Une remarque peu connue de Gödel
(ou ce qu'on savait, ou plutôt ce qu'on ne savait pas en théorie des modèles en 1930)

Gabriel Sabbagh

Je dois remercier Jean-Luc Verley de m'avoir appris que l'Histoire des mathématiques était un sujet encore plus difficile que les mathématiques. D'ailleurs, je dois dire qu'il y a quelque temps, j'ai enseigné un cours que je connaissais mal, et j'ai écrit à l'inventeur du sujet, qui s'appelait Shelah [1], pour lui demander où est-ce qu'il avait introduit telle ou telle notion. Il m'a donné toutes sortes de références dont je lui ai démontré les unes après les autres qu'elles étaient fausses, jusqu'à ce que j'aie trouvé l'endroit où il avait introduit l'idée.

Et alors, il m'a dit que c'était exact, qu'il l'avait oubliée, et que l'Histoire des maths était plus difficile que les maths. Donc, ça, vous le savez sans doute mieux que moi. Donc là, je voudrais vous parler... Alors, comme je ne suis pas un professionnel, je n'ai pas minuté l'exposé vraiment, et c'est un exposé comme de la musique aléatoire.

C'est-à-dire, il y a deux parties. La première est relative à une page peu connue de Gödel, qui est une page tout à fait insignifiante de Gödel. Et la deuxième partie est relative à quelque chose de tout à fait célèbre de Descartes.

Donc, c'est comme les concerts de musique, où il y a d'abord 12 minutes de Webern, et si vous êtes sages, vous aurez ensuite une symphonie de Mozart. Donc, j'espère que vous ne considérez pas que Gödel est aussi difficile à avaler que Webern, d'autant plus qu'il s'agit de quelque chose de très élémentaire.

Il se fait qu'en septembre 1930, il y a eu à Königsberg une conférence d'épistémologie, et dans cette conférence, il y avait tout le gratin imaginable. Il y avait Heisenberg, il y avait Carnap, il y avait Von Neumann, qui ont chacun parlé une heure, et il y avait Gödel, qui avait droit à 20 minutes. Et il se fait que sa thèse devait être publiée à l'automne 1930, en septembre 1930, à Königsberg, qui s'appelle maintenant Kaliningrad, je crois.

Donc la thèse de Gödel devait être publiée à l'automne 1930, elle n'était pas encore parue. Plus précisément, l'article extrait de cette thèse n'était pas paru, parce que la thèse n'a jamais été publiée. Et alors Gödel a décidé qu'il allait exposer les résultats de sa thèse, et le principal résultat, c'était qu'une théorie du premier ordre, dans un langage dénombrable, qui est consistante, a un modèle dénombrable.

Alors par dénombrable, j'entends simplement un ensemble fini, ou dénombrable infini, c'est-à-dire équipotant à une partie de $\mathbb{N}$. Dire que la théorie est du premier ordre, ça veut dire qu'on quantifie

Référence de la vidéo : https://video.irem.univ-paris-diderot.fr/w/vb9DNEjLfcXUgVzuFE9sjm.

Une conférence de Gabriel Sabbagh, Université Paris Diderot Paris 7, Equipe de Logique Mathématique, Sixième conférence donnée dans le cadre de la journée scientifique en l'honneur de Jean-Luc Verley

Transcription en LaTeX : Denise Vella-Chemla, octobre 2025, à partir de la transcription Turboscribe des sous-titrages produits par la société Radio-Canada.

[1] Saharon Shelah.

seulement sur les éléments. Par exemple, la théorie des corps algébriquement clos est une théorie du premier ordre, parce que vous pouvez dire que pour chaque suite $a_0, a_1, \ldots, a_n$, il y a une racine au polynôme $a_0 + a_1 \ldots$, plus etc. Donc c'est une théorie du premier ordre.

Consistante, ça veut dire que, en faisant, en raisonnant aussi bien qu'un élève de CP d'il y a 20 ans, ou qu'un élève de DEUG de maintenant, vous n'arriverez pas à trouver une contradiction par les règles de la logique habituelle. Vous ne pourrez pas démontrer à la fois A et non A. Par exemple, si vous prenez la théorie des corps algébriquement clos, est-ce qu'elle est consistante ? Il y a une façon très simple de dire qu'elle est consistante, parce que vous savez, d'après le théorème fondamental de l'algèbre, que le corps des complexes est algébriquement clos. Donc il y a un corps algébriquement clos, et si vous pouviez démontrer une contradiction, c'est-à-dire si vous pouviez démontrer A et non A, les deux seraient vrais dans ce corps algébriquement clos, ce qui serait absurde.

Donc au fond, je viens juste de faire la remarque que si une théorie a un modèle, elle est consistante. Le théorème de complétude de Gödel a consisté à démontrer la réciproque pour les théories dénombrables. Et donc Gödel venait parler de ce théorème, et malheureusement, il a eu un pépin.

Le pépin, c'est qu'avant de venir parler de ce théorème, il a démontré un théorème beaucoup plus extraordinaire, qui était le théorème d'incomplétude. Et il s'est dit, puisque je suis là, je vais leur annoncer le théorème d'incomplétude. Mais il avait 20 minutes, il a donc parlé pendant 18 minutes du théorème de complétude, et à ce moment-là, je pense, je ne peux pas vous dire, il a introduit une espèce de digression, je vais vous dire ce qu'il a dit.

Il a dit, on dit qu'une théorie est catégorique si elle a tous ses modèles isomorphes. Donc ça voudrait dire que la théorie a un et un seul modèle à isomorphisme près. Et alors il a fait la remarque suivante.

Il a dit, d'après mon théorème de complétude, une théorie de ce type, elle est complète. Donc j'ai oublié de vous dire ce que c'est qu'une théorie complète. Une théorie est complète, ça veut dire que pour n'importe quel énoncé A, ou bien T démontre A, ou bien T démontre non A. Donc par exemple, si vous prenez la théorie des corps algébriquement clos, elle n'est pas complète, parce qu'il y a des corps algébriquement clos de caractéristique 2, où 1 plus 1 égale 0, et il y a des corps algébriquement clos de caractéristique 3, où 1 plus 1 est différent de 0. Donc voilà une théorie qui n'est pas complète.

Mais si vous fixez la caractéristique, elle[2] devient complète. Alors ce que Gödel a dit, c'est qu'"une théorie qui est catégorique", il a dit, "je peux vous démontrer qu'elle est complète", et il l'a démontré très facilement. Parce qu'il a dit : "sinon, si elle n'est pas complète, on peut démontrer très facilement que chacune de ces théories est consistante". Ca, c'est facile, et je vous l'épargne. Donc chacune d'entre elles a un modèle. Donc ça fait un modèle de T où A est vrai, un modèle de T où A est faux, or tous les modèles de T sont isomorphes.

Et alors, il a dit : "ça serait merveilleux si on pouvait démontrer ce genre de choses pour les théories d'ordre supérieur, mais malheureusement on ne peut pas, parce que je viens de démontrer le théorème d'incomplétude". Et il a donné en un paragraphe le théorème d'incomplétude, et je

[2]La théorie des corps algébriquement clos.

crois que l'audience, qui avait peut-être eu un buffet aussi merveilleux que celui qu'on a eu...! Le fait est que personne n'a compris ni réagi, sauf von Neumann, qui immédiatement a dit à Gödel qu'il devait y avoir encore mieux, et qui a été le seul absolument à comprendre ce qui se passait. Alors le fait est que Gödel, qui donne des exemples de théories du second ordre dans cet article, n'a pas été fichu de donner un seul exemple d'une théorie catégorique.

Donc il avait un théorème qui n'avait pas d'application. Et la raison est très simple, c'est qu'il n'y avait pas de théorie catégorique, sauf les théories catégoriques d'une structure finie qui n'ont aucun intérêt. Et pourquoi ? Parce qu'il y a en fait deux théorèmes, dont un était très bien connu de Gödel.

C'est ce qu'on appelle le théorème de Löwenheim-Skolem descendant. Descendant, je vais désigner ça comme ça, qui a commencé en 1915 avec Löwenheim, et qui s'est poursuivi avec toute une série d'articles de Skolem, dont le dernier en 1929. Et j'attire votre attention sur le fait que dans le livre de Dawson [3], qui est la biographie de Gödel, il y a une erreur absolument calamiteuse, qu'il a malheureusement reconnue, d'ailleurs, quand je la lui ai signalée, qui est qu'il prétend qu'à un certain moment, Gödel a emprunté un article de Skolem, mais l'article de Skolem que Gödel a emprunté n'est pas l'article de Skolem que Dawson indique.

Gödel a emprunté un de ces articles qui mène au théorème de complétude. Je ne veux évidemment pas du tout, ce n'est pas du tout mon propos, dire que Gödel s'en est inspiré pour démontrer le théorème de complétude, mais il est évident, et l'histoire est bien connue, que dans les articles de Skolem, on trouve des démonstrations très semblables à celles du théorème de complétude. Qu'est-ce que les théorèmes de Löwenheim-Skolem disent ? Ils disent simplement que si la théorie T a un modèle infini, alors elle a un modèle dénombrable.

Je suis toujours sous l'hypothèse que la théorie est dénombrable, ce qui veut dire simplement qu'elle a un nombre dénombrable de symboles. C'est le cas des théories usuelles. Donc, ce théorème disait que si une théorie a un modèle infini, elle a un modèle dénombrable. Bien.

Ce qui n'était pas connu à l'époque, c'est le théorème de Löwenheim-Skolem ascendant. Et ce théorème, lui, il dit que si elle a un modèle infini, alors elle a un modèle de n'importe quel cardinal supérieur ou égal. Donc, on peut monter. Tandis que là, on peut descendre. Alors, si on peut mettre maintenant bout à bout les deux théorèmes, supposez que vous ayez une théorie qui est consistante. Et supposez qu'elle a un modèle infini. Elle aura des modèles de tous les cardinaux infinis. Donc, elle ne pourra jamais avoir tous ses modèles isomorphes.

Autrement dit, le seul exemple d'une théorie catégorique, c'est une théorie qui a un et un seul modèle fini, parce que la malheureuse, elle ne pourrait même pas avoir deux modèles finis, puisque tous les modèles sont supposés isomorphes. Or, pour ça, il n'y a pas besoin d'avoir le théorème de complétude pour démontrer qu'alors elle est complète. Et ça n'a jamais intéressé personne, une théorie qui a un et un seul modèle fini.

Donc, c'était un exemple. Donc, d'une certaine façon, j'avais promis, et j'espère que j'ai tenu parole

[3] *Logical Dilemmas, The Life and Work of Kurt Gödel*, de John W. Dawson Jr, éditions : A. K. Peters, Wellesley, Massachusetts.

pour le titre de mon exposé. Je peux vous dire ce qu'en 1930, Gödel ne connaissait pas.

Il ne connaissait pas le théorème de Löwenheim-Skolem ascendant, mais maintenant, je voudrais démontrer que c'est plus grave et qu'au fond, il n'avait pas véritablement compris son propre théorème de complétude. Ni même, plus précisément, qu'il ne savait pas l'appliquer. La raison est très simple. *(Là, malencontreusement, il fait tomber un micro par terre.)* Oh, seigneur, j'espère que... Non *(Il pose le micro tombé par terre sur la table, rassuré, et commente :)* c'est toujours dangereux d'attaquer Gödel, mais... Non, mais... Ah oui... Non, vous voyez, les logiciens tiennent Gödel pour une espèce de saint de la logique, et il est évident que là, j'ai commis une espèce de sacrilège qui... C'est un signe du ciel. Vous connaissez l'histoire célèbre de Freud et de Jung, n'est-ce pas ? Un jour, Freud disait que la sexualité, c'était ça ce qui était capital, et à ce moment, Jung lui dit : "il y a un signe là, l'armoire vient de craquer.". Et à ce moment-là, il lui explique que c'était un signe, et qu'il ferait beaucoup mieux de modifier la théorie. Jung a dit très sérieusement que le fait que Freud n'avait pas tenu compte de ce signe expliquait la rupture qui allait plus tard se produire. Alors, j'ai l'impression d'avoir commis un sacrilège du même genre, mais je voudrais maintenant vous expliquer pourquoi il n'avait pas vraiment compris ce qu'il avait prouvé. Supposons que nous ayons une théorie dont tous les modèles dénombrables sont isomorphes.

Donc maintenant, au lieu de prendre une théorie catégorique, je prends une théorie T qui vérifie une hypothèse beaucoup plus faible, à savoir que tous ses modèles dénombrables sont isomorphes. Dans une minute, je vous donnerai un exemple d'une théorie comme ça. Et supposons que j'ai M et N qui sont deux modèles de T infinis.

Considérons la théorie complète de M, c'est-à-dire l'ensemble des énoncés σ qui sont vrais dans M. Donc, je prends deux modèles infinis d'une théorie dont tous les modèles dénombrables sont isomorphes et je prends un modèle quelconque infini de T. Et je regarde l'ensemble des énoncés vrais dans M. Évidemment que ceci est une théorie consistante puisque, par définition, M est un modèle. Donc, d'après le théorème de complétude, ou d'après le théorème de Löwenheim-Skolem descendant, il y a un modèle dénombrable. Donc, ça veut dire qu'il y a un modèle M' qui vérifie tous les énoncés vrais dans M. Et il y aura un modèle N' qui vérifiera tous les énoncés vrais dans N. Mais ce M' et ce N' seront dénombrables et, par hypothèse, ils seront isomorphes.

Autrement dit, n'importe quel énoncé qui est vrai dans M sera vrai dans M', sera vrai dans N', sera vrai dans N et donc ma théorie sera complète. Donc, si Gödel avait réalisé cette chose, il aurait démontré qu'une théorie dont tous les modèles dénombrables sont isomorphes est complète. Or, des théories dont tous les modèles dénombrables sont isomorphes sont complètes.

Il se fait qu'en 1927, Langford [4], un logicien américain, venait d'en exhiber une. Chacun de vous connaît l'ensemble ordonné des rationnels. Donc, prenez un ensemble totalement ordonné et exigez que chaque fois que vous avez deux points, vous puissiez intercaler un point entre eux.

Alors, vous voyez donc, les rationnels sont un exemple. Et supposez que votre ensemble n'a ni plus petit élément ni plus grand élément. Il est très facile alors de montrer que n'importe quel ensemble de ce type dénombrable est isomorphe au corps des rationnels.

[4] Cooper Harold Langford.

Ceci est un théorème classique qui a été démontré par Cantor en 1895, qui a été redémontré par Huntington[5] en 1904, qui a été redémontré par Hausdorff en 1914. Et je crois que dans n'importe quel cours de logique, on donne une démonstration de ça, parce que c'est un argument très joli qu'on appelle un argument de va-et-vient. Et la démonstration moderne, ce n'est pas celle de Cantor, je crois. Je crois que c'est celle de Huntington. Mais il est sûr que Gödel, qui lisait la littérature, avait certainement reçu les *Annals of Mathematics* de 1927, où Langford venait de démontrer que la théorie des ensembles totalement ordonnés, dénombrables, sans premier ni dernier élément, est complète. Et comment il l'avait démontré ? Pas du tout par des arguments de ce type qu'il ignorait absolument, puisqu'il ne connaissait pas le théorème de complétude et qu'il n'a jamais appliqué le théorème de Löwenheim-Skolem descendant. Langford avait fait ça par une technique purement syntaxique qui s'appelle l'élimination des quantificateurs. Et donc, si Gödel avait simplement voulu appliquer son propre théorème de complétude ou le théorème de Löwenheim-Skolem descendant, il aurait immédiatement obtenu en trois lignes le fait que cette théorie est complète, alors que la démonstration de Langford, qui est dans *Annals of Mathematics* 1927, tome 28, je crois, prend plusieurs pages. Évidemment, aujourd'hui, elle n'a pas besoin de prendre plusieurs pages, mais à l'époque, elle prenait plusieurs pages.

Et Gödel aurait eu, à ce moment-là, l'occasion d'avoir une application, tandis qu'ici, il n'y avait pas d'application. Donc, évidemment, on peut se demander pourquoi est-ce qu'il n'a pas vu ça ? À mon avis, il y a deux raisons. D'abord, j'ai oublié de dire que le théorème de Löwenheim-Skolem descendant était inconnu à l'époque, la partie ascendante était inconnue, et sa première mention apparaît en 1934 par Tarski.

Et Tarski, évidemment, je vous invite, d'ailleurs, je fais là une parenthèse pour faire de la propagande pour un livre qui vient de paraître, la biographie de Tarski par monsieur et madame Feferman[6]. Alors, comme ce sont des gens polis, ils n'ont pas insisté sur le fait qu'il était obsédé par les questions de priorité. Alors, je ne voudrais pas faire une analyse psychanalytique de ça, mais il était probablement obsédé par les questions de priorité parce que Gödel l'avait devancé pour les théorèmes d'incomplétude et d'indécidabilité, dont il n'était pas loin.

Le fait est qu'en 1934, Skolem a publié un article, et dans cet article, qui est publié aux *Fundamenta Mathematicae*, Tarski a fait insérer une note disant que lui avait démontré qu'une théorie dénombrable ayant un modèle infini a des modèles de cardinaux non dénombrables. On n'a jamais su comment il avait fait. C'est un profond mystère.

Il est sûr qu'en 1957, donc beaucoup plus tard, il a publié avec Vaught[7] une démonstration d'une version très générale du résultat. Donc, on ne peut pas demander à Gödel en 1930 de connaître ça, mais uniquement avec ce qu'il connaissait, il aurait pu avoir une application intéressante. Or, s'il avait eu cette application intéressante, il aurait eu la moitié d'un critère qui a été démontré en 1954 sur les notions de catégoricité relative, et à partir de ce critère qui a été démontré par Walsh et Vaught, les gens ont posé une question qui a abouti au théorème le plus célèbre de la logique

[5] Edward Vermilye Huntington.

[6] *Alfred Tarski, Life and Logic*, Anita Burdman et Solomon Feferman, Cambridge University Press.

[7] Robert L. Vaught.

d'après-guerre qui est le théorème de Morley[8].

Ce que je veux dire, c'est que si Gödel avait réfléchi à la question, il est tout à fait possible qu'il aurait pu fonder la théorie des modèles. Il ne l'a pas fait, alors pourquoi ne l'a-t-il pas fait ? Donc là, évidemment, maintenant je ne fais plus d'Histoire des mathématiques, mais comme je suis un béotien, je fais de la science-fiction. Donc, la science-fiction, c'est qu'il y avait, à mon avis, deux raisons.

La première raison, c'est que l'argument qu'il a donné sur les théories catégoriques, etc., était un truc de pure distraction. Il voulait faire une transition pour arriver à son théorème d'incomplétude. Donc, il a donné ça comme transition, et ensuite, il est arrivé au théorème d'incomplétude.

La deuxième chose, et évidemment, le théorème d'incomplétude était 100 fois plus intéressant que ça, la deuxième chose, à mon avis, il ne s'est jamais authentiquement intéressé à la théorie des modèles en tant que telle. Il s'en est occupé plus tard, quand il a dû donner une démonstration de non-contradiction relative de l'axiome du choix et de l'hypothèse du continu.

Mais la preuve qu'il ne s'en est jamais occupé, c'est que, d'une part, dans sa thèse, il n'y avait pas le seul théorème de théorie des modèles, le premier théorème de théorie des modèles, le théorème de compacité, et qu'il l'a inséré comme une addition dans l'article extrait de la thèse, et d'autre part, il ne s'en est jamais servi. Or, c'était un théorème qui était très facile à utiliser, et il y a, je crois, d'innombrables théorèmes de logique ou de mathématiques qui ont été démontrés en utilisant le théorème de compacité. Il est donc remarquable que l'homme qui l'ait trouvé ne l'ait jamais appliqué.

Et, à mon avis, s'il ne l'a pas appliqué, c'est parce que ça ne l'intéressait pas. Je veux dire, même un très grand génie n'est pas obligé de s'intéresser à tous les sujets de la Terre.

Est-ce qu'il me reste quelques minutes, là, pour Descartes ? Alors, ma deuxième question, pour Descartes, donc, ça sera... au fond, il y a une seule chose qui motive cette partie, c'est que, en tant que profane, je me demande : "Comment est-ce qu'on peut démontrer quelque chose en Histoire des mathématiques ?". Je sais comment on peut démontrer quelque chose en mathématiques, mais "Comment peut-on démontrer quelque chose en Histoire des mathématiques ?". Il se fait que, dans le cas de Descartes, dans ce dont je vais discuter maintenant, là, c'est beaucoup moins spéculatif que le terrain glissant sur lequel je me suis risqué et qui a failli démolir cet objet *(regardant le micro qu'il avait fait tomber.)*, à moins qu'il ne soit effectivement complètement démoli.

Donc, il se fait que, dès le XVIIe siècle, il y a des gens qui ont accusé Descartes d'avoir plagié un mathématicien dont je crois qu'on a entendu le nom aujourd'hui, qui s'appelle Harriot. En 1641, il y a eu un livre qui s'appelle, je crois, *Artis Analyticae Praxis*, qui a été publié. Et en 1638, il y a eu un personnage douteux qui s'appelle Beaugrand, qui doit être bien connu des spécialistes de Desargues, qui a accusé Descartes d'avoir plagié Harriot dans un manuscrit qui a circulé à l'époque.

Et alors, si vous lisez l'article du *Dictionary of Scientific Biography*, M. Mahoney écrit que Descartes

[8] Il s'agit ici du théorème de catégoricité de Morley.

a répété constamment qu'il n'avait lu ni Viète ni Harriot avant de publier *La géométrie*. Les accusations de Beaugrand ont été reprises à la fin du XVIIe siècle par Wallis et par Leibniz, mais d'une façon plus polie, où ils ont dit que ça devait beaucoup à Harriot, et que si Harriot n'avait pas existé, la géométrie n'aurait pas pu être fondée. Le fait est que j'étais en Angleterre il y a une dizaine d'années, dans une ville qui a une merveilleuse bibliothèque municipale, et j'ai pris une biographie de Descartes par un monsieur qui s'appelle Scott, qui est à l'usage du grand public, et il discute en long et en large le fait de savoir si Descartes a lu Harriot, si Descartes a copié Harriot, etc., en disant qu'un grand homme comme Descartes ne pouvait pas copier Harriot.

Bon. Et Baillet, dans sa première biographie, là je voudrais vous lire ça, parce que c'est assez drôle, Baillet dans la première biographie de Descartes, écrit "L'envie des jaloux continua de persécuter sa mémoire jusqu'à ce que l'on eût découvert, enfin, que M. Descartes n'avait jamais lu de son temps un livre de Campanella. Huygens s'est plaint du fait que le livre tardait à revenir, et lui envoie une lettre en lui expliquant pourquoi. Mais dans cette lettre, voilà ce qu'il lui dit. Il lui rend le livre qu'il lui a emprunté six mois auparavant et qu'il avait égaré. J'avais eu le désir de voir ce livre, à cause qu'on m'avait dit qu'il contenait un calcul pour la géométrie qui était fort semblable au mien. Ce que j'ai trouvé être véritable, mais il entre si peu en matière, *(vous reconnaissez le style habituel de Descartes)*, et enseigne si peu de choses, en beaucoup de feuilles, que je n'ai aucun sujet de vouloir mal à ses pensées de ce qu'elles ont prévenu les miennes". Donc la conclusion, elle me semble dans ce cas-là évidente. Il a lu Harriot, mais il l'a lu après avoir publié *La géométrie*.

Voilà. Écoutez, c'est tout ce que j'avais à dire. Merci.

(Applaudissements) suivis de quelques questions.

UN AUDITEUR DE LA CONFÉRENCE : Je suis heureux de t'avoir entendu poser la question "Comment peut-on démontrer quelque chose en Histoire des mathématiques ?" Du coup, j'en ai déduit qu'évidemment, tu ne prétends pas avoir démontré que Gödel ignorait le théorème de Löwenheim-Skolem ascendant. Tu l'as dit avec force, mais tu ne l'as évidemment pas démontré.

GABRIEL SABBAGH : Je prétends, enfin, j'espère l'avoir démontré, oui.

LE MÊME AUDITEUR : Donc tu sais comment on peut démonter quelque chose en Histoire des maths ?

GABRIEL SABBAGH : Je prétends l'avoir plus ou moins démontré autant que possible...*(Rires de la salle)* Oui. Mais moins, d'une façon moins probante que le fait que Descartes ait lu Harriot après *La géométrie*.

LE MÊME AUDITEUR : Ce que je veux dire, c'est qu'il me semble que l'argument qu'on lui donne pour ça, à savoir, qu'il se serait rendu compte alors que n'importe quelle théorie va avoir des modèles en toute cardinalité, c'est beaucoup trop puissant. C'est un rouleau-compresseur pour ça. Il suffisait de savoir qu'il y avait deux modèles de cardinalité différentes.

GABRIEL SABBAGH : Oui, mais la seule façon de le savoir est d'avoir Löwenheim-Skolem ascendant.

Le même auditeur : Mais non !

Gabriel Sabbagh : Pourquoi ?

Le même auditeur : Parce que ça voudrait dire que ça ne concernerait que des théories qui ont des modèles non dénombrables. Parce que dès qu'il y a une théorie qui a un modèle non dénombrable, on est assuré qu'il y en a un qui est dénombrable, par le descendant. Donc ça garantit l'existence de deux cardinalités différentes et ça interdit l'isomorphisme.

Gabriel Sabbagh : C'est ça. Donc il ne savait pas qu'une théorie ayant un modèle infini dénombrable a un modèle non dénombrable. Donc il ignorait beaucoup moins que le théorème ascendant, d'après ce que tu viens de dire.

Le même auditeur : Il ignorait moins.

Gabriel Sabbagh : Oui, exactement, nous sommes d'accord. Mais je peux te fournir une autre preuve de ça. C'est qu'en 1934, Skolem a publié l'existence d'un modèle non dénombrable de l'arithmétique. Et Skolem l'a publiée par une espèce de construction d'ultrapuissance qui n'était pas une ultrapuissance. Et Gödel a écrit un compte-rendu en 1934 de cet article. Et il n'a pas dit "n'importe quelle théorie qui a un modèle dénombrable infini a un modèle non dénombrable". Il n'a pas dit "ceci pourrait être démontré à partir de mon théorème de compacité.". Il en a fourni une autre démonstration basée sur son théorème d'incomplétude. D'accord ? Ca c'est un petit détail, juste pour confirmer le fait qu'il ignorait le théorème de Löwenheim.

Et par-dessus le marché, il n'a pas fait attention à la note de Tarski dans le même article qui disait "moi j'ai démontré qu'une théorie qui a un modèle dénombrable infini a un modèle non dénombrable, pour n'importe quelle théorie.". Il ne s'est pas occupé de ça dans son compte rendu.

Le même auditeur : Oui, c'est une chose de dire qu'il n'a pas fait attention et c'est une chose de dire qu'il ignore.

Gabriel Sabbagh : Non mais, attends, est-ce que tu prétends réfuter l'assertion suivante : "Il ignorait beaucoup moins que le théorème de Löwenheim-Skolem-Tarski ascendant."

Le même auditeur : C'est juste pour confirmer ce que tu as dit, à savoir que démontrer quelque chose en Histoire des mathématiques, je ne sais pas ce que ça veut dire.

Gabriel Sabbagh : Bon, d'accord.

Le même auditeur : Je crois que j'ai coupé la parole à quelqu'un en bas.

Karine Chemla : Oui, c'était moi.

Le même auditeur : Désolé.

Karine Chemla : Sauf que je n'avais pas ouvert la bouche encore. Non, non, c'était une tout petite chose de rien du tout à propos de Tarski. Comment est-ce qu'il a réussi à faire insérer la note dans l'article de Skolem ?

Gabriel Sabbagh : Écoutez, je l'ignore, mais Skolem a publié dans les *Fundamenta Mathematica*. Tarski était à Varsovie et il était une figure éminente des mathématiques polonaises. Et on peut imaginer que Tarski a été le rapporteur de cet article. Il n'y avait pas beaucoup de logiciens capables de lire l'article de Skolem. Donc, je ne sais pas si Tarski était éditeur en 1934 des *Fundamenta*, mais je suis sûr que c'était un mathématicien polonais tout à fait connu. Et d'ailleurs, cette note est tout à fait mystérieuse parce qu'on n'a pas d'explication maintenant. C'est-à-dire, Tarski a oublié sa démonstration. Il l'a reconnu plus tard qu'il l'avait oubliée. Je n'ai aucune raison de penser que c'était sans fondement. Mais vingt ans après, il a donné une démonstration avec Vaught. Probablement qu'il avait les mêmes idées, mais qu'il les avait plus ou moins oubliées.