DECOUVERTE D'UNE LOI TOUT EXTRAORDINAIRE DES NOMBRES PAR RAPPORT A LA SOMME DE LEURS DIVISEURS[1])

Commentatio 175 indicis ENESTROEMIANI
Bibliothèque impartiale 3, 1751, p. 10—31

1. Les Mathematiciens ont taché jusqu'ici en vain à découvrir quelque ordre dans la progression des nombres premiers, et on a lieu de croire que c'est un mystére auquel l'esprit humain ne sauroit jamais pénétrer. Pour s'en convaincre, on n'a qu'à jetter les yeux sur les tables des nombres premiers, que quelques-uns se sont donné la peine de continuer au-delà de cent mille et on s'appercevra d'abord qu'il n'y regne aucun ordre ni régle. Cette circonstance est d'autant plus surprenante, que l'Arithmetique nous fournit des régles sures, par le moyen desquelles on est en état de continuer la progression de ces nombres aussi loin qu'on souhaite, sans pourtant nous y laisser la moindre marque de quelque ordre. Je me crois aussi bien éloigné de ce but, mais je viens de découvrir une loi fort bizarre parmi les sommes des diviseurs des nombres naturels, qui, au premier coup d'oeil, paroissent aussi irrégulieres que la progression des nombres premiers, et qui semblent même enveloper celle-ci. Cette régle, que je vai expliquer, est à mon avis

1) Ce mémoire a été également publié, comme „ineditum", d'après un manuscrit de l'Académie de Berlin dans les *Commentationes arithmeticae* **2**, 1849, p. 639, et ensuite dans les *Opera postuma* **1**, 1862, p. 76, les éditeurs, P. H. et N. FUSS, n'ayant pas eu connaissance de la publication antérieure, faite dans la Bibliothèque impartiale. Cf. *Comment. arithm.* Prooemium, p. XVIII, No. 57, Suppl. Prooem., No. 1, et t. II, p. VIII; en outre P. STÄCKEL und W. AHRENS, *Der Briefwechsel zwischen C. G. J. JACOBI und P. H. VON FUSS über die Herausgabe der Werke LEONHARD EULERS*, Leipzig 1908, p. 59 et 83. Il faut remarquer que le texte de la Bibliothèque impartiale diffère sur plusieurs points de celui des *Comment. arithm.* et des *Op. post.* Nous avons reproduit intégralement dans notre édition le texte de la Bibliothèque impartiale. Voir aussi le mémoire 243 de ce volume. F. R.

d'autant plus importante qu'elle appartient à ce genre dont nous pouvons nous assurer de la vérité, sans en donner une démonstration parfaite. Néanmoins, j'en apporterai de telles preuves, qu'on pourra presque les envisager comme équivalentes à une démonstration rigoureuse.

2. Les nombres premiers se distinguent des autres nombres en ce qu'ils n'admettent d'autres diviseurs que l'unité et eux-mêmes. Ainsi 7 est un nombre premier, parce qu'il n'est divisible que par l'unité et lui-même. Les autres nombres qui ont, outre l'unité et eux-mêmes, encore d'autres diviseurs, sont nommés composés, comme par exemple le nombre 15 qui, outre l'unité et lui-même, est divisible par 3 et 5. Donc en général, si le nombre p est premier, il ne sera divisible que par 1 et par p; mais si p est un nombre composé, il aura, outre 1 et p, encore d'autres diviseurs; et partant, dans le premier cas, la somme des diviseurs sera $= 1 + p$, et dans l'autre cas, elle sera plus grande que $1 + p$. Comme mes réflexions suivantes rouleront sur la somme des diviseurs de chaque nombre, je me servirai d'un certain caractere pour la marquer. La lettre $\int$ qu'on emploie dans l'analyse des infinis pour indiquer les intégrales, étant mise devant un nombre, me marquera la somme de ses diviseurs[1]): ainsi $\int 12$ signifiera la somme de tous les diviseurs du nombre 12 qui sont $1 + 2 + 3 + 4 + 6 + 12 = 28$, de sorte que $\int 12 = 28$. Cela posé, on verra que $\int 60 = 168$ et $\int 100 = 217$. Mais, comme l'unité n'a d'autre diviseur qu'elle-même, on aura $\int 1 = 1$. Or la cyphre 0, étant divisible par tout nombre, la valeur de $\int 0$ sera infinie. Cependant, dans la suite, je lui assignerai, pour chaque cas proposé, une valeur déterminée, convenable à mon dessein.

3. Ayant donc établi ce signe $\int$ pour marquer la somme des diviseurs du nombre devant lequel il est posé, il est clair que si p marque un nombre premier, la valeur de $\int p$ sera $= 1 + p$; excepté le cas où $p = 1$, dans lequel il y a $\int 1 = 1$, et non pas $\int 1 = 1 + 1$; d'où l'on voit qu'on doit exclure l'unité de la suite des nombres premiers, de sorte que l'unité étant le com-

1) Voir les mémoires 152, 243 et surtout le mémoire 244 de ce volume. Voir aussi la lettre d'EULER à GOLDBACH du 1er avr. 1747, *Correspondance math. et phys. publiée par P. H. Fuss*, St.-Pétersbourg 1843, t. I, p. 407, et la lettre d'EULER à D'ALEMBERT du 15 février 1748 publiée par P. STÄCKEL, Biblioth. Mathem. 11_3, 1910/1, p. 220; *LEONHARDI EULERI Opera omnia*, series III. F. R.

mencement des nombres entiers, n'est ni premier ni composé. Or, si le nombre p n'est pas premier, la valeur de $\int p$ sera plus grande que $1+p$. Dans ce cas, on trouvera aisément la valeur de $\int p$ par les facteurs du nombre p. Car soient a, b, c, d, etc. des nombres premiers differens entre eux, on verra aisément que

$$\int ab = 1 + a + b + ab = (1+a)(1+b) = \int a \cdot \int b,$$
$$\int abc = (1+a)(1+b)(1+c) = \int a \cdot \int b \cdot \int c,$$
$$\int abcd = \int a \cdot \int b \cdot \int c \cdot \int d,$$
etc.

Pour les puissances des nombres premiers, on a besoin des régles particulieres, comme

$$\int a^2 = 1 + a + a^2 = \frac{a^3-1}{a-1},$$
$$\int a^3 = 1 + a + a^2 + a^3 = \frac{a^4-1}{a-1},$$

et généralement

$$\int a^n = \frac{a^{n+1}-1}{a-1}.$$

Et par le moyen de celles-ci, on pourra assigner la somme des diviseurs de chaque nombre, tout composé qu'il puisse être; ce qui sera clair par les formules suivantes:

$$\int a^2 b = \int a^2 \cdot \int b,$$
$$\int a^3 b^2 = \int a^3 \cdot \int b^2,$$
$$\int a^3 b^4 c = \int a^3 \cdot \int b^4 \cdot \int c,$$

et généralement

$$\int a^\alpha b^\beta c^\gamma d^\delta e^\varepsilon = \int a^\alpha \cdot \int b^\beta \cdot \int c^\gamma \cdot \int d^\delta \cdot \int e^\varepsilon.$$

Ainsi, pour trouver la valeur de $\int 360$, puisque 360 se résout dans ces facteurs $2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$, j'aurai

$$\int 360 = \int 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 = \int 2^3 \cdot \int 3^2 \cdot \int 5 = 15 \cdot 13 \cdot 6 = 1170.$$

4. Pour mettre devant les yeux la progression des sommes des diviseurs, j'ajouterai la table suivante qui contient les sommes des diviseurs des nombres naturels depuis l'unité jusqu'à 100:

$\int 1 = 1$	$\int 21 = 32$	$\int 41 = 42$	$\int 61 = 62$	$\int 81 = 121$
$\int 2 = 3$	$\int 22 = 36$	$\int 42 = 96$	$\int 62 = 96$	$\int 82 = 126$
$\int 3 = 4$	$\int 23 = 24$	$\int 43 = 44$	$\int 63 = 104$	$\int 83 = 84$
$\int 4 = 7$	$\int 24 = 60$	$\int 44 = 84$	$\int 64 = 127$	$\int 84 = 224$
$\int 5 = 6$	$\int 25 = 31$	$\int 45 = 78$	$\int 65 = 84$	$\int 85 = 108$
$\int 6 = 12$	$\int 26 = 42$	$\int 46 = 72$	$\int 66 = 144$	$\int 86 = 132$
$\int 7 = 8$	$\int 27 = 40$	$\int 47 = 48$	$\int 67 = 68$	$\int 87 = 120$
$\int 8 = 15$	$\int 28 = 56$	$\int 48 = 124$	$\int 68 = 126$	$\int 88 = 180$
$\int 9 = 13$	$\int 29 = 30$	$\int 49 = 57$	$\int 69 = 96$	$\int 89 = 90$
$\int 10 = 18$	$\int 30 = 72$	$\int 50 = 93$	$\int 70 = 144$	$\int 90 = 234$
$\int 11 = 12$	$\int 31 = 32$	$\int 51 = 72$	$\int 71 = 72$	$\int 91 = 112$
$\int 12 = 28$	$\int 32 = 63$	$\int 52 = 98$	$\int 72 = 195$	$\int 92 = 168$
$\int 13 = 14$	$\int 33 = 48$	$\int 53 = 54$	$\int 73 = 74$	$\int 93 = 128$
$\int 14 = 24$	$\int 34 = 54$	$\int 54 = 120$	$\int 74 = 114$	$\int 94 = 144$
$\int 15 = 24$	$\int 35 = 48$	$\int 55 = 72$	$\int 75 = 124$	$\int 95 = 120$
$\int 16 = 31$	$\int 36 = 91$	$\int 56 = 120$	$\int 76 = 140$	$\int 96 = 252$
$\int 17 = 18$	$\int 37 = 38$	$\int 57 = 80$	$\int 77 = 96$	$\int 97 = 98$
$\int 18 = 39$	$\int 38 = 60$	$\int 58 = 90$	$\int 78 = 168$	$\int 98 = 171$
$\int 19 = 20$	$\int 39 = 56$	$\int 59 = 60$	$\int 79 = 80$	$\int 99 = 156$
$\int 20 = 42$	$\int 40 = 90$	$\int 60 = 168$	$\int 80 = 186$	$\int 100 = 217.$

Je ne doute pas que, pour peu qu'on regarde la progression de ces nombres, on ne désespere presque d'y découvrir le moindre ordre, vu que l'irrégularité de la suite des nombres premiers s'y trouve entremêlée tellement, qu'il semblera d'abord impossible d'indiquer quelque loi que ces nombres observent entre eux, sans qu'on sache celle des nombres premiers. Il semble même qu'il y a ici beaucoup plus de bizarrerie que dans les nombres premiers.

5. Néanmoins, j'ai remarqué[1]) que cette progression suit une loi bien réglée et qu'elle est même comprise dans l'ordre des progressions que les Geometres nomment *recurrentes,* de sorte qu'on peut toujours former chacun de ces termes par quelques-uns des précédens, suivant une régle constante. Car si $\int n$ marque un terme quelconque de cette irréguliere progression, et $\int(n-1)$, $\int(n-2)$, $\int(n-3)$, $\int(n-4)$, $\int(n-5)$, etc. des termes précédens, je dis que la valeur de $\int n$ est toujours composée de quelques-uns des précédens suivant cette formule:

$$\begin{gathered}\int n=\int(n-1)+\int(n-2)-\int(n-5)-\int(n-7)+\int(n-12)+\int(n-15)\\ -\int(n-22)-\int(n-26)+\int(n-35)+\int(n-40)-\int(n-51)-\int(n-57)\\ +\int(n-70)+\int(n-77)-\int(n-92)-\int(n-100)+\text{etc.}\end{gathered}$$

Dans cette formule, il y a à remarquer:

I. Que dans l'altération des signes + et —, chacun se trouve toujours mis deux fois de suite.

II. La progression des nombres 1, 2, 5, 7, 12, 15, etc. qu'il faut successivement retrancher du nombre proposé n, deviendra évidente, en prenant leurs differences:

N.	1,	2,	5,	7,	12,	15,	22,	26,	35,	40,	51,	57,	70,	77,	92,	100,	etc.
Diff.	1,	3,	2,	5,	3,	7,	4,	9,	5,	11,	6,	13,	7,	15,	8,	etc.	

Car alternativement, on aura tous les nombres naturels 1, 2, 3, 4, 5, 6, etc. et les nombres impairs 3, 5, 7, 9, 11, etc., d'où l'on pourra continuer la suite de ces nombres aussi loin qu'on voudra.

III. Quoique cette suite aille à l'infini, on n'en doit prendre, dans chaque cas, que les termes depuis le commencement où le nombre mis après le signe $\int$ est encore positif, en omettant ceux qui renferment des nombres négatifs.

IV. S'il arrive que le terme $\int 0$ se rencontre dans cette formule, comme sa valeur est indéterminée en elle-même, il faut, dans chaque cas, au lieu de $\int 0$, mettre le nombre même proposé.

1) Voir la lettre d'EULER à GOLDBACH citée p. 242. F. R.

6. Ces choses remarquées, il ne sera pas difficile de faire l'application de cette formule à chaque nombre proposé et de se convaincre de sa vérité, par autant d'exemples qu'on voudra déveloper. Et comme je dois avouër que je ne suis pas en état d'en donner une démonstration rigoureuse, j'en ferai voir sa justesse par un assez grand nombre d'exemples:

$$
\begin{aligned}
&\int 1 = \int 0 = 1,\\
&\int 2 = \int 1 + \int 0 = 1 + 2 = 3,\\
&\int 3 = \int 2 + \int 1 = 3 + 1 = 4,\\
&\int 4 = \int 3 + \int 2 = 4 + 3 = 7,\\
&\int 5 = \int 4 + \int 3 - \int 0 = 7 + 4 - 5 = 6,\\
&\int 6 = \int 5 + \int 4 - \int 1 = 6 + 7 - 1 = 12,\\
&\int 7 = \int 6 + \int 5 - \int 2 - \int 0 = 12 + 6 - 3 - 7 = 8,\\
&\int 8 = \int 7 + \int 6 - \int 3 - \int 1 = 8 + 12 - 4 - 1 = 15,\\
&\int 9 = \int 8 + \int 7 - \int 4 - \int 2 = 15 + 8 - 7 - 3 = 13,\\
&\int 10 = \int 9 + \int 8 - \int 5 - \int 3 = 13 + 15 - 6 - 4 = 18,\\
&\int 11 = \int 10 + \int 9 - \int 6 - \int 4 = 18 + 13 - 12 - 7 = 12,\\
&\int 12 = \int 11 + \int 10 - \int 7 - \int 5 + \int 0 = 12 + 18 - 8 - 6 + 12 = 28,\\
&\int 13 = \int 12 + \int 11 - \int 8 - \int 6 + \int 1 = 28 + 12 - 15 - 12 + 1 = 14,\\
&\int 14 = \int 13 + \int 12 - \int 9 - \int 7 + \int 2 = 14 + 28 - 13 - 8 + 3 = 24,\\
&\int 15 = \int 14 + \int 13 - \int 10 - \int 8 + \int 3 + \int 0 = 24 + 14 - 18 - 15 + 4 + 15 = 24,\\
&\int 16 = \int 15 + \int 14 - \int 11 - \int 9 + \int 4 + \int 1 = 24 + 24 - 12 - 13 + 7 + 1 = 31,\\
&\int 17 = \int 16 + \int 15 - \int 12 - \int 10 + \int 5 + \int 2 = 31 + 24 - 28 - 18 + 6 + 3 = 18,\\
&\int 18 = \int 17 + \int 16 - \int 13 - \int 11 + \int 6 + \int 3 = 18 + 31 - 14 - 12 + 12 + 4 = 39,\\
&\int 19 = \int 18 + \int 17 - \int 14 - \int 12 + \int 7 + \int 4 = 39 + 18 - 24 - 28 + 8 + 7 = 20,\\
&\int 20 = \int 19 + \int 18 - \int 15 - \int 13 + \int 8 + \int 5 = 20 + 39 - 24 - 14 + 15 + 6 = 42.
\end{aligned}
$$

Je crois ces exemples suffisans pour ne pas s'imaginer que c'est par un pur hazard que ma régle se trouve d'accord avec la vérité.

7. Si l'on doutoit encore, si la loi des nombres à retrancher 1, 2, 5, 7, 12, 15, etc. étoit précisement celle que j'ai indiquée, vu que dans les exemples donnés, il n'entre que les six premiers de ces nombres par lesquels la loi ne pourroit pas encore paroitre assez établie, je vai donner quelques exemples de plus grands nombres.

I. Soit proposé le nombre 101 dont on veuille chercher la somme de ses diviseurs, et on aura

$$\begin{aligned}\int 101 &= \int 100 + \int 99 - \int 96 - \int 94 + \int 89 + \int 86 - \int 79 - \int 75 \\ &\quad + \int 66 + \int 61 - \int 50 - \int 44 + \int 31 + \int 24 - \int 9 - \int 1 \\ &= +217 + 156 - 252 - 144 + 90 + 132 - 80 - 124 \\ &\quad + 144 + 62 - 93 - 84 + 32 + 60 - 13 - 1,\end{aligned}$$

ou joignant deux à deux

$$\int 101 = +373 - 396 + 222 - 204 + 206 - 177 + 92 - 14,$$

ce qui donne $\int 101 = 102$, d'où l'on connoitroit que 101 est un nombre premier, si on ne le savoit d'ailleurs.

II. Soit proposé le nombre 301 dont on veut savoir la somme de ses diviseurs, et on aura

$$\begin{aligned}\overset{\text{differ.}}{\int 301} &= \overset{1}{\int 300} + \overset{3}{\int 299} - \overset{2}{\int 296} - \overset{5}{\int 294} + \overset{3}{\int 289} + \overset{7}{\int 286} - \overset{4}{\int 279} - \overset{9}{\int 275} \\ &\quad + \overset{5}{\int 266} + \overset{11}{\int 261} - \overset{6}{\int 250} - \overset{13}{\int 244} + \overset{7}{\int 231} + \overset{15}{\int 224} - \overset{8}{\int 209} - \overset{17}{\int 201} \\ &\quad + \overset{9}{\int 184} + \overset{19}{\int 175} - \overset{10}{\int 156} - \overset{21}{\int 146} + \overset{11}{\int 125} + \overset{23}{\int 114} - \overset{12}{\int 91} - \overset{25}{\int 79} \\ &\quad + \overset{13}{\int 54} + \overset{27}{\int 41} - \overset{14}{\int 14} - \int 0,\end{aligned}$$

où il est clair, comment par le moyen des differences, on peut aisément former cette suite pour chaque cas proposé. Or, prenant ces sommes de diviseurs on trouvera

$$\begin{aligned}\int 301 = &+ 868 - 570 + 307 - 416 + 480 - 468 + 384\\ &+ 336 - 684 + 504 - 372 + 390 - 434 + 504\\ &- 240 + 360 - 392 + 156 - 112 + 120 - \ \ 24\\ &- 272 + 248 - 222 + 240 - \ \ 80 + \ \ 42 - 301\end{aligned}$$

ou

$$\int 301 = + 4939 - 4587 = 352,$$

d'où l'on connoit que 301 n'est pas premier. Or, puisque $301 = 7 \cdot 43$, on aura

$$\int 301 = \int 7 \cdot \int 43 = 8 \cdot 44 = 352,$$

comme la régle vient de montrer.

8. Ces exemples que je viens de déveloper, oteront sans doute tout scrupule qu'on auroit pu encore avoir sur la vérité de ma formule. Or, par là même, on sera d'autant plus surpris de cette belle propriété, ne voyant aucune liaison entre la composition de ma formule et la nature des diviseurs sur la somme desquels roule la proposition. La progression des nombres 1, 2, 5, 7, 12, 15, etc. ne paroit non seulement avoir nul raport au sujet dont il s'agit, mais, comme la loi de ces nombres est interrompuë et qu'ils sont mêlés de deux progressions régulieres differentes, à savoir

de 1, 5, 12, 22, 35, 51, etc. et de 2, 7, 15, 26, 40, 57, etc.,

il semble presque qu'une telle irrégularité ne sauroit trouver lieu dans l'analyse. De plus, le défaut d'une démonstration n'en doit pas peu augmenter la surprise; vu qu'il seroit presque moralement impossible de parvenir à la découverte d'une telle propriété, sans y avoir été conduit par une méthode certaine qui pourroit tenir lieu d'une parfaite démonstration. J'avouë aussi que ce n'a pas été par un pur hazard que je suis tombé sur cette découverte; mais une autre proposition d'une pareille nature qui doit être jugée vraie, quoique je n'en puisse donner une démonstration, m'a ouvert le chemin de parvenir à cette belle propriété. Et bien que cette chose ne roule que sur la nature des nombres à laquelle l'analyse des infinis ne paroit pas être applicable, c'est pourtant par le moyen des differentiations et plusieurs autres détours que j'ai été conduit à cette conclusion. Je souhaiterois qu'on trouvât un chemin plus court et plus naturel d'y parvenir, et peut-être que la considération de la route que j'ai suivie y pourra conduire.

9. Il y a long-tems[1]) que je considérai, à l'occasion du problème de la partition des nombres, cette expression

$$(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)(1-x^5)(1-x^6)(1-x^7)(1-x^8) \text{ etc.}$$

La supposant continuée à l'infini, j'ai multiplié actuellement un grand nombre de facteurs ensemble, pour voir la forme de la serie qui en résulteroit, et j'ai trouvé cette progression

$$1-x-x^2+x^5+x^7-x^{12}-x^{15}+x^{22}+x^{26}-x^{35}-x^{40}+\text{ etc.},$$

où les exposans de x sont les mêmes nombres qui entrent dans la formule précédente; et aussi les signes $+$ et $-$ se trouvent doublés. On n'a qu'à entreprendre cette multiplication et à la continuer aussi loin qu'on jugera à propos, pour se convaincre de la vérité de cette serie. Aussi n'ai-je point d'autre preuve pour cela qu'une longue induction que j'ai du moins poussée si loin, que je ne puis en aucune maniere douter de la loi dont ces termes et leurs exposans sont formés. J'ai long-tems cherché en vain une démonstration rigoureuse que cette serie doit être égale à l'expression proposée $(1-x)(1-x^2)(1-x^3)$ etc. et j'ai proposé la même demande à quelques-uns de mes amis[2]) dont je connois la force dans ces sortes de questions; mais tous sont tombés avec moi d'accord sur la vérité de cette conversion, sans en avoir pu déterrer aucune source de démonstration. Ce sera donc une vérité connuë, mais pas encore démontrée, que si l'on pose

$$s=(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)(1-x^5)(1-x^6) \text{ etc.},$$

la même quantité s se pourra aussi exprimer de la sorte

$$s=1-x-x^2+x^5+x^7-x^{12}-x^{15}+x^{22}+x^{26}-x^{35}-x^{40}+\text{ etc.}$$

1) Voir le mémoire 158 de ce volume, spécialement la note p. 191. F. R.

2) Voir les lettres d'EULER à GOLDBACH du 15 oct. 1743, *Correspondance math. et phys. publiée par. P. H. Fuss,* St.-Pétersbourg 1843, t. I, p. 265, et à NIC. BERNOULLI du 1er sept. et du 10 nov. 1742, *L. Euleri Opera postuma*, t. I, p. 527 et p. 533; les réponses de ces savants se trouvent dans la *Correspondance* citée, t. I, p. 270 et t. II, p. 698; *Leonhardi Euleri Opera omnia*, series III. F. R.

Car chacun est en état de se convaincre de cette vérité par la résolution actuelle à tel point qu'il souhaitera; et il paroit impossible que la loi qu'on a découverte dans 20 termes par exemple, ne soit point observée dans tous les suivans.

10. Ayant donc découvert que ces deux expressions infinies sont égales, quoique l'égalité ne puisse être démontrée, toutes les conclusions qu'on pourra déduire de cette égalité seront de même nature, c'est-à-dire vraies sans être démontrées. Ou, si quelqu'une de ces conclusions pouvoit être démontrée, on en pourroit réciproquement tirer une démonstration de l'égalité mentionnée; et c'est en cette vuë que j'ai manié en plusieurs manieres ces deux expressions, par où j'ai été conduit entre autres à la découverte que je viens d'expliquer, et dont la vérité doit être aussi certaine que celle de l'égalité de ces deux expressions. Voilà de quelle maniere j'ai opéré. Ces deux expressions étant égales

$$\text{I.}\quad s=(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)(1-x^5)(1-x^6)(1-x^7)\text{ etc.}$$

$$\text{II.}\quad s=1-x-x^2+x^5+x^7-x^{12}-x^{15}+x^{22}+x^{26}-x^{35}-x^{40}+\text{ etc.},$$

pour délivrer la premiere des facteurs, j'en prends les logarithmes, d'où je tire

$$ls=l(1-x)+l(1-x^2)+l(1-x^3)+l(1-x^4)+l(1-x^5)+\text{ etc.}$$

Maintenant, pour éliminer les logarithmes, j'en prends les differentielles, ce qui donnera cette équation

$$\frac{ds}{s}=-\frac{dx}{1-x}-\frac{2x\,dx}{1-x^2}-\frac{3x^2dx}{1-x^3}-\frac{4x^3dx}{1-x^4}-\frac{5x^4dx}{1-x^5}-\text{ etc.}$$

que je divise par $-dx$ et multiplie par x, pour avoir

$$-\frac{x\,ds}{s\,dx}=\frac{x}{1-x}+\frac{2x^2}{1-x^2}+\frac{3x^3}{1-x^3}+\frac{4x^4}{1-x^4}+\frac{5x^5}{1-x^5}+\text{ etc.}$$

La seconde valeur de la même quantité s donne par la differentiation

$$ds=-dx-2xdx+5x^4dx+7x^6dx-12x^{11}dx-15x^{14}dx+\text{ etc.},$$

de laquelle, en la multipliant par $-x$ et divisant par sdx, on tirera une autre valeur de $-\frac{x\,ds}{s\,dx}$ qui sera

$$-\frac{x\,ds}{s\,dx}=\frac{x+2x^2-5x^5-7x^7+12x^{12}+15x^{15}-22x^{22}-26x^{26}+\text{ etc.}}{1-x-x^2+x^5+x^7-x^{12}-x^{15}+x^{22}+x^{26}-\text{ etc.}}.$$

11. Soit la valeur de $-\frac{x\,ds}{s\,dx}=t$, et nous aurons deux valeurs égales pour cette quantité t

$$\text{I.}\quad t=\frac{x}{1-x}+\frac{2x^2}{1-x^2}+\frac{3x^3}{1-x^3}+\frac{4x^4}{1-x^4}+\frac{5x^5}{1-x^5}+\frac{6x^6}{1-x^6}+\text{etc.}$$

$$\text{II.}\quad t=\frac{x+2x^2-5x^5-7x^7+12x^{12}+15x^{15}-22x^{22}-26x^{26}+\text{etc.}}{1-x-x^2+x^5+x^7-x^{12}-x^{15}+x^{22}+x^{26}-\text{etc.}}.$$

De la premiere, je résous chaque terme dans une progression geometrique par la division ordinaire, et j'aurai

$$\begin{array}{lllllllllllll}
t= & x+ & x^2+ & x^3+ & x^4+ & x^5+ & x^6+ & x^7+ & x^8+ & x^9+ & x^{10}+ & x^{11}+ & x^{12}+\text{etc.}\\
 & & +2x^2 & & +2x^4 & & +2x^6 & & +2x^8 & & +2x^{10} & & +2x^{12}+\text{etc.}\\
 & & & +3x^3 & & & +3x^6 & & & +3x^9 & & & +3x^{12}+\text{etc.}\\
 & & & & +4x^4 & & & & +4x^8 & & & & +4x^{12}+\text{etc.}\\
 & & & & & +5x^5 & & & & & +5x^{10} & & +\text{etc.}\\
 & & & & & & +6x^6 & & & & & & +6x^{12}+\text{etc.}\\
 & & & & & & & +7x_7 & & & & & \\
 & & & & & & & & +8x^8 & & & & \\
 & & & & & & & & & +9x^9 & & & \\
 & & & & & & & & & & +10x^{10} & & \\
 & & & & & & & & & & & +11x^{11} & \\
 & & & & & & & & & & & & +12x^{12}+\text{etc.}
\end{array}$$

où il est aisé de voir que chaque puissance de x se trouve autant de fois que son exposant a de diviseurs, puisque chaque diviseur devient un coefficient de la même puissance de x. Ainsi, recueillant tous les termes homogènes dans une somme, le coefficient de chaque puissance de x sera la somme de tous les diviseurs de son exposant. Et partant, exprimant ces sommes de diviseurs par la préposition du signe $\int$, comme j'ai fait ci-dessus, j'obtiendrai pour t la serie qui suit:

$$t=\int 1\cdot x+\int 2\cdot x^2+\int 3\cdot x^3+\int 4\cdot x^4+\int 5\cdot x^5+\int 6\cdot x^6+\int 7\cdot x^7+\text{etc.}$$

dont la loi de progression est tout à fait manifeste; et, quoiqu'il semble que l'induction ait quelque part dans la détermination de ces coefficiens, qu'on considere l'expression infinie précédente, on s'assurera aisément de la nécessité de cette loi de progression.

12. Substituons cette valeur au lieu de t dans la seconde expression de cette même lettre t qui, étant délivrée de fractions, se réduit en cette forme

$$t(1 - x - x^2 + x^5 + x^7 - x^{12} - x^{15} + x^{22} + x^{26} - \text{etc.})$$
$$- x - 2x^2 + 5x^5 + 7x^7 - 12x^{12} - 15x^{15} + 22x^{22} + 26x^{26} - \text{etc.} = 0.$$

Maintenant, la valeur précédente de t étant mise dans cette équation, nous trouverons:

$$\begin{aligned}0 = \textstyle\int 1\cdot x + \int 2\cdot x^2 + \int 3\cdot x^3 + \int 4\cdot x^4 + \int 5\cdot x^5 + \int 6\cdot x^6 + \int 7\cdot x^7 + \int 8\cdot x^8 + \int 9\cdot x^9 + \text{etc.}\\ - x - \textstyle\int 1\cdot x^2 - \int 2\cdot x^3 - \int 3\cdot x^4 - \int 4\cdot x^5 - \int 5\cdot x^6 - \int 6\cdot x^7 - \int 7\cdot x^8 - \int 8\cdot x^9 - \text{etc.}\\ - 2x^2 - \textstyle\int 1\cdot x^3 - \int 2\cdot x^4 - \int 3\cdot x^5 - \int 4\cdot x^6 - \int 5\cdot x^7 - \int 6\cdot x^8 - \int 7\cdot x^9 - \text{etc.}\\ + 5x^5 + \textstyle\int 1\cdot x^6 + \int 2\cdot x^7 + \int 3\cdot x^8 + \int 4\cdot x^9 + \text{etc.}\\ + 7x^7 + \textstyle\int 1\cdot x^8 + \int 2\cdot x^9 + \text{etc.}\end{aligned}$$

Ici, il est aisé d'observer que les coefficiens de chaque puissance de x sont les sommes des diviseurs, premierement de l'exposant de cette puissance même, et ensuite des autres nombres plus petits qui résultent si l'on ote successivement de l'exposant les nombres 1, 2, 5, 7, 12, 15, 22, 26, etc. Ensuite, si l'exposant de la puissance de x est égal à un terme de cette serie numerique, alors ce même terme accompagne encore les coefficiens. En troisieme lieu, l'ordre des signes n'a besoin d'aucun éclaircissement. Ainsi, on conclura en général que la puissance x^n aura ces coefficiens:

$$\textstyle\int n - \int(n-1) - \int(n-2) + \int(n-5) + \int(n-7) - \int(n-12) - \int(n-15) + \text{etc.},$$

jusqu'à ce qu'on parvienne à des nombres négatifs. Mais, si quelqu'un de ces nombres devant lesquels se trouve le signe $\int$ devient $= 0$, alors il faut mettre en sa place le nombre n même, de sorte que dans ce cas, il y a $\int 0 = n$ et le signe de ce terme suit l'ordre général des autres.

13. Puisque donc l'expression infinie du § précédent doit être égale à zero, quelque valeur qu'on donne à la quantité x, il faut de nécessité que les coefficiens de chaque puissance à part, soient égaux ensemble à zero, et partant, nous aurons les équations suivantes:

I.	$\int 1 - 1 = 0,$	ou	$\int 1 = 1,$
II.	$\int 2 - \int 1 - 2 = 0,$		$\int 2 = \int 1 + 2,$
III.	$\int 3 - \int 2 - \int 1 = 0,$		$\int 3 = \int 2 + \int 1,$
IV.	$\int 4 - \int 3 - \int 2 = 0,$		$\int 4 = \int 3 + \int 2,$
V.	$\int 5 - \int 4 - \int 3 + 5 = 0,$		$\int 5 = \int 4 + \int 3 - 5,$
VI.	$\int 6 - \int 5 - \int 4 + \int 1 = 0,$		$\int 6 = \int 5 + \int 4 - \int 1,$
VII.	$\int 7 - \int 6 - \int 5 + \int 2 + 7 = 0,$		$\int 7 = \int 6 + \int 5 - \int 2 - 7,$
	etc.		etc.

et généralement nous aurons:

$$\int n - \int (n-1) - \int (n-2) + \int (n-5) + \int (n-7) - \int (n-12) - \int (n-15) + \text{etc.} = 0$$

et par conséquent

$$\int n = \int (n-1) + \int (n-2) - \int (n-5) - \int (n-7) + \int (n-12) + \int (n-15) - \text{etc.}$$

qui est la même expression que j'ai donnée ci-dessus et qui exprime la loi selon laquelle les sommes des diviseurs des nombres naturels sont continuées. Outre la raison des signes et la nature de la progression des nombres

1, 2, 5, 7, 12, 15, 22, 26, 35, 40, 51, 57, 70, 77, etc.,

on voit aussi, par ce que je viens d'avancer, la raison pourquoi, dans les cas où se trouve le terme $\int 0$, il faut mettre en sa place le nombre n même, ce qui auroit pu paroitre le plus étrange dans mon expression. Ce raisonnement, quoiqu'il soit encore fort éloigné d'une démonstration parfaite[1]), ne laissera pas pourtant de lever plusieurs doutes sur la forme bizarre de l'expression que je viens d'expliquer.

---

1) Voir le mémoire 244 de ce volume. F. R.