Geneviève Guitel, *Histoire comparée des numérations écrites*

M Maurice Caveing

l'étude de l'évolution de la pensée scientifique sous son aspect conceptuel » demeurent essentielles.

Treize articles du recueil présentent des aspects et des problèmes de l'histoire des sciences, analysés dans leur cadre d'étude (enseignement secondaire, enseignement supérieur des premier, second et troisième cycles, recherche, formation des maîtres, formation continue). Le recueil est complété par un exemple de recherche interdisciplinaire en histoire de l'astronomie (équipe de recherches coperniciennes) et un aperçu sur la documentation en histoire des sciences et des techniques, par Mme F. Kearns, responsable du *Bulletin Signalétique* « Histoire des Sciences et des Techniques » du C.N.R.S.

Le manque de place ne nous permet pas d'entrer dans une analyse plus poussée des textes du recueil. Néanmoins nous nous faisons devoir de souligner les réflexions de J. Rosmorduc (quelques éléments de bilan, p. 109) portant sur des problèmes d'histoire des sciences dans l'enseignement supérieur du premier cycle, le texte touchant une expérience d'enseignement d'histoire des sciences au niveau de la maîtrise en sciences physiques (deuxième cycle) de Mme Sadoun-Goupil (p. 159) et le texte consacré au séminaire sur les fondements des sciences (Université Louis-Pasteur de Strasbourg) de MM. Barreau et Paty (p. 181).

Dans l'ensemble, par leur information, leur documentation et surtout leurs prises de position, les textes de ce recueil constituent une mise à jour effective de certains problèmes de base de l'enseignement de l'histoire des sciences et des techniques et, par cela même, une contribution directe au grand débat portant sur la place de l'histoire des sciences et des techniques dans l'enseignement français.

Doru TODÉRICIU.

Geneviève GUITEL, *Histoire comparée des numérations écrites*, Paris, Flammarion, 1975, 15×21 cm, 855 p., 50 planches, 48 fig., 73 tableaux, 6 hors-texte. Prix : 190 F.

Les numérations écrites jouent un rôle décisif dans l'équipement intellectuel des civilisations et le progrès de la science. Cependant elles n'existent qu'en association avec les numérations parlées, et souvent avec les numérations figurées des divers instruments de calcul (abaque, boulier...). Le présent ouvrage s'efforce naturellement de tenir compte de ce fait fondamental. Les numérations étudiées appartiennent aux peuples suivants : Egyptiens anciens (3) ; Aztèques, Grecs anciens (3) ; Romains, Hébreux, Ethiopiens, Arabes, Sumériens et Akkadiens (3) ; Mayas (2) ; Chinois (3) ; peuples de l'Inde et de Ceylan (5) ; soit au total 24 systèmes. Un code unique, constitué de huit symboles, permet de représenter commodément leurs caractéristiques ; un chapitre spécial est consacré au zéro et à ses précurseurs ; des compléments abondants portent sur la technique des calculs ou la construction de tables numériques. Une bibliographie axée sur les sources, un index de plus de 1 100 lexèmes, une table analytique des matières extrêmement détaillée, permettent des entrées faciles dans un ouvrage qui constitue une mine d'informations et dont la typographie et la mise en pages sont des réussites.

Ces systèmes sont classés de la façon suivante : un entier naturel pouvant être considéré comme la valeur numérique d'un polynôme supposé ordonné par rapport aux puissances décroissantes de la base (sous des conditions faciles à préciser), trois possibilités s'offrent théoriquement :

— ou bien seules les puissances de la base sont notées chacune au moyen d'un symbole original, l'information contenue dans les coefficients étant transmise par la répétition du symbole ;
— ou bien seuls les coefficients sont notés au moyen de symboles originaux, l'information concernant les puissances de la base étant transmise par l'ordre d'apparition des symboles dans l'écriture linéaire du nombre ;
— ou bien chacun des deux types d'informations donne lieu à des symboles originaux, dont la juxtaposition a un sens multiplicatif, à l'intérieur de chaque « nœud ».

Ces trois possibilités sont attestées historiquement. Dans le premier cas, le système peut être dit « d'addition » : c'est le type I, qui se présente à l'état pur dans l'égyptien hiéroglyphique et chez les Aztèques, mais comporte de nombreuses variantes : introduction d'un diviseur privilégié de la base en Grèce I et à Rome, deux bases alternées à Sumer, symboles originaux pour les nombres inférieurs à la base et ligatures pour les « nœuds » des puissances, afin d'éviter les répétitions, en égyptien hiératique, et à des degrés divers en Chine I et en Inde (grottes), enfin symboles originaux pour tous les « nœuds » par utilisation soit de l'alphabet (Grèce II, Hébreux, Arabe I), soit du syllabaire (système savant de l'astronome Âryabhaṭa en Inde).

Le deuxième cas correspond aux numérations de position : babylonienne, de base 60 ; à virgule flottante, maya II des codices, de base 20 ; chinoise III dérivée des fiches à calcul (rodnumerals), de base 100 ; indienne (inscription de Gwalior), de base 10, dont dérivent les numérations arabe II et européenne moderne ; mais il faut ajouter que les nombres inférieurs à la base sont notés dans le type additif, en base 10 à Babylone, 5 chez les Mayas et 10 en Chine.

Le troisième cas correspond à un type hybride, utilisé soit partiellement, pour certains « nœuds » (égyptien hiéroglyphique, akkadien usuel, Chine I, Ceylan), soit de façon complète (Grec III à base 10^4 ; Ethiopien à base 10^2 ; Chine II, Tamoul, Maya I des stèles).

Selon G. Guitel, cette classification a un caractère hiérarchisé : aussi le type hybride, qui est conçu comme intermédiaire, porte le n° II, et le type de position le n° III ; en effet le type I est très proche des procédés primitifs de dénombrement d'objets par groupements successifs, tandis que le type III comprend les systèmes les plus parfaits du point de vue opératoire. Cependant les numérations parlées bien organisées se présentent souvent, semble-t-il, avec le caractère hybride, les irrégularités mises à part. Si l'enquête linguistique venait à confirmer l'universalité du fait, il serait surprenant que le type auquel appartient la numération parlée n'apparaisse qu'en second lieu dans l'ordre des numérations écrites, si du moins cet ordre doit être aussi celui de l'évolution historique.

Pour le zéro, l'auteur montre qu'il y a lieu de distinguer entre zéro médial, terminal et opérateur. Le zéro médial, notant l'absence d'une puissance de la base, apparaît sous forme d'un « blanc » parfois peu discernable dans l'écriture du nombre, par exemple à Babylone. Par contre Maya I possède un zéro médial inutile dans le type II. Quant au zéro terminal, il n'est pas nécessairement opérateur : dans Maya II, une grave altération du système lui ôte ce caractère : pour les besoins du calendrier, $20^2 = 400$ est remplacé par 360. Notons enfin que la question de l'écriture des fractions systématiques en système positionnel n'est abordée que très incidemment dans l'ouvrage (1).

Il est commode, pour analyser les calculs égyptiens, d'utiliser la notation $\bar{n}$, pour le quantième $1/n$, proposée par Neugebauer, mais cela dissimule complètement le sens de l'hiéroglyphe « r », qui surmonte l'écriture du nombre n au génitif, et signifie « la bouchée » ou la « portion ». Si cette portion est, par hypothèse, égale à 1, la graphie égyptienne note le rapport d'entiers 1 : n et non la fraction $1/n$. D'ailleurs l'auteur constate (p. 110), que jamais numérateur et dénominateur d'une fraction n'apparaissent simultanément, et paraît admettre (p. 133), que la notion de fraction générale est absente. Mais cela ne signifie pas que la proportionalité ne soit pas connue : on est surpris que G. Guitel ne fasse aucune mention de la technique des nombres auxiliaires écrits en rouge dans le Papyrus Rhind qui fournit l'équivalent de notre réduction au même dénominateur, en permettant d'exprimer la valeur des quantièmes en nombres entiers. De l'interprétation des calculs dépendent les appréciations à porter sur les résultats obtenus par les Egyptiens. A cet égard, il nous semble difficile de s'en tenir à l'ouvrage de Gillain (1927) (p. 100) et de laisser de côté la thèse de K. Vogel (1929). Il est loin d'être prouvé que, dans l'expression d'un quotient au moyen de deux quantièmes, la meilleure des solutions est celle pour laquelle « le plus petit des deux dénominateurs sera le plus grand possible, ceci afin que le second dénominateur soit, lui, le plus petit possible » (p. 127). En général, le scribe semble rechercher au contraire une décroissance rapide de la valeur des quantièmes successifs, de façon à pouvoir facilement estimer, par rapport à un tout donné, la valeur du résultat cherché et négliger éventuellement les plus petits quantièmes par approximation. On ne voit pas sur quoi se fonde l'affirmation (p. 134), que les Grecs auraient été rebutés par ces calculs : une documentation variée, étendue sur une longue période, prouve au contraire que les Grecs n'ont cessé d'utiliser les quantièmes égyptiens, même après l'introduction des numérateurs quelconques. Par contre l'auteur souligne très heureusement les liens entre les calculs égyptiens et les concepts grecs de nombres parfait et abondant ; il esquisse la théorie des nombres tels qu'à partir de leurs seuils diviseurs on peut former additivement tous les entiers qui leur sont inférieurs ou égaux, et analyse les propriétés de ceux d'entre eux qui appartiennent à une suite néo-dyadique (de forme $(2\,n + 1)2^p$). L'usage de ces suites pour la formation des unités pondérales et des « boîtes de poids » en Afrique Noire (p. 26-726) attire l'attention sur l'appartenance de l'Egypte au continent africain.

(1) Qu'on nous permette de signaler quelques imperfections matérielles : l'écriture hiératique des nombres 5, 6, 7, 9, est sensiblement différente (p. 59 et p. 85), d'après cependant la même source ; p. 115, le troisième nombre parfait est 496, non 396 ; p. 116 le premier pair abondant premier à 3 est 20, non 40 ; p. 246, il paraît difficile de saisir le sens de la note ; p. 247, une table à compter avec des jetons portant des lettres n'est pas attestée, à notre connaissance, en Grèce ; p. 250, μοιρον pour μοιρῶν est un barbarisme ; pp. 255 et 257, la conjonction καί devrait être isolée des nombres voisins dans l'écriture des « tétrades » d'Apollonius, p. 329, note 1, le « jardin » ou « verger » babylonien *(musarû)* valait environ 36 m² : ce sont les 2/3 qui valent 24 m² ; p. 439, tableau 35, dans le résultat de l'exemple 6, « Ahau » doit être remplacé par « Kan ».

Faut-il suivre l'auteur quand il trouve la numération grecque dite « hérodienne » « pauvrement douée pour la logistique », incapable de se prêter à la multiplication (p. 182-198) ? Il aurait fallu au moins mentionner la scolie au *Charmide* (165 E) de Platon, qui fait état des « méthodes de multiplication et de division appelées hellénique et égyptienne ». La duplication est bien attestée en Grèce : elle peut s'effectuer en notation « hérodienne » presqu'aussi bien qu'en écritures égyptiennes. Pour l'alphabétique, aucune mention n'est faite des inscriptions d'Halicarnasse, connues bien avant les récentes fouilles d'Athènes. Est-il exact d'autre part que les Grecs aient introduit 3 lettres d'origine sémitique (p. 242) ? L'hypothèse de Larfeld sur la composition de l'alphabet milésien au début du VII^e siècle, et sa discussion par Keil méritaient une mention. L'usage de *καί*, au sens de « plus », ne doit pas étonner : c'est la façon standard d'indiquer l'addition. Il est difficile de concéder que la numérotation des chants de l'*Iliade*, ou des livres de la *Métaphysique*, d'Aristote, au moyen des 24 lettres de l'alphabet, due aux Alexandrins, ait été l'ébauche primitive du système alphabétique (p. 241). La même remarque vaut pour Ceylan, où 544 syllabes (34 consonnes $\times$ 16 vocalisations) servent à numéroter les pages de manuscrits (p. 617). Un système de numération peut servir à numéroter, mais la réciproque est-elle vraie ? Enfin l'idée que la logistique était un art « si méprisé des savants grecs » (p. 255) est une simple légende.

Il est question, chez les Babyloniens, de « la 1^re numération de l'orge » (p. 331), qui semble bien n'être autre chose que l'une des échelles de mesures de capacité en usage, dont il est dit que « la succession des multiples de 36 s'arrête à 144 pour une raison inconnue ». Il n'en est rien, car 144 *silà* (ou *qa*) valent une coudée cube, et l'on pouvait au-delà utiliser les mesures de volume. Cet exemple fait toucher du doigt la difficulté qu'il y a, dans une écriture idéographique, à distinguer un véritable système de numération d'une échelle métrologique. Dans le même ordre d'idées, la notation romaine pour 1 000 sesterces et 100 000 sesterces (p. 216-218), qui juxtapose les coefficients d'unités de compte, constitue-t-elle un vrai système de numération ? La tentative de rendre compte de la base 60 par la métrologie nous paraît hérissée de difficultés, malgré l'autorité de Neugebauer. A Babylone les 12 mois lunaires de 30 jours et l'année comptable de 360 jours semblent bien choisis en fonction de la base, et non l'inverse. Le rôle joué par 3 dans la découverte des suites de quintes de la gamme (p. 343) est une suggestion intéressante, mais tout cela ne revient-il pas à dire que la « grande unité » 60 fournissait un moyen commode d'obtenir simultanément des expressions entières des quantièmes usuels : 1/2, 1/3, 1/4, 1/5, 1/6, aussi anciennement attestés en Mésopotamie qu'en Egypte ?

La numération maya paraît destinée essentiellement à servir un calendrier dominé par la conjonction de deux cycles : 260 jours pour l'année religieuse, 365 jours de l'année vague, sans compter ceux de la révolution synodique de Vénus, et peut-être de Mars, soit un PPCM de 341 640 jours. La fort belle étude que l'auteur lui consacre met en lumière l'arithmétique additive de ce peuple, qui savait introduire les multiples de nombres fondamentaux et utiliser des tableaux pour résoudre des problèmes d'analyse indéterminée. Une date donnée étant déterminée à 52 ans près par 4 paramètres et l'origine absolue des temps étant fixée par la croyance, il s'agit de trouver la distance entre deux dates, ou le problème inverse.

Les systèmes chinois soulèvent plus d'un problème. La critique de l'interprétation de J. Needham pour la numération dite des « oracle-bones » (p. 484 sq.) est pertinente et permet de bien préciser les conditions auxquelles doit satisfaire une numération de position. Mais comment interpréter le système Chine II, type hybride complet, identique à la numération parlée, dans lequel les noms de nombre sont notés par des idéogrammes : la notation « en chiffres » ne se distingue pas de la notation « en mots », et l'on écrit des « fractions décimales » sans usage aucun du zéro ni de la virgule. Quant aux « rod-numerals » (Chine III), il ne s'agit guère que de la reproduction écrite d'une numération figurée de position, utilisant bâtonnets et échiquier : l'écriture introduit diverses ligatures et le zéro, mais les calculs se font toujours sur l'échiquier, puis le boulier. Il s'agit en fait d'un type additif qui ne devient positionnel que par l'heureuse invention de « coucher » les bâtonnets pour représenter les « nœuds » des puissances impaires de la base. La Chine ne s'évade pas de ce dilemme : quand elle utilise des symboles originaux, elle se borne à transcrire la numération parlée, quand elle découvre les avantages de la position, elle reste tributaire de la figuration et des instruments.

Par contre, de l'importante étude consacrée à l'Inde, on retire l'impression que ce pays était particulièrement bien placé pour aboutir à une pure numération écrite de position, à dix symboles, en raison de la variété des systèmes qu'il a expérimentés. On y disposait de deux numérations parlées : l'une donnait un nom à chaque puissance de 10, jusqu'à 10^{18} au moins, l'autre était positionnelle et utilisait plusieurs mots, équivalents poétiques ou arithmologiques, pour chacun des nombres inférieurs à la base, et donc aussi de toute nécessité pour le zéro. Les numérations écrites sont si nombreuses que seule une sélection peut être ici étudiée, mais toutes celles qui y figurent présentent des caractères favorables à une évolution vers le système de position, notamment par l'intermédiaire de la table à compter. En outre une discussion serrée de certaines inscriptions du Cambodge et d'Indonésie permet de contrebattre la thèse de Needham (p. 630 sq.) de l'origine chinoise du zéro indien et d'établir son emploi en 605 de notre ère.

La classification hiérarchisée sert ensuite à explorer les possibilités d'évolution interne d'une numération vers une autre. Partant de 28 possibilités, on constate que 7 seulement sont attestées, ce qui est peu. Mais ces 28 schémas sont déduits de l'hypothèse que l'évolution peut se faire seulement selon l'ordre hiérarchique, du type I vers les types II et III, et de II vers III, ce qui nous paraît en contradiction partielle avec le rôle bien mis en lumière des numérations parlées. Pourquoi l'évolution se ferait-elle seulement d'un type écrit vers un autre ? En réalité la numération parlée peut directement donner naissance à chacun des types écrits et des exemples en ont été donnés. En outre des passages du type II au type I ne sont pas à exclure (Ceylan) ; mais certaines formes hybrides partielles paraissent bien n'être que des régressions vers des formes parlées dans des numérations additives embarrassées pour écrire de grands nombres. De plus les systèmes alphabétiques, quoique additifs, pourraient bien être regardés comme un groupe à part, usant de sténogrammes. L'échec relatif de l'hypothèse testée met donc en relief les multiples facteurs qui interviennent : structures de la langue, types d'écriture des mots, nature du support, technique des instruments de calcul, contraintes culturelles.

Qu'on ne croie pas cependant que l'ouvrage méconnaît la complexité des problèmes qui se posent dans un domaine de recherche immense. C'est au contraire un de ses mérites de détruire chemin faisant bien des idées simplistes encore répandues. Un autre en est le souci constant de fournir au profane non mathématicien des explications d'une grande clarté. Il y a donc là un instrument précieux pour un public varié, dont on retiendra encore l'idée finale : les numérations de position sont des systèmes savants conçus pour pouvoir écrire de grands nombres et calculer sur eux, et c'est probablement l'intérêt porté par l'humanité à l'astronomie qui lui a créé ce besoin.

M. CAVEING.

Jean-Claude PONT, *La topologie algébrique, des origines à Poincaré*, Paris, Presses Universitaires de France, 1974, 13,5 × 21,5 cm, x-197 p., fig. (Bibliothèque de Philosophie contemporaine). Prix : 25 F.

Ainsi qu'il le dit dans son avant-propos, l'auteur du présent ouvrage s'est proposé de décrire « la naissance et la petite enfance de la topologie algébrique », dénomination actuelle d'une discipline qu'on appelait encore tout récemment la topologie combinatoire. Cette période, embrassant près de deux siècles (si l'on prend pour point de départ l'*analysis situs* de Leibniz), ou au moins un siècle et demi (si l'on commence par les travaux d'Euler) jusqu'aux recherches de Poincaré, fondateur de la topologie algébrique contemporaine, est si riche en découvertes qu'elle mérite tout à fait d'être étudiée séparément.

L'ouvrage de J.-C. Pont est divisé en deux parties — « les origines » et « les jeunes années » —, précédées d'une préface dans laquelle R. Taton résume les grandes lignes et les étapes du développement de la topologie algébrique au cours de la période mentionnée. A la fin de l'ouvrage se trouvent plusieurs additions utiles au texte principal : une chronologie des événements les plus importants, un tableau généalogique où sont représentés graphiquement les rapports entre les principaux courants de recherche, de courtes notices biographiques sur les principaux artisans du développement de la topologie algébrique (notamment E. Betti, W. von Dyck, C. Jordan, F. Klein, A.-M. Legendre, S. Lhuilier, J. B. Listing, A. F. Möbius, C. Neumann, L. Schläfli, C. von Staudt), bibliographie contenant aussi l'indication de quelques manuscrits inédits, enfin les index des noms et des concepts.

Leibniz et Descartes sont pour J.-C. Pont les « pseudo-précurseurs » de la topologie. Lorsqu'on fait remonter les origines de la topologie à Leibniz, on s'appuie en premier lieu sur sa lettre à Huygens du 8 septembre 1679. Leibniz y écrivait « qu'il nous faut encore une autre analyse proprement géométrique ou linéaire, qui nous exprime directement *situm*, comme l'algèbre exprime *magnitudinem*. Et je crois d'en voir le moyen... » (p. 7). On sait que c'est la terminologie de Leibniz qui a donné naissance aux expressions de *Geometria situs* d'Euler et de Gauss, de *Géométrie de situation* de Vandermonde et de Poinsot, de *Géométrie de position* de L. Carnot, de *Geometrie der Lage* de Gauss, Reye et de Staudt, et que le mot *topologie* créé en 1836 par Listing n'est que l'équivalent grec de l'*Analysis situs* latin (1). Cependant, J.-C. Pont estime, comme plusieurs autres auteurs

(1) Il ne faut pas d'ailleurs oublier que, ce faisant, Euler, Gauss, Poinsot et Listing avaient en vue la topologie elle-même, tandis que Carnot, Reye et Staudt parlaient de la géométrie projective et Vandermonde, de la géométrie de la marche du cavalier au jeu d'échecs.