

Crible de Goldbach et logique des topos : une formalisation des degrés de vérité

Denise Vella-Chemla pilotant l'ia gemini

2 juillet 2026

1. Topos

1.1. Introduction et rappels

Cette note explore la formalisation du crible de Goldbach à l'aide de la logique intuitionniste des topos de Grothendieck, inspirée des travaux d'Alain Connes sur le site arithmétique. Nous examinons l'objection selon laquelle les conditions modulaires relèvent d'une logique purement booléenne (vrai/faux) et montrons comment l'introduction d'une algèbre de Heyting des *cribles de vérité* permet de surmonter la rigidité binaire classique en traduisant l'existence d'un décomposant en un problème de prolongement d'un faisceau.

Soit $n \in \mathbb{N}$ un entier pair supérieur. On cherche à établir l'existence d'un décomposant de Goldbach $q > \sqrt{n}$ tel que pour tout nombre premier impair $p_k \leq \sqrt{n}$, on ait :

$$q \not\equiv 0 \pmod{p_k} \quad \text{et} \quad q \not\equiv n \pmod{p_k} \tag{1}$$

Dans le cadre classique (logique booléenne $\mathbb{B} = \{0, 1\}$), un candidat x valide l'ensemble des conditions si et seulement si la fonction caractéristique globale $\chi(x) = \prod_k \chi_k(x)$ est égale à 1. Dès qu'une seule condition échoue, toute l'information est perdue ($\chi(x) = 0$).

L'approche par les topos, introduite par Grothendieck dans SGA 4, substitue à \mathbb{B} un objet des valeurs de vérité Ω beaucoup plus riche, structuré comme une algèbre de Heyting.

1.2. Le site du crible et l'algèbre de Heyting Ω

Définissons un cadre de topos adapté à votre intuition. Soit $P_{\leq \sqrt{n}} = \{p_1, p_2, \dots, p_m\}$ l'ensemble ordonné des nombres premiers impairs inférieurs ou égaux à \sqrt{n} .

Définition : [poset des étapes] : soit I le poset des ensembles de nombres premiers inclus dans $P_{\leq \sqrt{n}}$, ordonnés par l'inclusion inverse (\supseteq). Une étape plus petite dans le poset correspond à une contrainte supplémentaire (un crible plus fin).

Dans le topos des préfaisceaux sur I , l'objet des valeurs de vérité $\Omega(J)$ pour un élément $J \in I$ représente l'ensemble des *cribles*, c'est-à-dire des sous-ensembles stables par restriction.

1.2..1 La distance à la vérité

Pour un candidat $x > \sqrt{n}$, sa **valeur de vérité** $\omega(x)$ n'est plus un élément de $\{0, 1\}$, mais le sous-ensemble maximal de $P_{\leq \sqrt{n}}$ pour lequel les conditions (1) sont satisfaites :

$$\omega(x) = \{p_k \in P_{\leq \sqrt{n}} \mid x \not\equiv 0 \pmod{p_k} \text{ et } x \not\equiv n \pmod{p_k}\} \quad (2)$$

La “distance à la vérité” évoquée par Alain Connes s'exprime ici géométriquement par le cardinal complémentaire :

$$d(x, \text{Vrai}) = |P_{\leq \sqrt{n}}| - |\omega(x)| \quad (3)$$

La vérité absolue est atteinte lorsque $d(x, \text{Vrai}) = 0$.

1.3. Réponse à l'objection booléenne : Quel est l'apport réel ?

Votre objection est cruciale : “*Il n'y a pas plus de chances de loper une classe modulo 7 que modulo 5 ; au niveau local, c'est binaire (on tombe dessus ou pas).*” C'est tout à fait exact au niveau de chaque fibre. L'apport des topos ne réside pas dans la modification de la probabilité locale, mais dans la *structure globale* et le *recollage* :

- **préservation de la structure d'erreur** : en logique booléenne, si un nombre échoue modulo 3 mais réussit modulo 5, 7, 11, etc., sa valeur de vérité globale tombe à 0. Il est traité de la même manière qu'un nombre qui échoue partout. Le topos conserve la mémoire de la “presque-validité”.
- **transition du dénombrement à la cohomologie** : au lieu de chercher à compter le nombre exact d'éléments dans l'intersection (ce qui engendre des termes d'erreur ingérables dans les cribles classiques), le topos permet de définir des faisceaux de solutions locales. Prouver qu'il existe un décomposant revient à démontrer que le premier groupe de cohomologie ou l'obstruction au recollement global d'un faisceau est nul.
- **le changement de variable géométrique** : comme le souligne Connes, le topos permet de faire de la géométrie là où il n'y a que de l'arithmétique discrète. En passant au site arithmétique, le problème combinatoire de Goldbach se transforme en un problème d'existence de sections globales sur une courbe ou un espace géométrique sous-jacent.

1.4. Formalisation en faisceau

On peut définir un faisceau \mathcal{F} sur notre site où pour chaque famille de nombres premiers J , $\mathcal{F}(J)$ est l'ensemble des entiers $x > \sqrt{n}$ vérifiant les conditions (1) uniquement pour les éléments de J . L'existence d'une solution globale pour la conjecture de Goldbach équivaut à la non-vacuité de la section globale :

$$\mathcal{F}(P_{\leq \sqrt{n}}) \neq \emptyset \quad (4)$$

Grâce aux théorèmes de point fixe ou aux propriétés de compacité interne propres à certains topos (comme ceux utilisés en géométrie non-commutative), on cherche à montrer que la compatibilité locale forcée par la densité des nombres premiers implique nécessairement l'existence d'au moins un point d'accumulation où la valeur de vérité est maximale.

1.5. Conclusion au sujet de l'approche par les topos

La logique des topos ne change pas le comportement des congruences, mais elle change la façon dont on mesure leur intersection. Elle offre un langage rigoureux pour quantifier le fait qu'un nombre est "presque" un décomposant, ouvrant la voie à des méthodes topologiques de recollement impossibles à formuler en logique de Boole.

2. Approche par signatures mécaniques et interférences d'ondes

Cette partie synthétise une approche alternative et concrète de la primalité et du crible de Goldbach, fondée sur des systèmes dynamiques d'oscillateurs et des sommes trigonométriques. Contrairement aux approches abstraites par la géométrie des topos, ce cadre modélise la primalité comme une signature dynamique exacte (annulation d'interférences), validée formellement par la preuve de V. Varin. L'objectif est d'explorer comment ces invariants continus contraignent l'existence des décomposants de Goldbach.

2.1. Le modèle dynamique et analytique (voir [1])

L'approche développée repose sur la transition d'une vision arithmétique statique vers une signature ondulatoire et cinématique de la primalité (voir [1]). Trois niveaux de modélisation structurent cette pensée :

- **l'approche cinématique (tore de phases)** : à chaque nombre premier p_k est associée une tige rotative tournant d'une fraction de tour $1/p_k$ à chaque impulsion d'horloge. La primalité d'un entier se traduit géométriquement par le non-retour à l'origine (position 0) de l'ensemble des tiges après un nombre de clics donné (voir [1]).
- **le système d'oscillateurs harmoniques** : les oscillations sont représentées par des sinussoïdes $\sin\left(\frac{\pi n}{p}\right)$. Les nombres composés correspondent à un phénomène d'interférence destructive (au moins une onde se trouve sur un nœud), tandis que les nombres premiers supérieurs à \sqrt{n} et inférieurs à n correspondent à des états d'interférence constructive (évitement de tout nœud des modes fondamentaux) (voir [1]).
- **les opérateurs de permutation** : la structure interne peut être encodée par un opérateur de permutation globale G (somme directe de matrices circulaires C_p). La primalité de k devient une propriété invariante purement algébrique calculée par la trace : $\text{Trace}(G^k) = k$ (voir [1]).

2.2. L'invariant trigonométrique absolu - la fonction *ssc* (somme de sommes de cosinus)

La fonction somme des diviseurs $\sigma(n)$ s'exprime de manière continue et exacte par :

$$\sigma(n) = 1 + n + \sum_{k=2}^{n-1} \sum_{l=1}^k \cos\left(\frac{2\pi nl}{k}\right) \quad (5)$$

Par conséquent, la fonction de crible $ssc(n)$ est définie par :

$$ssc(n) = \sum_{k=2}^{n-1} \sum_{l=1}^k \cos\left(\frac{2\pi nl}{k}\right) \quad (6)$$

Théorème de Varin : Un entier $n \geq 2$ est premier si et seulement si $ssc(n) = 0$.

Preuve : [Esquisse de la preuve de Varin] En prolongeant la somme dans le domaine complexe sous la forme $v(n) = ssc(n) + i \cdot sss(n) = \sum_{k=2}^{n-1} \sum_{l=1}^k e^{\frac{2i\pi nl}{k}}$, la somme interne géométrique se réduit à (voir [2]) :

$$\sum_{l=1}^k \left(e^{\frac{2i\pi n}{k}}\right)^l = \frac{e^{\frac{2i\pi n}{k}}(e^{2i\pi n} - 1)}{e^{\frac{2i\pi n}{k}} - 1} \quad (7)$$

Si n est premier, pour tout $k \in \{2, \dots, n-1\}$, le rapport n/k n'est jamais entier, rendant le dénominateur non nul. Comme $e^{2i\pi n} = 1$ pour tout entier n , le numérateur s'annule identiquement, d'où $ssc(n) = 0$ (voir [2]). Si $k|n$, un calcul de limite montre que la somme interne vaut exactement k , ce qui fait grimper la valeur de $\sigma(n)$ (voir [2]).

2.3. Application au Crible de Goldbach : Discussion pour l'ia claude

L'objection fondamentale face aux théories abstraites (comme la logique des topos) est que les congruences restent localement binaires ($x \pmod{p}$ tombe ou ne tombe pas sur la classe interdite). L'apport de la formule $ssc(n)$ et du modèle ondulatoire offre une perspective différente :

- **De la discontinuité au continu** : La condition de Goldbach pour un couple $(q, n - q)$ n'est plus une suite de filtres booléens disjoints, mais la recherche d'un point d'annulation simultané de deux systèmes d'ondes : $ssc(q) = 0$ et $ssc(n - q) = 0$.
- **L'annulation par interférence destructive** : Trouver un décomposant de Goldbach revient à prouver qu'il existe toujours un entier $q > \sqrt{n}$ tel que le système d'oscillateurs harmoniques n'enregistre aucun nœud ni pour q , ni pour $n - q$.
- **Piste de travail pour l'ia claude** : Comment utiliser les propriétés analytiques de la somme double de cosinus (ou de sa version en produit de sinus) pour modéliser la densité des solutions ? Plutôt que de chercher des recollements cohomologiques, peut-on borner l'interaction des phases de $ssc(q)$ et $ssc(n - q)$ pour garantir qu'elles ne peuvent pas saturer simultanément tous les entiers de l'intervalle $[\sqrt{n}, n/2]$?

Références

- [1] D. Vella-Chemla, *Formalisation du planeprem*, juin 2026.
<https://denisevellachemla.eu/Planeprem-formalisation.pdf>
- [2] V. Varin (Keldysh Institute), *Preuve mathématique de l'annulation de $ssc(n)$* , cité par D. Vella-Chemla, 2017.
<https://denisevellachemla.eu/VictorVarinKeldyshSumsumcos.pdf>