonctions arithmétiques. Dans les deux théories, l'indécidabilité est la règle plutôt que l'exception, et les démonstrations d'indécidabilité sont formellement similaires. Chacune des deux théories est une métaphore de l'autre. Ce livre contient onze essais mathématiques qui nous présentent l'essentiel de la pensée de Manin, et cinq essais non mathématiques qui nous donnent un aperçu de ses passe-temps intellectuels. Le plus substantiel des essais mathématiques est “Mathématiques et Physique”, une réimpression d'un ouvrage initialement paru en russe en 1979 et en anglais en 1981. J'en ai fait la critique pour *Mathematical Intelligencer* en 1983. Voici quelques extraits de ma critique : “L'objectif de Manin était de rendre les processus de pensée des physiciens intelligibles aux mathématiciens.”.

Il y parvient grâce à une sélection judicieuse d'exemples. Par ailleurs, son style d'écriture et sa pensée rendent intelligibles aux physiciens les processus de pensée d'un mathématicien. Il ne cherche pas à abolir ou à estomper la distinction entre compréhension mathématique et physique. L'une des nombreuses qualités de son livre est qu'il laisse le mystère central, l'efficacité miraculeuse des mathématiques comme outil de compréhension de la nature, inexpliquée et non obscurci. L'essai ne fait que 54 pages, mais il condense dans ce format concis une exposition limpide d'une gamme de sujets étonnamment vaste. Pour ne citer qu'un exemple parmi tant d'autres, voici le commentaire de Manin sur l'intégrale de Feynman, une expression mathématiquement mal définie, couramment utilisée par les physiciens pour décrire les processus quantiques : “Dans la préhistoire du calcul intégral, l'œuvre remarquable de Kepler, “Stéréométrie des tonneaux de vin”, occupe une place importante. Des intégrales donnant le volume des solides de révolution utilisés dans le commerce

ont été calculées dans cet ouvrage à une époque où la définition générale d'une intégrale n'avait pas encore été établie. La théorie mathématique des magnifiques intégrales de Feynman, que les physiciens écrivent en grand nombre, n'est finalement pas si éloignée de la stéréométrie des tonneaux de vin.”. Manin imagine une future révolution en mathématiques, à l'instar de l'invention du calcul infinitésimal par Newton, qui rendrait les intégrales de Feynman aussi solides et univoques que les tonneaux de vin. Manin est un mathématicien professionnel, et son livre traite principalement de mathématiques.

Les lecteurs occidentaux seront peut-être surpris de constater qu'il écrit avec la même éloquence sur d'autres sujets tels que l'inconscient collectif, l'origine du langage humain, la psychologie de l'autisme et le rôle du farceur dans la mythologie de nombreuses cultures. Pour ses compatriotes russes, une telle diversité d'intérêts et d'expertise ne serait pas surprenante. Les intellectuels russes perpétuent la fière tradition de l'ancienne intelligentsia russe, où scientifiques, poètes, artistes et musiciens appartenaient à une même communauté. Ils forment encore aujourd'hui, comme on les voit dans les pièces de Tchekhov, un groupe d'idéalistes unis par leur aliénation face à une société superstitieuse et un gouvernement capricieux. En Russie, mathématiciens, compositeurs et cinéastes discutent, se promènent ensemble dans la neige les soirs d'hiver, partagent une bouteille de vin et échangent leurs idées. L'un des passe-temps de Manin est la théorie des archétypes inventée par le psychologue suisse Carl Jung.

Un archétype, selon Jung, est une image mentale ancrée dans un inconscient collectif que nous partageons tous. Les émotions intenses que véhiculent les archétypes sont des vestiges de souvenirs perdus de joie et de souffrance collectives. Manin affirme qu'il n'est pas nécessaire d'accepter la théorie de Jung comme une vérité absolue pour la trouver éclairante. Le filou mythologique est l'archétype préféré de Manin parmi ceux qu'il décrit.

Au début de la littérature occidentale, Achille et Hector, les héros de l'Iliade, accomplissent leur destin tragique et connaissent une mort héroïque. Vient ensuite Ulysse, le héros de l'Odyssée, le filou qui survit. Ulysse nous montre comment se sortir d'une situation désespérée grâce à son intelligence. Après dix ans d'une impasse héroïque et sanglante, il met fin à la guerre de Troie en construisant un cheval de bois et en le remplissant de soldats bien armés. Les Troyens sont dupés et amènent le cheval dans la ville. Les soldats surgissent et prennent les Troyens par surprise, et la ville tombe. L'essai de Manin, “Le filou mythologique”, montre que l'archétype du filou est plus ancien que la littérature occidentale, remontant aux mythes et légendes des peuples pré-alphabétisés du monde entier.

Dans nombre de ces légendes anciennes, le filou apparaît comme l'un des deux frères. L'aîné est le chef, le fondateur digne et héroïque de la tribu, l'incarnation de la vertu et de la justice. Le cadet est le rebelle, le téméraire qui joue des tours et enfreint les règles, celui qui se moque du chef et est rarement puni. Dans les cultures animistes de Sibérie avant l'avènement du christianisme, il arrivait souvent qu'une tribu soit dirigée par deux frères, le chef et le chaman, ce dernier jouant le rôle du filou. Manin raconte également l'histoire de Wakdjunkaga, un filou qui apparaît dans les légendes des Indiens Winnebago. Il a été adopté par Jung comme un spécimen type de l'archétype du filou. Un autre exemple de duo de frères, chef et filou, se trouve dans le livre biblique de l'Exode. Moïse conduit les enfants d'Israël hors d'Égypte tandis que son frère Aaron use de ruses pour punir et

tromper le pharaon égyptien. Clara Park, professeure d'anglais au Williams College, a publié un essai intitulé “Pas le temps pour la comédie” en 1979 dans la Hudson Review, décrivant le rôle du filou en littérature. Tout héros comique est un filou. L'essai de Park affirme, avec éloquence et perspicacité, que notre littérature moderne est trop marquée par la tragédie et pas assez par la comédie. Il se trouve, et ce n'est pas un hasard, que Park est une amie proche de Manin. Park a publié en 1967 un livre intitulé “Le Siège”, un récit classique de l'éducation de sa fille autiste. Manin a toujours porté un vif intérêt à l'autisme, y voyant une fenêtre ouverte sur le fonctionnement de l'esprit humain. Un enfant autiste est, en un certain sens, une intelligence pure, percevant le monde sans les distorsions des émotions et des relations humaines que vivent les personnes neurotypiques. Un enfant autiste, à l'instar d'Euclide, voit la beauté à l'état brut. Park rapporte que sa fille a utilisé le mot “heptagone” correctement avant même de dire “oui”. Du fait de son ignorance des contraintes et conventions humaines normales, un enfant autiste partage certaines des qualités d'un farceur. L'essai de Manin, “C'est encore de l'amour”, est une critique du livre de Park, paru dans la revue russe Priroda. Il brosse un portrait saisissant de cet enfant extraordinaire et de sa mère, toujours intensément impliquée auprès de l'enfant, mais conservant une distance brechtienne tandis qu'elle observe et décrit son lent éveil. Il y a plus de trente ans, la chanteuse Monique Morelli a enregistré des chansons sur des textes de Pierre MacOrlan. L'une des chansons est “La Ville Morte”, avec une mélodie envoûtante accordée au contralto profond de Morelli, un accordéon chantant en contrepoint à la voix, et des images verbales d'une intensité extraordinaire. Imprimées sur la page, les paroles n'ont rien de spécial :

“En pénétrant dans la ville morte,
Je tenais Margot par la main....
Nous avons quitté la nécropole,
Les pieds brisés et sans parole,
Devant ces portes sans serrures,
Ces trous vaguement aperçus,
Devant ces portes sans parole
Et ces poubelles pleines de cris”.

Je ne peux jamais écouter cette chanson sans ressentir une émotion d'une intensité disproportionnée. Je me demande souvent pourquoi les paroles simples de la chanson semblent résonner avec un niveau profond de mémoire inconsciente, comme si les âmes des défuntés parlaient à travers la musique de Morelli. Et maintenant, de façon inattendue, dans ce livre, je trouve une réponse à ma question.

Dans son court essai, “L'archétype de la ville vide”, Manin décrit comment l'archétype de la ville morte apparaît encore et encore dans les créations architecturales, littéraires, artistiques et cinématographiques, de l'Antiquité à nos jours, depuis que les êtres humains ont commencé à se rassembler dans les villes, depuis que d'autres êtres humains ont commencé à se rassembler en armées pour les ravager et les détruire. Le personnage qui nous parle dans la chanson de MacOrlan est un vieux soldat qui a longtemps fait partie d'une armée d'occupation. Après avoir marché avec sa femme à travers la poussière et les cendres de la ville morte, il entend une fois de plus :

“Chansons de charme d'un clairon
Qui fleurissait une heure lointaine
Dans un rêve de garnison.”

Les mots de MacOrlan et la voix de Morelli semblent donner vie à un rêve issu de notre inconscient collectif, celui d'un vieux soldat errant dans une ville morte. Le concept d'inconscient collectif est peut-être aussi mythique que celui de la ville morte. L'essai de Manin décrit la lumière subtile que ces deux concepts, possiblement mythiques, projettent l'un sur l'autre. Il décrit l'inconscient collectif comme une force irrationnelle qui nous attire puissamment vers la mort et la destruction. L'archétype de la ville morte est une distillation des agonies de centaines de villes réelles détruites depuis l'invention des villes et des armées de pillards. Notre seul moyen d'échapper à la folie de l'inconscient collectif est une conscience collective de la raison, fondée sur l'espoir et la raison. La grande tâche qui incombe à notre civilisation contemporaine est de créer une telle conscience collective.

INSTITUT D'ÉTUDES AVANCÉES, PRINCETON, NEW JERSEY