Actes du Congrès International des Mathématiciens
Vancouver, 1974

Problèmes de Géométrie Conforme

J. Lelong-Ferrand

Soit (M,g) une variété riemannienne de classe C^∞ et de dimension $n \geqq 3$. Plaçons nous d'abord au point de vue usuel de la géométrie différentielle et notons $C(M, g)$ [resp. $I(M, g)$] le groupe des C^∞-difféomorphismes conformes de M [resp. le groupe des isométries de M]. D'après les théorèmes de Montgomery et Kobayashi on sait que $C(M,g)$ est un groupe de Lie pour la topologie compacte ouverte: c'est en effect, le groupe des automorphismes de la structure conforme de M, qui est une G-structure de type fini. Un sous-groupe G de $C(M, g)$ est dit essentiel s'il n'existe aucune fonction régulière ρ sur M telle que $G \subset I(M, e^{2\rho}g)$, inessentiel dans le cas contraire. Cela étant le problème suivant (conjecture de Lichnérowicz) a fait l'objet de nombreux travaux:

Existe-t-il des variétés non conformes à l'espace euclidien (E^n, g_0) ou à la sphère standard (S^n, g_0) pour lesquelles la composante connexe $C_0(M, g)$ de $C(M, g)$ soit essentielle?

Ce problème a d'abord été résolu sous diverses hypothèses supplémentaires, en particulier: M est compacte [5], [9]. [10] et: (M, g) est une variété d'Einstein complète [13] (pour une bibliographie plus détaillée, voir [5] ou [9]).

Une réponse définitive (et négative) nous est maintenant donnée par le théorème suivant de D.V. Alekseevski [1]:

THÉORÈME 1. *Si $C_0(M, g)$ est essentiel, (M, g) est conforme à (E^n,g_0) ou à (S^n, g_0).*

On en déduit facilement:

THÉORÈME 1 BIS. *Si (M, g) est compacte et si $C_0(M, g)$ est non compact, (M, g) est conforme à (S^n, g_0).*

Ce dernier résultat, qui apparaît maintenant comme un corollaire du Théorème 1, avait été établi presque simultanément par M. Obata et moi-même, par des méthodes essentiellement différentes: c'est par une étude précise des modules de continuité des transformations quasi-conformes que j'établis l'équicontinuité de $C(M, g)$ lorsque (M, g) n'est pas conforme à (S^n, g_0); M. Obata utilise au contraire les techniques propres à la géométrie riemannienne et prouve que, si $C_0(M, g)$ est non compact, (M, g) est conformément plate; il y parvient en étudiant l'action de $C_0(M, g)$ sur l'ouvert formé des points de M où le tenseur de courbure conforme est non nul. Par un théorème de N. Kuiper [4] on est alors ramené à l'étude d'un ouvert de (S^n, g_0); on utilise le fait que $C_0(M, g)$ contient un sous-groupe essentiel à un paramètre et qu'un tel sous-groupe G admet un point fixe; le résultat est obtenu par une analyse du comportement de G en ses points fixes.

La démonstration du Théorème 1 donnée par D.V. Alekseevski n'est pas sans analogie avec celle du Théorème 1 bis par Obata. Elle est fondée sur la notion de groupe isotropiquement compact, i.e., tel que le sous-groupe d'isotropie de chaque $P \in M$ soit compact; et elle se décompose en trois parties:

(A) Un sous-groupe essentiel G de $C(M, g)$ n'est pas isotropiquement compact.

(B) Si $C_0(M, g)$ n'est pas isotropiquement compact, il contient un sous-groupe essentiel à un paramètre.

(C) Si (M, g) admet un groupe essentiel à un paramètre de transformations conformes (M, g) est conforme à (E^n, g_0) ou à (S^n, g_0).

Pour établir (A), D.V. Alekseevski considère un sous-groupe fermé et isotropiquement compact G de $C(M, g)$ et montre tout d'abord que G opère proprement dans M au sens de Bourbaki; puis il construit, sur un voisinage G-invariant U_p d'un point arbitraire $p \in M$, une métrique G-invariante et conforme à g. Enfin, il construit une partition G-invariante de l'unité, subordonnée au recouvrement $\{U_p\}$, et il en déduit l'existence sur M d'une métrique G—invariante et conforme à g, prouvant ainsi que G est inessentiel.

Pour établir (B) il suffit de prouver que si le groupe d'isotropie C_p d'un point P est non compact, sa composante connexe est non compacte. On se ramène au cas où $C_0(M, g)$ est transitif en considérant l'orbite M' de p, et en prouvant que le groupe facteur C' agissant sur M' est essentiel. La fin de la démonstration utilise une représentation de C_p dans $C(E_n)$ et une étude fine des transformations conformes au voisinage de leurs points fixes, fondée sur un développement limité d'ordre 2.

Pour établir (C) on montre d'abord que chaque point fixe p d'un sous-groupe essentiel à un paramètre de $C_0(M, g)$ admet un voisinage ouvert et G-invariant V sur lequel le tenseur de courbure conforme s'annule; il ne reste ensuite qu'à prouver que ∂V est vide ou réduit à un point.

Enfin D.V. Alekseevski signale en note que le Théorème 1 reste vrai si l'on remplace $C_0(M, g)$ par $C(M, g)$ lui-même.

Par contre, il n'existe pas de résultat analogue pour les variétés pseudo-riemanniennes.

Etude directe du cas compact. Etant donnée la complexité des techniques utilisées par D.V. Alekseevski il n'est peut-être pas sans intérêt de rappeler ici la méthode relativement élémentaire que j'ai utilisée dans le cas compact; de plus cette méthode fait apparaître le Théorème 1 bis comme une conséquence d'un théorème d'analyse plus général, relatif aux transformations quasi-conformes.

DÉFINITION 1. Soit (M, g) et $(\bar{M}, \bar{g})$ deux variétés riemanniennes de classe C^1 et de dimension $n \geqq 2$. Nous dirons qu'un homeomorphisme $\phi : M \to \bar{M}$ est k-quasi-conforme si:

(i) ϕ est ACL^n (i.e., si ϕ est absolument continue sur presque toute ligne coordonnée relative à un atlas donné, et si ses dérivées partielles appartiennent à $L^n_{\mathrm{loc}}(M)$).

(ii) Pour presque tout $x \in M$ la différentielle de ϕ et son jacobien métrique J_ϕ vérifient:

$$J_\phi(x) \neq 0 \quad \text{et} \quad |\phi'(x)|^n \leqq k^n J_\phi(x) \tag{1}$$

(la condition (i) entraînant l'existence de $\phi'(x)$ pour presque tout x).

En tout point x où $\phi'(x)$ existe et vérifie $\phi'(x) \neq 0$, on a nécessairement $|\phi'(x)|^n \geqq J_\phi(x)$. On a donc toujours $k \geqq 1$; et si $k = 1$, $\phi'(x)$ est une similitude: les homéomorphismes 1-quasi-conformes peuvent donc être dits conformes; et, pour prouver que ce sont des transformations conformes au sens classique, il suffit de prouver que ce sont des difféomorphismes (voir plus loin).

Désignons par $Q_k(M, \bar{M})$ l'ensemble des homéomorphismes k-quasi-conformes de M sur $\bar{M}$, muni de la topologie compacte ouverte. On a alors [**5b**, Théorème 9.3]:

THÉORÈME 2. *Si M, $\bar{M}$ sont compactes et si $Q_k(M, \bar{M})$ n'est pas compact, il existe un homéomorphisme K-quasi-conforme de (M, g) sur (S^n, g_0).*

En prenant $\bar{M} = M$ et $k = 1$, on en déduit:

COROLLAIRE. *Si le groupe des homéomorphismes conformes d'une variété riemannienne compacte (M, g) n'est pas compact il existe un homéomorphisme conforme de (M, g) sur (S^n, g_0).*

Si (M, g) et $(\bar{M}, \bar{g})$ sont de classe C^∞, on peut prouver que les homéomorphismes conformes de (M, g) sur $(\bar{M}, \bar{g})$ sont des difféomorphismes (voir plus loin). Du corollaire précédent on déduit alors que le Théorème 1 bis reste vrai en remplaçant $C_0(M, g)$ par $C(M, g)$.

La théorie générale des transformations quasi-conformes permet de montrer que $Q_k(M, \bar{M})$ est une partie fermée de l'ensemble des homéomorphismes de M sur $\bar{M}$; pour prouver que $Q_k(M, \bar{M})$ est compact il suffit donc (si M et $\bar{M}$ sont compactes) de prouver que la famille $Q_k(M, \bar{M})$ et la famille formée par les réciproques des éléments de $Q_k(M, \bar{M})$ sont équicontinues. Nous allons donner un aperçu de la démonstration.

Problèmes d'équicontinuité. La construction de modules de continuité effectuée dans [**5b**] pour les applications quasi-conformes a été reprise de manière plus systématique dans [**8**]; pour la rendre plus intuitive, nous introduirons ici une définition:

DÉFINITION 2. Une partie X de la variété (M, g) sera dite de diamètre apparent

$\leqq \delta$ s'il existe une partie compacte propre de M, contenant X et difféomorphe à une boule de E^n, dont la frontière ait un diamètre géodésique $\leqq \delta$.

La proposition suivante résulte alors du Lemme (5.2) de [8] et du fait qu'une variété riemannienne est localement difféomorphe à E^n:

PROPOSITION 1. *Les notations étant celles de la Définition* 1, *soit* $\phi:(M, g) \to (\bar{M}, \bar{g})$ *une application* ACL^n *verifiant*

$$\int_M |\phi'|^n \, d\tau \leqq m. \tag{2}$$

Pour chaque compact $K \subset M$, *il existe un nombre* $\alpha_k > 0$, *ne dépendant que de* K, *tel que l'image par* ϕ *d'une boule géodésique centrée sur* K *et de rayon* $\rho < \alpha_k$ *ait, dans* $\bar{M}$, *un diamètre apparent inférieur à* $(mB_n/|\operatorname{Log} r|)^{1/n}$, *où* B_n *désigne une constante dépendant seulement de* n.

La condition (2) est vérifiée par tout homéomorphisme k-quasi-conforme $\phi: M \to \bar{M}$, si $\bar{M}$ est de mesure finie $\leqq mk^{-n}$. D'autre part, on a la proposition suivante, qui résulte du Lemme 7.3 de [5b] et qui permet d'établir un lien entre le diamètre apparent et le vrai diamètre.

PROPOSITION 2. *Si* $(\bar{M}, \bar{g})$ *est compacte il existe un nombre* $\Upsilon > 0$ *possédant la propriété suivante: si* X *est une partie de* $\bar{M}$ *de diamètre apparent* $\delta < \Upsilon$, *l'un des ensembles* X, $\bar{M} \backslash X$ *a un diamètre géodésique* $\leqq 4\delta$.

Des Propositions 1 et 2 on déduit le critère d'équicontinuité qui suit:

PROPOSITION 3. *Soit* Φ *une famille d'homéomorphismes k-quasi-conformes de la variété compacte* (M, g) *sur la variété compacte* $(\bar{M}, \bar{g})$; *pour que* Φ *soit uniformément équicontinue, il suffit qu'il existe un nombre* $h > 0$ *tel qu'à chaque* $\phi \in \Phi$ *on puisse associer trois points* a_1, a_2, a_3 *de* M *vérifiant* $d_M(a_i, a_j) \geqq h$ *et* $d_{\bar{M}}(\phi(a_i), \phi(a_j)) \geqq h$ *pour* $i, j = 1, 2, 3$ $(i \neq j)$ (d_M *et* $d_{\bar{M}}$ *désignant les distances géodésiques sur* M *et* $\bar{M}$).

Si la famille Φ n'est pas équicontinue, ce lemme montre, en gros, qu'on peut en extraire une suite convergeant vers une transformation dégénérée. De façon précise on a:

PROPOSITION 4. *Soit* Φ *une famille non équicontinue d'homéomorphismes k-quasi-conformes de la variété compacte* (M, g) *sur la variété compacte* $(\bar{M}, \bar{g})$; *alors il existe une suite* (ϕ_p) *extraite de* Φ, *un point a de* M *et un point b de* $\bar{M}$ *tels que*:

(i) *la suite* $(\phi_p(x))$ *converge vers b pour tout* $x \in M \backslash \{a\}$, *la convergence étant uniforme sur tout compact de* $M \backslash \{a\}$;

(ii) *la suite* $(\phi_p^{-1}(y))$ *converge vers a pour tout* $y \in \bar{M} \backslash \{b\}$, *la convergence étant uniforme sur tout compact de* $\bar{M} \backslash \{b\}$.

Par une nouvelle application de la Proposition 3, on montre que l'existence d'une telle suite (ϕ_p) implique celle d'un homéomorphisme k-quasi-conforme de $M \backslash \{a\}$ sur (E^n, g_0); et, par prolongement, on en déduit l'existence d'un homéomorphisme k-quasi-conforme de M sur (S^n, g_0) (cf. demonstration du Théorème 8 dans [5b]); d'où le Théorème 2.

Notons que l'existence d'une suite de difféomorphismes conformes de (M, g) sur $(\bar{M}, \bar{g})$ vérifiant (i) et (ii) permettrait de montrer que (M, g) et $(\bar{M}, \bar{g})$ sont conformément plates. On en déduirait une démonstration "mixte" du Théorème 1 bis.

Constructions d'invariantes conformes. C'est pour préparer une démonstration du Théorème 1 que, dans [7] j'avais cherché à construire, sur les variétés riemaniennes non compactes, des métriques (au sens général) conformément invariantes. En fait il s'agit d'invariants globaux liés à la structure conforme de (M, g), et qui présentent par eux-mêmes un intérêt, même lorsque le groupe conforme de (M, g) se réduit à l'identité. J'en dirai donc ici quelques mots.

A chaque variété (M, g) de dimension n associons la classe $H^*(M)$ formée des fonctions numériques u, continues et ACL^n sur M, telles que:

(i) $I(u, M) = \int_M |\nabla u|^n \, d\tau < \infty$;

(ii) pour chaque partie ouverte, connexe et relativement compacte U de M, on ait:

$$\sup_{x \in \partial U} u(x) = \sup_{x \in U} u(x), \quad \inf_{x \in \partial U} u(x) = \sup_{x \in U} u(x).$$

Si la famille $H^*(M)$ sépare les points de M, on obtient une distance δ_M sur M en posant:

$$\delta_M(x,y) = \sup_{u \in H^*(M)} \frac{|u(x) - u(y)|}{(I(u, M))^{1/n}}.$$

Cette distance est (comme l'intégrale $I(u, M)$) invariante par déformation conforme de M; et la topologie qu'elle définit est moins fine que celle de (M, g): pour cette distance $C(M, g)$ est donc un groupe d'isométries.

Interprétation fonctionnelle des homéomorphismes conformes. Une autre méthode d'approche des transformations conformes consiste à leur associer des opérateurs linéaires.

A chaque variété (M, g) de dimension $n \geqq 2$ associons l'algèbre de Banach $A(M, g)$ formée des fonctions numériques continues et ACL^n sur M, vérifiant: $I(u, M) = \int_M |\nabla u|^n \, d\tau < \infty$ et tendant vers zéro à l'infini, pour la norme $\nu(u) = \|u\|_\infty + [I(u, M)]^{1/n}$.

Si $\phi : M \to \bar{M}$ est une application continue, notons ϕ^* l'application $\mathscr{C}(M) \to \mathscr{C}(M)$, $\nu \mapsto \nu \circ \phi$. On montre alors [6] que l'application $\phi \mapsto \phi^*$ definit une bijection de l'ensemble des homéomorphismes k-quasi-conformes $\phi : M \to \bar{M}$, sur l'ensemble des isomorphismes de norme $\leqq k$ de $A(\bar{M}, \bar{g})$ sur $A(M, g)$. Le groupe conforme $C(M, g)$ s'identifie donc à une partie de la sphère unité de $\mathscr{L}(A(M, g))$; et le problème qui se pose est de comparer les diverses topologies que l'on peut définir naturellement sur cet ensemble.

Problèmes de régularité. Pour faire le lien entre les méthodes d'analyse utilisées dans [5] et celles de la géométrie différentielle, il reste à prouver que tout homéomorphisme conforme d'une variété riemannienne de classe C^∞ sur une variété de classe C^∞ est lui-même de classe C^∞. L'historique du cas euclidien, que nous allons esquisser, montre que ce problème n'est pas trivial.

En 1850 Liouville prouvait que tout difféomorphisme conforme ϕ d'ouverts de (E^n, g_0) $n \geqq 3$ était la restriction d'une transformation de Möbius. Mais sa démonstration supposait implicitement ϕ de classe C^3; et à ma connaissance, ce n'est qu'en 1947 qu'il fut prouvé, par P. Hartman [3], qu'il suffisait de supposer ϕ de classe C^1: la démonstration de P. Hartman utilise les propriétés des systèmes différentiels elliptiques sur-déterminés.

En 1960, J.G. Resetnyak [11] prouve que tout homéomorphisme conforme d'ouverts de R^n est de classe C^3; et, en 1962 F.W. Gehring [2] donne une autre démonstration du même résultat: tous deux utilisent les propriétés des solutions d'équations elliptiques, mais la démonstration de Gehring utilise les extrémales de l'intégrale $\int |\nabla u|^n \, d\tau$, tandis que celle de Resetnyak est fondée sur des inégalités isopérimétriques et utilise la théorie du potentiel.

Aucune de ces démonstrations ne se généralise simplement aux variétés riemanniennes; mais l'étude du cas riemannien, bien que plus général, est facilitée par l'introduction de la fonction courbure scalaire. En effet, tout homéomorphisme conforme ϕ: $(M, g) \to (\bar{M}, \bar{g})$ peut être considéré comme une isométrie de $(M, |\phi'|^2 g)$ sur $(\bar{M}, \bar{g})$. Or, si u est de classe C^2 sur M, la courbure scalaire R_u de $(M, u^{4/(n-2)} g)$ est liée à la courbure scalaire R de (M, g) par

$$u^{4/(n-2)} R_u = R - 4 \frac{n-1}{n-2} \frac{\Delta u}{u}.$$

On peut donc s'attendre à ce que la fonction $u = |\phi'|^{(n-2)/2}$ admette au sens des distributions, un laplacien vérifiant:

$$\Delta u = \frac{n-2}{4(n-1)} (Ru - \bar{R} \circ \phi u^{(n+2)/(n-2)}) \tag{3}$$

ou $\bar{R}$ désigne la courbure scalaire de $(\bar{M}, \bar{g})$; et on en déduit que u (donc aussi ϕ) est de classe C^∞ : on peut en effet se ramener localement au cas où $R = \bar{R} = 0$, auquel cas $u = |\phi'|^{(n-2)/2}$ est harmonique. Cependant, une démonstration rigoureuse de (3) s'impose: ce sera l'objet d'un autre article.

On notera que la demonstration de Resetnyak consiste à prouver, par des considérations geómétriques, que, dans le cas euclidien, $|\phi'|^{(n-2)/2}$ est sous-harmonique.

Un problème ouvert. Convenons de dire qu'une application continue (non nécessairement bijective) $\phi: (M, g) \to (\bar{M}, \bar{g})$ est conforme si elle est ACL^n, si elle conserve l'orientation et si, pour presque tout $x \in M$, $\phi'(x)$ est une similitude (c'est une extension aux variétés riemanniennes de la notion d'application 1—quasi-régulière).

En 1967, Resetnyak [12] a pu montrer que toute application conforme d'un ouvert de (E^n, g_0) dans E^n était un homéomorphisme (donc la restriction d'une tıansformation de Möbius). Pour les variétés riemanniennes, le problème se pose donc de savoir s'il existe des applications conformes qui ne sont pas localement des difféomorphismes.

Le problème se pose également de savoir si, pour des variétés de classe C^1, tout homéomorphisme conforme est aussi de classe C^1.

Bibliographie

1. D. V. Alekseevski, *Groups of conformal transformations of Riemannian spaces*, Mat. Sb. **89** **(131)** (1972), 280–296 = Math. USSR Sb. **18** (1972), 285–301.

2. F.W. Gehring, *Rings and quasiconformal mappings in space*, Trans. Amer. Math. Soc. **103** (1962), 353–393. MR **25** #3166.

3. P. Hartman, *On isometries and on a theorem of Liouville*, Math. Z. **69** (1958), 202–210. MR **21** #7521.

4. N.H. Kuiper, *On conformally-flat spaces in the large*, Ann. of Math. (2) **50** (1949), 916–924. MR **11**, 133.

5a. J. Lelong-Ferrand, *Transformations conformes et quasiconformes des variétés riemannienne; application à la démonstration d'une conjecture de A. Lichnerowicz*, C.R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B **269** (1969), A583–A586. MR **40** #7989.

5b. ———, *Transformations conformes et quasiconformes des variétés riemanniennes compactes (démonstration de la conjecture de A. Lichnerowicz)*, Acad. Roy. Belg. Cl. Sci. Mém. Coll. in-8° (2) **39**, no. 5, (1971). MR **49** #1100.

6. ———, *Étude d'une classe d'applications liées à des homomorphismes d'algèbres de fonctions et généralisant les quasi conformes*, Duke. Math. J. **40** (1973), 163–186. MR **47** #4177.

7. J. Lelong-Ferrand, *Invariants conformes globaux sur les variétés riemanniennes*, J. Differential Geometry **8** (1973), 487–510.

8. ———, *Construction de modules de continuité dans le cas limite de Soboleff*, Arch. Rational Mech. Anal. **52** (1973), 297–311.

9. M. Obata, *The conjectures on conformal transformations of Riemannian manifolds*, Bull. Amer. Math. Soc. **77** (1971), 269–270. MR **42** #5286.

10. A.J. Ledger and M. Obata, *Compact Riemannian manifolds with essential groups of conformorphisms*, Trans. Amer. Math. Soc. **150** (1970), 645–651. MR **41** #7576.

11. Ju. G. Rešetnjak, *On conformal mappings of a space*, Dokl. Akad. Nauk SSSR **130** (1960), 1196–1198 = Soviet Math. Dokl. **1** (1960), 153–155. MR **22** #9935.

12. ———, *Liouville's conformal mapping theorem under minimal regularity hypotheses*, Sibirsk. Mat. Ž. **8** (1967), 835–840. (Russian) MR **36** #1630.

13. K. Yano and T. Nagano, *Einstein spaces admitting a one-parameter group of conformal transformations*, Ann. of Math. (2) **69** (1959), 451–461. MR **21** #345.

14. K. Yano and M. Obata, *Conformal changes of Riemannian metrics*, J. Differential Geometry **4** (1970), 53–72. MR **41** #6113.

UNIVERSITÉ DE PARIS VI
PARIS, FRANCE