

Notes sur la fonction zêta de Riemann

D'après un manuscrit de cours (1922)

Transcription d'après Erich Hecke

1. Introduction

Ces notes sont extraites d'un manuscrit de cours sur les séries de Dirichlet, donné à Hambourg en 1922. Elles concernent principalement la fonction zêta de Riemann, sa définition, ses propriétés analytiques, et son lien avec la distribution des nombres premiers.

2. Définition de la fonction zêta

La fonction zêta de Riemann est définie, pour $\Re(s) > 1$, par la série

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}. \quad (1)$$

Cette série converge absolument pour $\Re(s) > 1$ et définit une fonction holomorphe dans ce demi-plan.

3. Produit eulérien

La propriété fondamentale établie par Euler est le produit infini suivant :

$$\zeta(s) = \prod_p \frac{1}{1 - p^{-s}}, \quad (2)$$

où le produit est étendu à tous les nombres premiers p . Ce produit converge absolument pour $\Re(s) > 1$ et fournit le lien entre la fonction zêta et la distribution des nombres premiers.

4. Prolongement analytique

Riemann a montré que $\zeta(s)$ se prolonge en une fonction méromorphe sur tout le plan complexe, avec un unique pôle simple en $s = 1$ de résidu 1. On a en effet

$$\zeta(s) = \frac{1}{s-1} + (\text{fonction entière}). \quad (3)$$

L'équation fonctionnelle, démontrée par Riemann, s'écrit :

$$\xi(s) = \xi(1-s), \quad \xi(s) = \frac{1}{2} s(s-1) \pi^{-s/2} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta(s). \quad (4)$$

5. Représentation intégrale

Riemann a également donné la représentation intégrale suivante :

$$\zeta(s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty \frac{x^{s-1}}{e^x - 1} dx, \quad \Re(s) > 1. \quad (5)$$

Cette formule permet d'étudier le comportement de $\zeta(s)$ dans tout le plan complexe.

6. Les zéros de la fonction zêta

Les zéros non triviaux de $\zeta(s)$ jouent un rôle central dans la théorie des nombres. Riemann a conjecturé que tous les zéros non triviaux se trouvent sur la droite critique $\Re(s) = \frac{1}{2}$. Cette hypothèse reste à ce jour non démontrée.

Dans le manuscrit, on trouve des inégalités du type :

$$|\zeta(1 + \epsilon + iA)| \geq c \frac{\epsilon^3}{|A|^{4k}}, \quad (6)$$

qui permettent de montrer l'absence de zéros sur la droite $\Re(s) = 1$.

7. Logarithme de la fonction zêta

On a le développement :

$$\log \zeta(s) = - \sum_p \log(1 - p^{-s}) = \sum_p \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m p^{ms}}. \quad (7)$$

Ce développement est à la base de la démonstration du théorème des nombres premiers.

8. Formule de Perron

La formule de Perron permet d'inverser la série de Dirichlet :

$$\sum_{n \leq x} a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s} \frac{x^s}{s} ds, \quad (8)$$

pour c suffisamment grand. Cette formule est utilisée pour estimer $\pi(x)$, le nombre de nombres premiers inférieurs à x .

9. Conclusion de la première moitié du document

Ces notes de cours résument les principaux résultats de Riemann sur sa fonction zêta : définition, produit eulérien, prolongement analytique, équation fonctionnelle, représentation intégrale, et lien avec la distribution des nombres premiers. Elles constituent une introduction classique à la théorie analytique des nombres.

10. Introduction de la seconde moitié du document

Cette seconde partie du manuscrit approfondit l'étude analytique de la fonction zêta. Elle contient des estimations fines de sommes de Dirichlet, des majorations de $|\zeta(1+it)|$, et des résultats sur les zéros de la fonction zêta.

11. Estimations de sommes de Dirichlet

Le manuscrit étudie des sommes du type :

$$\sum_{n \leq x} a_n \quad (9)$$

où les coefficients a_n sont liés à la fonction zêta. On utilise la formule de Perron pour relier ces sommes à des intégrales de la fonction zêta.

12. Majoration de $|\zeta(1+it)|$

Un résultat central du manuscrit est la majoration :

$$|\zeta(1+it)| = O(\log |t|) \quad (10)$$

pour $|t| \geq 2$. Cette estimation est obtenue par des méthodes élémentaires (comparaison série-intégrale) et permet de démontrer l'absence de zéros sur la droite $\Re(s) = 1$.

13. Les zéros de la fonction zêta

Le manuscrit établit que la fonction zêta ne s'annule pas sur la droite $\Re(s) = 1$. La démonstration repose sur l'inégalité classique :

$$|\zeta(1+\epsilon)|^3 |\zeta(1+\epsilon+it)|^4 |\zeta(1+\epsilon+2it)| \geq 1, \quad (11)$$

valable pour $\epsilon > 0$ et $t \in \mathbb{R}$. En utilisant le développement en série et le produit eulérien, on montre que si $\zeta(1+it) = 0$, alors le membre de gauche tend vers 0, ce qui est impossible.

14. Fonction $\xi(s)$ et équation fonctionnelle

Le manuscrit introduit la fonction auxiliaire :

$$\xi(s) = \frac{1}{2} s(s-1) \pi^{-s/2} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta(s), \quad (12)$$

qui satisfait l'équation fonctionnelle $\xi(s) = \xi(1-s)$. Les zéros de $\xi(s)$ sont les zéros non triviaux de $\zeta(s)$.

15. Théorème des nombres premiers

L'objectif final des estimations est de démontrer le théorème des nombres premiers :

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\log x}. \quad (13)$$

La preuve repose sur l'intégrale de Perron et les majorations de $|\zeta(1+it)|$.

16. Conclusion de la seconde moitié du document

Cette partie du manuscrit est une introduction classique aux méthodes analytiques de la théorie des nombres : série de Dirichlet, produit eulérien, prolongement méromorphe, équation fonctionnelle, et démonstration du théorème des nombres premiers (via l'absence de zéros sur la droite $\Re(s) = 1$).