

Transcription littérale du manuscrit Dirichletsche Reihen (Hamburg, 1922) – Notes sur la fonction ζ

OCR nettoyé, passages mathématiques bruts

Page 1

Work

Titel: Dirichletsche Reihen [Vorlesung], Hamburg, 1922

Autor: Hecke, Erich

Ort: Hamburg

Jahr: 1922

Signatur: Cod. Ms. E. Hecke Abd 5

Page 2 – OCR très dégradé

[Passage presque illisible : mots isolés "Riten", "Stundeln", "Rate", "Plassensallformel", "Generelle Riten", "Primstelle", ...]

Page 3 – OCR très dégradé

[Texte incohérent : "Funkte mhane Vnstela", "relati Mebte Rige", "Baldengne", ...]

Page 4

2. Semidiskte Funktionen

a) Beispielaufgaben $e = y(2)$, Heute fein in R.

Bedeutung ist durch die Umkehrung.

4) Nächste Funktionsklasse: (gehängt von Rippe ...)

Relativ. Heute geheim

...

I. Einlegung m g um m de Rene ulegg

II. Rekordstimmende = 1

Page 5

3. In general, we define the function f as
 $f(x) = \int_0^x f(t) dt.$
a) ciphathe Foe : h = .
b) hegenine dinduk f di Ransende, he Renshijen
...

Page 10

[Première page vraiment lisible]

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^s} < \int \frac{du}{u^s} < \frac{1}{(n-1)^s} \tag{1}$$

$$\frac{1}{s-1} < \zeta(s) < 1 + \frac{1}{s-1} \tag{2}$$

$$\lim_{s \rightarrow 1} (s-1)\zeta(s) = 1 \tag{3}$$

$$f(s) = \sum_{n=1}^\infty \frac{a_n - c}{n^s} = \sum_{n=1}^\infty \epsilon_n n \left(\frac{1}{n^s} - \frac{1}{(n+1)^s} \right) \tag{4}$$

Page 20

$N_i S(s) \quad R(s) = F \text{ abtrel chmngin, mi } 1$
 $\lim_{\{s \rightarrow 0\}} 1/s \int_{-s}^{\infty} S(s) ds = \int_{\{n \leq x\}} a_n$

$$\int_{s-i\omega}^{s+i\omega} S(s)ds = \sum_{n=1}^\infty a_n \int_{s-i\omega}^{s+i\omega} \left(\frac{x}{n}\right)^s ds \tag{5}$$

$$= 2\pi i \sum_{n=1}^\infty a_n + \mathcal{F} \tag{6}$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{s-i\omega}^{s+i\omega} S(s)ds = \sum_{n=1}^\infty a_n \quad (\text{abtrel Chmngin}) \tag{7}$$

Page 24

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \int_0^\infty (x^2)(1-(x+k))dx = (1-(x+k))(k-1) \sum_{n=1}^\infty a_n (1-(x+k))(k-1) \tag{8}$$

$$= \frac{1}{(k-1)!} \sum_{n=1}^\infty a_n (x-n) \frac{x^{k-1}}{x^{k-1}} \quad (k \geq 2) \tag{9}$$

Page 27

$$f(t) = e^{-is}, \quad -\pi \leq t \leq +\pi \quad (10)$$

$$f(\sigma + it) = e^{-i\sigma + t} = e^t (\cos \sigma - i \sin \sigma) \quad (11)$$

$$f(2 + it) = e^{-it}, \quad f(-2 + it) = e^{it}, \quad f(0 + it) = e^{it} \rightarrow \infty \quad (12)$$

Page 31

$$f = \frac{q}{q - 2A}, \quad q = \frac{2A}{A - 1} \quad (13)$$

$$f = -1, \quad q \neq A \quad (14)$$

$$f = \frac{1}{A} \rightarrow \frac{1}{A} \quad (15)$$

Page 42

Lh: Hn Z an, Zbn n Zn hongin, de

$$a_n = (a_n)(b_n)$$

...

$$A(0) D(s) = B(s) \text{ and } K(s) > 1$$

Page 46 – Section clé : "Die Riemanns -Function"

Die Riemanns -Function, und die Verteilung der Primzahlen.

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \quad (16)$$

définit une fonction régulière pour $\Re(s) > 1$.

$$\zeta(s) = \prod_p \left(1 + \frac{1}{p^s} + \frac{1}{p^{2s}} + \cdots \right) = \prod_p \frac{1}{1 - p^{-s}} \quad (17)$$

$$\left| \prod_{p \leq x} \left(\frac{1}{p^{1-s}} \right) - \sum_{n \leq x} \frac{1}{n^{1-s}} \right| < \sum_{n > x} \frac{1}{n^{1-s}} = o(1) \quad (x \rightarrow \infty) \quad (18)$$

Discussion sur la divergence de $\sum 1/n$ et le fait que $\zeta(1 - \epsilon) \neq 0$ pour $\Re(s) \geq 1$.

Page 48

$$\log \zeta(s) = - \sum_p \log \left(1 - \frac{1}{p^s} \right) = \sum_p \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{mp^{ms}} \quad (19)$$

$$\log \zeta(s) + \sum_p \frac{1}{p^s} = \phi(s) \quad (20)$$

$$\phi(s) \text{ régulier pour } \Re(s) > \frac{1}{2} \quad (21)$$

$$\phi(s) = \sum_p \left(\frac{1}{2p^{2s}} + \frac{1}{3p^{3s}} + \cdots \right) \quad (22)$$

$$\sum_p \left(\frac{1}{p^s} + \frac{1}{p^{2s}} + \cdots \right) = \sum_p \frac{1}{p^s(1-p^{-s})} \quad (23)$$

Si $\zeta(s)$ n'a pas de zéros pour $\Re(s) > 1/2$, alors $\sum_p 1/p^s$ est régulière pour $\Re(s) > 1/2$.

Page 50

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}, \quad F(\zeta(s)) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\zeta(s)}{n^s} = (1 - 2^{-1-s})\zeta(s) \quad (24)$$

$$\zeta(s) \text{ est régulière pour } \Re(s) > 0 \text{ sauf en } s = 1 + \frac{2k\pi i}{\log 2} \quad (25)$$

$$\zeta(s) - \frac{1}{s-1} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{(n+1)^s} - \int_n^{n+1} \frac{du}{u^s} \right) \quad (26)$$

$$\int_n^{n+1} \frac{du}{u^s} = \frac{1}{(n+1)^s} + s \int_n^{n+1} \frac{u-n}{u^{s+1}} du \quad (27)$$

$$\zeta(s) - \frac{1}{s-1} = 1 - s \sum_{n=1}^{\infty} \int_n^{n+1} \frac{u-n}{u^{s+1}} du \quad (28)$$

Page 56 – "Riemannsche -Function (1859)"

Riemannsche -Function (1859)

$$\Gamma(s)\zeta(s) = \int_0^{\infty} \frac{x^{s-1}}{e^x - 1} dx \quad (29)$$

Intégrale de contour :

$$\int_C f(z)z^{-s} dz \quad (30)$$

$$J = (e^{2\pi is} - 1) \int f(z) z^{-s} dz \quad (31)$$

$$\zeta(s) = \frac{1}{e^{2\pi is} - 1} \int_{\mathcal{C}} f(z) z^{-s} dz \quad (32)$$

Résidus aux pôles $z = 2k\pi i$:

$$\int_{\mathcal{C}} f(z) z^{-s} dz = -2\pi i \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (2k\pi i)^{s-1} \quad (33)$$

Page 66

$$\left| \frac{1}{W_3} \right| < Ax \int_0^\infty \frac{\ln A}{T + i \ln A} dA = O(x^{\alpha+\epsilon} \ln^2 \omega) \quad (34)$$

$$\pi(x) = \int_0^x \frac{d\sigma}{\ln x} + O(x^{\alpha+\epsilon}) + O\left(\frac{x^3}{\omega}\right) + O\left(\frac{x^2}{\omega}\right) \quad (35)$$

Page 68

$$\log \zeta(\theta + iA) = \sum_{m_1, m_2} \frac{-imA}{m_1 m_2} \quad (36)$$

$$|\zeta(\theta + iA)| = e^{\sum_{m_1, m_2} \frac{\text{Im}(A \log \mu)}{m_1 m_2}} \quad (37)$$

$$3 + 4 \cos \alpha + \cos 2\alpha = 2(1 + \cos \alpha)^2 \geq 0 \quad (38)$$

$$|\zeta(1+\epsilon)|^3 |\zeta(1+\epsilon+iA)|^4 |\zeta(1+\epsilon+2iA)| \geq 1 \quad (39)$$

$$|\zeta(1+\epsilon)| < \frac{2}{\epsilon} \quad (40)$$

$$|\zeta(1+\epsilon+iA)|^4 \geq \frac{\epsilon}{8} \quad \Rightarrow \quad |\zeta(1+\epsilon+iA)| \geq \frac{\epsilon^{3/4}}{8} \quad (41)$$

Page 70

$$|\zeta(1+iA)| \geq \frac{\epsilon^3}{4A^{4k}} - \frac{1}{2} \frac{\epsilon^{1/4}}{A^k} \quad (42)$$

$$\left| \frac{1}{\zeta(1+iA)} \right| = O(|A|^{16k}) \quad (43)$$

$$|\zeta(1+iA)| = O(|A|^{16k}) \quad (44)$$

Page 72

[Nombreuses pages de calculs avec des inégalités sur ζ et sa dérivée.]

Page 76

4(1) il kine mline Fikhin. 8- f- pn'ine 6(+10)
...
Also is f déikhel déi (1) = thri-: $1/|S|k$ korn. Fikhi > 0 .
 $(s) = e^{\{g(s)\}} _s (1 - s/P) e^{\{s/P\}} \quad g(s)$ ein gane Fikhi

Page 78

$$\psi(s) = e^{g(s)} R(s), \quad R(s) \text{ a des zéros réels?} \tag{45}$$

$$|\psi(s)| = e^{\Re g(s)} |R(s)| \tag{46}$$

$$\Re g(s) + g(s) R(s) \cong a |s| \log |s| \tag{47}$$

$$\psi(s) = e^{B_s} R(s), \quad \psi(1-s) = e^{-B_s} R(1-s) \tag{48}$$

$$1 = e^{2B_s} \frac{R(s)}{R(1-s)} \tag{49}$$

Page 82

$$\psi(s) = s(s-1)\pi^{-s/2}\Gamma(s/2)\zeta(s) \tag{50}$$

$$\frac{\psi'(s)}{\psi(s)} = \frac{1}{s} + \frac{1}{s-1} - \frac{1}{2} \ln \pi + \frac{1}{2} \frac{\Gamma'(s/2)}{\Gamma(s/2)} + \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \tag{51}$$

$$\sum_p \left(\frac{1}{2 + \beta + i(\lambda - \gamma)} + \frac{1}{\rho} \right) \tag{52}$$

Page 90

$$\ln \{ _0^{-1} (+ iw) = 0(1) + _{{2+iw}}^{\{1\}} _0^{\{1/2\}} ds \}$$

$$R(x) = \pi(x) + \pi(\sqrt{x}) + \pi(\sqrt[3]{x}) + \cdots = \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{m} \quad (53)$$

$$2\pi R(x) = \int_{2-i\omega}^{2+i\omega} \frac{x^s}{s} \log \zeta(s) ds \quad (54)$$

Page 94

$$2\pi i \sum_{n=1}^{\infty} \int \frac{x^s}{s} ds = -2\pi i \int \frac{x^s}{s} ds + 2\pi i \int \frac{x^s}{s} ds \quad (55)$$

Page 98

Janninikheli und Romerena de Rüttlehele Reh.

h-igeke a n- da Frmel:

$g(0) = a_n \sin(k n)$

$T \cdot 1/2 \sum_{n=1}^{\infty} x^3 g(0) d = 1/T \sum_{n=1}^{\infty} (x - n)^k$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} x^s \varphi(\lambda + i\omega) d\omega = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{\lambda^s} (x - n)^k \quad (56)$$

Page 100

[Fin du manuscrit, pages numérotées 48, avec des "sin sin sin ..." répétées.]

Formule de Perron et majorations

6. Die ganze Funktion $\xi(s)$, ihre Nullstellen, und das Produkt nach Hadamard.

$$\xi(s) = \frac{1}{2} s(s-1) \pi^{-s/2} \Gamma(s/2) \zeta(s) \quad (57)$$

$$\xi(s) = e^{A+Bs} \prod_{\rho} \left(1 - \frac{s}{\rho}\right) e^{s/\rho} \quad (58)$$

Où le produit est étendu à tous les zéros non triviaux ρ de $\zeta(s)$.

Die Nullstellen ρ von $\zetaeta(s)$ sind die Nullstellen von $\xi(s)$.

$$\sum_{\rho} \frac{1}{|\rho|^2} < \infty \quad (59)$$

Page suivante – Estimations de $\zeta(1+it)$

$$|\zeta(1+it)| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+it}} = O(\log |t|) \quad (60)$$

$$|\zeta(1+it)| \geq c \frac{1}{\log |t|} \quad (61)$$

(Minorations pour démontrer l'absence de zéros sur $\Re(s) = 1$).

Page suivante – Inégalité de la fonction zêta

$$|\zeta(1+\epsilon)|^3 |\zeta(1+\epsilon+it)|^4 |\zeta(1+\epsilon+2it)| \geq 1 \quad (62)$$

Si $\zeta(1+it) = 0$, alors le membre de gauche tend vers 0, contradiction.

$$|\zeta(1+\epsilon)| < \frac{2}{\epsilon} \quad (63)$$

$$|\zeta(1+\epsilon+it)| \geq \frac{\epsilon^3}{4A^{4k}} - \frac{\epsilon^{1/4}}{2A^k} \quad (64)$$

Page suivante – Dérivée logarithmique et zéros

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \sum_{\rho} \left(\frac{1}{s-\rho} + \frac{1}{\rho} \right) - \frac{1}{2} \frac{\Gamma'(s/2)}{\Gamma(s/2)} + \dots \quad (65)$$

$$\sum_{\rho} \frac{1}{|s-\rho|^2} = O(\log |t|) \quad (66)$$

Die Anzahl $N(T)$ der Nullstellen mit $0 < \text{Im}(\rho) < T$ ist
 $N(T) = (T/2) \log(T/2) - T/2 + O(\log T)$.

Page suivante – Formule de Perron pour $\pi(x)$

$$\pi(x) + \pi(\sqrt{x}) + \pi(\sqrt[3]{x}) + \dots = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \quad (67)$$

$$R(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{2-i\infty}^{2+i\infty} \frac{x^s}{s} \log \zeta(s) ds \quad (68)$$

$$\log \zeta(s) = \sum_p \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{mp^{ms}} \quad (69)$$

Durch Abschätzung des Integrals erhält man:

$\pi(x) = \text{li}(x) + O(x e^{-c \sqrt{\log x}})$.

Page suivante – Résidu de $\zeta(s)$ en $s = 1$

$$\lim_{s \rightarrow 1} (s-1)\zeta(s) = 1 \quad (70)$$

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = -\frac{1}{s-1} + O(1) \quad (71)$$

Page suivante – Produit eulérien et divergence

$$\prod_p \frac{1}{1-p^{-s}} = \zeta(s) \quad (72)$$

Pour $s = 1$, le produit diverge, ce qui prouve que la série $\sum 1/p$ diverge.

Dernières pages – Estimations plus fines

Es gilt: $|\zeta(1+it)| = O(\log |t|)$ und
 $|\zeta'(1+it)| = O(\log^2 |t|)$.

$$|\zeta(1+it)| \leq \frac{A \log |t|}{(1+\epsilon)} \quad (73)$$

$$\left| \frac{1}{\zeta(1+it)} \right| = O(\log^2 |t|) \quad (74)$$

Diese Abschätzungen sind ausreichend, um den Primzahlsatz zu beweisen.