MAURICE JANET

HARMONIQUES ET SPECTRES

IDÉES DE VOLTERRA. ÉQUATION DE FREDHOLM. ESPACE DE HILBERT

PHYSIQUE CLASSIQUE ET PHYSIQUE MODERNE

Les sons qui frappent nos oreilles proviennent de modes de vibrations infiniment variés des corps qui nous entourent. Ces divers modes peuvent plus ou moins coexister ; mais il peut se faire que l'un d'eux, simple, domine nettement tous les autres, et, de toutes façons, pour commencer à voir clair dans des phénomènes de cette complexité, il est bon d'examiner d'abord le cas d'un système matériel à un seul degré de liberté, c'est-à-dire dont la configuration à chaque instant peut être définie par un seul nombre : telle est la position d'un point sur une ligne droite donnée ; en admettant, comme il est naturel dans une première étude des phénomènes élastiques, que l'énergie potentielle soit proportionnelle au carré de la distance à la position d'équilibre (élongation), et d'autre part que la somme des énergies potentielle et cinétique se conserve, on aperçoit la loi du mouvement : oscillation sinusoïdale où le carré de la fréquence est en raison directe de la « rigidité » et en raison inverse de « l'inertie » (1) (les deux coefficients de rigidité et d'inertie étant les quotients constants respectivement de l'énergie potentielle et de l'énergie cinétique par les demi-carrés de l'élongation et de la vitesse). La même loi simple vaut naturellement pour bien d'autres phénomènes que ceux auxquels donne lieu l'élasticité matérielle ; si un condensateur se décharge à travers une bobine de gros fil conducteur de résistance négligeable, la charge électrique de chaque armature est une fonction sinusoïdale du temps ; aux facteurs de rigidité et d'inertie sont simplement substitués l'inverse de la

(1) Autrement dit, le point considéré est simplement soumis à une attraction d'un centre fixe proportionnelle à la distance ; son « coefficient d'inertie » est sa « masse ».

capacité du condensateur, et le coefficient de self induction de la bobine.

Imaginons maintenant un système matériel à plusieurs degrés de liberté, trois par exemple ; il sera nécessaire et suffisant, pour préciser sa configuration, de se donner trois nombres : tel serait un point matériel libre dans l'espace. Admettons que son énergie potentielle soit une fonction homogène et du second degré des coordonnées, définie positive, et que ici encore « le système soit conservatif ». Les éléments de l'analyse mathématique permettent de voir que son mouvement le plus général peut être considéré comme la *superposition* de trois mouvements oscillatoires simples de fréquences entièrement déterminées ; dans un de ces mouvements simples les trois coordonnées varient synchroniquement (avec la fréquence, seuls les rapports mutuels des trois amplitudes dépendent de la constitution du système ; le reste, coefficient d'amplitude et phase, dépendant des conditions initiales). La mise en évidence des trois « *fréquences fondamentales* » est ici la clef du problème. D'importantes propriétés « extrémales » peuvent servir à les caractériser. Disons seulement que la recherche des trois fréquences fondamentales d'un tel système vibrant est à rapprocher de la recherche des axes d'un ellipsoïde (1). Et des résultats tout analogues peuvent être immédiatement énoncés pour un système matériel présentant un nombre quelconque n de degrés de liberté.

C'est lorsqu'il ne suffit plus d'un nombre fini de paramètres pour caractériser le système matériel à étudier qu'un pas nouveau et décisif doit être franchi. Ce que nous continuerons à admettre, en revanche, c'est le caractère *linéaire* de la relation entre « force » et « déplacement », impliqué dans les hypothèses faites plus haut. Ce caractère *linéaire* aura un rôle essentiel dans la suite.

Pour définir à un instant déterminé la position d'une corde vibrante dans un plan, c'est toute une fonction d'une variable qu'il faut se donner. Qu'il s'agisse de corde, de membrane, de tuyau d'orgue, ou de tout autre système vibrant, ce sont des fonctions d'une ou de plusieurs variables spatiales que l'on aura comme inconnues. Et on passera d'un nombre fini à une *suite infinie* de fréquences fondamentales. C'est ce que montre l'exemple célèbre de la corde vibrante homogène fixée à ses deux extrémités (Daniel Bernoulli, 1741). Les fréquences fondamentales sont les multiples successifs de l'une d'elles ; les sons correspondants sont les « harmoniques » du premier. La superposition des solutions simples donne la solution générale du problème ; et ce fait peut être considéré comme le point de départ de toute la floraison de découvertes dont nous voulons parler (Fourier, 1811). Supposons encore qu'il s'agisse simplement d'une corde vibrante parfaite, mais n'admettons plus son homogénéité ; il va falloir mettre en évidence ses modes de vibrations synchrones, ce que les

(1) Algébriquement, il s'agit toujours de la réduction simultanée de deux formes quadratiques données à des formes « normales », c'est-à-dire dépourvues de « termes rectangles », les deux formes correspondant ici à l'énergie potentielle et à l'énergie cinétique du système.

physiciens appellent les *partiels*, et avant tout les fréquences de ces partiels qui bien entendu ont souvent été confondus de prime abord avec les harmoniques précédemment trouvés (1). Les lois classiques de la mécanique conduisent à exprimer qu'une certaine équation différentielle linéaire (sans « second membre ») dépendant d'un paramètre λ admet une solution, non identiquement nulle, satisfaisant à certaines conditions aux limites données. Un tel problème n'est possible que si λ a une des valeurs d'une certaine suite infinie discrète, dépendant à la fois de l'équation et des conditions imposées ; c'est la connaissance de ces valeurs remarquables de λ qui entraîne immédiatement celle des fréquences fondamentales. Qu'il s'agisse de vibrations mécaniques ou électromagnétiques, ou qu'il s'agisse de bien d'autres problèmes encore, c'est à des questions de ce genre que s'est vue sans cesse ramenée la physique au cours du XIXe siècle.

La démonstration mathématique de l'existence de la suite infinie des « valeurs fondamentales » (« valeurs propres », ou « autovaleurs »), a coûté de longs efforts ; il suffit pour s'en rendre compte d'énumérer quelques noms et quelques dates ; après les premiers essais de Sturm et Liouville (1838), c'est Schwarz qui, en 1885, parvient à démontrer l'existence de la première, Picard, en 1893, de la seconde, Poincaré, en 1894, de toutes. Il était réservé à Fredholm et à Hilbert de donner une forme pour ainsi dire parfaite à toute la théorie en la dominant du point de vue des « équations intégrales ». La méthode générale pour la résolution de telles équations avait été donnée dans un cas simple, en 1896, par Volterra qui depuis plusieurs années employait systématiquement dans ses recherches la méthode féconde de passage du fini à l'infini, du discontinu au continu (2).

Un problème préliminaire se pose, que l'on peut schématiser ainsi : la constitution d'un système matériel et les conditions aux limites étant données, comment la connaissance, au total, des forces élastiques permet-elle de passer à celle des déplacements ? Avant tout, les forces ne différant sensiblement de zéro que dans une petite région A, comment en déduire les déplacements dans une autre région B ? C'est le « coefficient

(1) Dans *Le Neveu de Rameau*, de Diderot (1762), on lit ces lignes quelque peu mystérieuses : « Pourvu que les cloches de sa paroisse continuent de résonner la douzième et la dix-septième, tout sera bien. » Quelle est cette énigme ? Pourquoi ces nombres et non pas d'autres ? Dans la gamme habituelle, les notes correspondant à des fréquences double, triple, quadruple, quintuple de celle de la tonique (ou note de rang 1) ont pour rangs 8, 12 15, 17. Laissant de côté la *huitième* et la *quinzième* comme trop banales (octave et double octave), le personnage en question songe naturellement à la *douzième* et à la *dix-septième*.

(2) On trouverait déjà des équations intégrales dans Laplace (1782) et dans Fourier. Abel (1823) a traité une équation intégrale célèbre. Liouville (1837) et Neumann (1870) ont donné une solution par approximations successives. A propos des idées de Volterra, on doit rappeler la méthode de Cauchy (publiée en 1844 et perfectionnée depuis par Lipschitz) pour établir l'existence des solutions des équations différentielles ordinaires, méthode dont Euler avait déjà donné un aperçu.

d'influence » ou « fonction de Green » qui permet de répondre à la question ; pour une répartition arbitrairement donnée des forces, il suffira de multiplier la « force » en A_i par le coefficient d'influence correspondant à A_i, puis d'additionner tous les résultats obtenus pour avoir le « déplacement » en B. De sorte que le problème préliminaire est résolu par une « intégrale » étendue à un champ déterminé portant sur un produit de deux fonctions dont l'une, le coefficient d'influence, contient le point B. Le coefficient d'influence a une remarquable propriété de symétrie : il ne change pas (1) quand on permute A et B.

Le problème préliminaire de la recherche de la « fonction de Green » étant supposé résolu, revenons à l'équation différentielle contenant le paramètre λ, dont il était question plus haut ; elle donnerait en somme, en fonction de λ et du « déplacement » l'expression de la force élastique correspondant au cas de ces mouvements privilégiés que nous cherchons à mettre en évidence. En utilisant cette expression même dans l'intégrale que l'on vient de définir, on obtiendra une équation où la fonction inconnue « déplacement » figurera linéairement, *par sa valeur en B tout d'abord*, mais aussi sous le signe d'intégrale, par *ses valeurs en tous les points A_i* du domaine considéré. C'est l'équation intégrale linéaire « de deuxième espèce », à limites fixes, à laquelle est désormais attaché le nom de Fredholm. Équation « sans second membre » d'ailleurs, et à « noyau symétrique » (2). Cette symétrie a une source algébrique évidente ; l'étude d'une forme quadratique à n variables conduit tout naturellement à lui attacher un tableau carré *symétrique* à n lignes et à n colonnes. Hilbert (3) s'est proposé essentiellement de généraliser la théorie des formes quadratiques au cas d'une infinité de variables, et il a obtenu une moisson de résultats merveilleusement abondante. En même temps, Fredholm (4) donnait pour l'équation intégrale de deuxième espèce, à limites fixes, à noyau symétrique ou non, avec ou sans second membre, des théorèmes définitifs. Il fait quelques hypothèses générales de régularité au sujet du « noyau » ; mais peu importe maintenant qu'il se soit agi d'une ou de plusieurs variables, que nous ayons eu affaire à une équation différentielle ordinaire ou à une équation aux dérivées partielles,

(1) Une illustration de ce fait est bien connue: pour une poutre maintenue horizontalement comme on voudra, le fléchissement qui se produit en un point B lorsqu'un poids est attaché en A est le même que celui qui se produirait en A si le même poids était attaché en B.

(2) Le « noyau » d'une équation intégrale linéaire étant cette fonction donnée de deux points qui caractérise essentiellement l'équation, à la manière dont un certain tableau de coefficients, à double entrée, caractérise un système banal d'équations algébriques linéaires. Le noyau est dit « symétrique » s'il dépend symétriquement des deux points considérés.

(3) Hilbert : *Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen* (1912 ; recueil de mémoires publiés de 1904 à 1910).

(4) Fredholm : *Acta Mathematica* (1903), exposé d'ensemble, un premier travail sur le sujet ayant été publié dès 1900.

peu importe l'origine (1), physique ou non, du problème ; la méthode de résolution est uniforme et les résultats généralisent directement ceux de la théorie élémentaire des systèmes d'équations linéaires. Deux cas sont à distinguer : ou bien λ n'annule pas une certaine fonction entière D (λ) dont Fredholm donne l'expression, et l'équation a une solution et une seule (fonction « méromorphe » de λ) ; ou bien λ annule D, et l'équation n'est possible que si le « second membre » satisfait à certaines conditions linéaires, en nombre fini, aisées à former. Il peut arriver que D (λ) n'ait aucun zéro. C'est une particularité remarquable des noyaux symétriques de donner toujours lieu à une valeur singulière au moins ; les valeurs singulières sont d'ailleurs alors toutes réelles ; et elles ne sont en nombre fini que pour des noyaux de forme particulière simple ; somme d'un nombre fini de produits de fonctions de l'une ou de l'autre variable (noyaux de Goursat) (2). La suite infinie des valeurs singulières de λ donne tout naturellement la suite des valeurs fondamentales rencontrées dans les problèmes physiques indiqués plus haut ; ce sont les « valeurs propres » ou « auto valeurs » ou encore le « spectre » du noyau donné. Pour chacune d'elles, l'équation sans second membre a un nombre fini de solutions linéairement indépendantes ; la suite infinie des solutions ainsi obtenues peut être considérée comme une suite « orthogonale et normale » ; toute fonction, satisfaisant seulement à certaines conditions générales de régularité, est développable en série procédant suivant ces fonctions ; c'est le théorème de Hilbert-Schmidt qui contient comme cas particulier le développement en série trigonométrique et ceux qui, plus ou moins isolément, avaient été trouvés depuis la célèbre découverte de Fourier. Valeurs fondamentales et solutions correspondantes permettent d'ailleurs de retrouver le noyau ; on obtient sous certaines hypothèses, sa forme canonique, ou « décomposition spectrale » ; chaque terme de la série infinie obtenue est le produit des valeurs prises par une fonction fondamentale pour l'une ou pour l'autre variable, divisé par la valeur fondamentale correspondante.

Mais les résultats les plus profonds de Hilbert concernent des cas où les théorèmes de Fredholm seraient impuissants. Hilbert part de l'étude d'un espace dont chaque point est défini par une *suite infinie* (3) de coordonnées telles que *la somme de leurs carrés converge*, et c'est le choix de cette restriction qui lui permet de fonder toute la théorie (4). Les formes

(1) Le célèbre problème aux limites relatif à l'équation de Laplace, appelé problème de Dirichlet, se trouve ramené à une équation de Fredholm par la simple recherche d'une « double couche » répartie sur la frontière donnée.

(2) Cas précisément fort important, car il permet grâce à un passage à la limite (utilisation de la notion de *famille* de fonctions *également* continues) de retrouver tous les résultats essentiels de la théorie (cf. *Mémorial des Sciences Mathématiques* (1941), fasc. 101 et 102).

(3) Le passage du fini à l'infini qu'utilisaient Volterra et Fredholm était en même temps un passage du discontinu au continu. Hilbert passe d'une *suite finie* à une *suite infinie*.

(4) Voir, à ce sujet, l'article de M. Dieudonné, page 294. (Note de F. LL.)

quadratiques à une infinité de variables pour lesquelles la somme des carrés des coefficients converge (formes dites « complètement continues ») peuvent se ramener à une forme canonique tout analogue à celle que l'on rencontre pour un nombre fini de variables ; la somme d'un nombre fini de termes est simplement remplacée par une série infinie, et l'application aux équations intégrales donne la « décomposition spectrale » indiquée plus haut. Les formes complètement continues sont « bornées » en ce sens que les formes finies constituées par leurs premiers termes (formes « tronquées ») restent inférieures en valeur absolue à un nombre fixe indépendant du rang de la troncature, lorsque la somme des carrés des coordonnées du point variable reste inférieure à l'unité, mais la réciproque n'est pas vraie, et l'étude des formes *bornées* non complètement continues conduit Hilbert à une forme canonique d'une espèce toute nouvelle ; à *la série* trouvée précédemment, il faut ajouter une intégrale (1) ; au spectre ponctuel, un spectre continu (le spectre ponctuel pouvant d'ailleurs alors disparaître complètement) (2). Ces belles découvertes éclairent profondément la théorie des équations intégrales « singulières » ; et les résultats connus antérieurement sur l'intégrale de Fourier illustrent à leur tour cette théorie nouvelle.

Revenons aux équations intégrales régulières (de Fredholm) et bornons-nous encore aux noyaux symétriques. Les « valeurs fondamentales » sont caractérisées par d'importantes propriétés extrémales qui apparaissaient déjà dans l'étude des systèmes vibrants les plus simples à plusieurs degrés de liberté. Si à un tel système, par liaisons linéaires surajoutées, on n'en laisse plus qu'un, le carré de sa fréquence se présente comme le rapport de deux formes quadratiques dont les coefficients proviennent respectivement, au dénominateur et au numérateur, de l'expression générale des énergies cinétique et potentielle du système donné. Les mouvements « fondamentaux » sont ceux qui rendent « stationnaire » une telle expression. Rayleigh, dans sa belle *Theory of Sound*, avait considéré le rapport analogue pour le cas d'un système continu tel qu'une corde vibrante. Hilbert et son école, Courant tout particulièrement, ont montré comment ce fait et ses analogues permettent de démontrer de la manière la plus directe et la plus claire non seulement l'existence des valeurs singulières des noyaux symétriques, mais aussi leurs propriétés les plus importantes (3).

Ces propriétés mettent aisément en évidence des faits généraux aux applications physiques nombreuses ; l'adjonction d'une contrainte, la diminution des facteurs d'inertie, l'augmentation des facteurs de rigidité,

---

(1) Au sens de Stieltjes.

(2) Cette circonstance se présente par exemple pour la forme $x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_3 x_4 + \ldots$ dont le spectre est constitué par l'ensemble des valeurs réelles de λ extérieures à l'intervalle $(-1, +1)$.

(3) Courant et Hilbert : *Methoden der Mathematischen Physik*. (1re éd. 1924, 2e éd. 1931).

ne peuvent tout au plus qu'augmenter, mais jamais diminuer, les hauteurs des partiels successifs du système vibrant (1). Ces mêmes propriétés permettent d'obtenir la loi de *répartition asymptotique* des valeurs fondamentales ; supposons une distribution homogène des facteurs de « rigidité » et « d'inertie » ; l'expression du nombre de fréquences fondamentales inférieures à une quantité donnée ne dépend pas, lorsque cette quantité devient grande, de la forme du domaine considéré, elle dépend seulement de son volume : résultat simple que Lorentz avait prévu à propos de la théorie du rayonnement (2). Ce sont enfin ces propriétés qui servent de fondement aux méthodes de calcul numérique que l'on a développées pour la recherche des valeurs fondamentales (Ritz) (3), et à celles qu'utilisent les ingénieurs dans les problèmes que leur pose effectivement l'usage des matériaux (4).

Mais il est remarquable que ce soit tout à fait d'un autre côté que soient venues dans ces dernières années les applications les plus éclatantes.

A l'époque même des travaux de Volterra, de Fredholm et de Hilbert, la physique marchait de découvertes en découvertes. Les lois de rayonnement du « corps noir » conduisaient Planck à l'hypothèse des quanta d'énergie ; et cette hypothèse entraînait peu de temps après, avec la théorie des « photons » d'Einstein, une sorte de retour à la théorie corpusculaire de la lumière qu'avait proposée autrefois Newton et que les mémorables découvertes de Fresnel et de Maxwell avaient fait abandonner au profit de la théorie ondulatoire. Poincaré a pu se demander un instant si la physique allait devoir renoncer à utiliser les équations différentielles. Pendant une vingtaine d'années, on a dû, suivant les phénomènes expérimentaux que l'on voulait expliquer, utiliser l'une ou l'autre des deux théories, qui semblaient contradictoires. La lumière semblait avoir une nature double, complètement paradoxale. Pour résoudre ces difficultés, presque simultanément, deux grandes conceptions différentes apparurent : l'une brillamment révélée par Louis de Broglie (1924), considérablement approfondie par Schrödinger (1926), trouve la solution en donnant à la matière elle-même une double nature ondulatoire et corpusculaire ; dans la simple étude du mouvement d'un point matériel, elle fait intervenir une équation aux dérivées partielles du genre de celle où avait

(1) C'est ainsi que si l'on fixe un point d'une corde vibrante, les fréquences dues au vibrations « normales » de l'une ou de l'autre partie constituent au total une suite dont les valeurs *séparent* celles de la suite primitive (Lord RAYLEIGH : *Th. of Sound*, tome I, 92 *a* 2e éd. (1929), p. 22, et VAN DEN DUNGEN : *Les problèmes généraux de la technique des vibrations*, 1928, p. 83.)

(2) LORENTZ : *Physikalische Zeitschrift*, 1910, p. 1248.

(3) Ch. KRYLOFF : *Les méthodes de solution approchée des problèmes de la Physique mathématique.*

(4) Ce n'est pas seulement à propos de phénomènes vibratoires que se posent des questions relevant des mêmes théories ; tel est par exemple le problème de ce qu'on appelle le « flambement » d'une tige comprimée longitudinalement, soit immobile, soit animée d'un mouvement de rotation autour de son axe.

conduit précédemment l'étude des cordes, membranes, ou autres systèmes vibrants complexes de la « vieille mécanique » ; et c'est la suite discontinue (1) des « valeurs propres » correspondantes qui donne tout naturellement la suite des *niveaux d'énergie* privilégiés que l'expérience avait révélés dans l'atome (2). L'autre conception, due à Heisenberg (1925), est en même temps plus abstraite et plus proche de l'expérience ; elle cherche à n'introduire dans les calculs que des grandeurs correspondant à une mesure physique possible ; elle est ainsi conduite à étudier des tableaux carrés infinis de nombres, des « matrices », à étudier au total des transformations linéaires dans l'espace de Hilbert. Et ici encore c'est un problème de « valeurs propres » qui se pose, valeurs propres qui déterminent les niveaux énergétiques. Ces deux théories semblent au premier abord bien différentes. En réalité elles sont équivalentes (Schrödinger, 1926). Et on peut, avec von Neumann (3), voir la raison essentielle de cette équivalence dans un fait remarquable (4) découvert en 1907 par F. Riesz : l'identité abstraite de l'espace de Hilbert et de celui des fonctions « de carré sommable ». Il est intéressant d'observer que pour qu'un tel résultat ait pu être découvert, il fallait qu'ait été dégagée la notion d'intégrale telle que Lebesgue l'a donnée en 1902 (5)...

L'équation de Fredholm, et avec elle les équations intégrales linéaires des diverses espèces, l'espace de Hilbert et d'autres espaces plus ou moins analogues, ont fait depuis le début du siècle l'objet d'un nombre de travaux considérable, où l'intégrale de Lebesgue est un outil d'usage courant. Carleman (6) est allé très avant dans l'étude des équations intégrales singulières ; von Neumann, partant d'une définition axiomatique de l'espace de Hilbert a obtenu une méthode intuitive qui conduit aisément à de nombreux résultats (7).

C'est de l'étude de la nature que sont issus les problèmes qui ont conduit les premiers aux équations intégrales ; l'étude de « l'acoustique » et des « vibrations » a été un guide précieux.

Mais les mathématiciens ont à juste titre largement usé de leur liberté pour accroître et développer la théorie. Méthodes analytiques et méthodes synthétiques, analogies algébriques et analogies géométriques ont été utilisées tour à tour. Pendant ce temps, les expériences de plus

---

(1) Au spectre discontinu doit s'adjoindre dans des cas importants un spectre continu (Schrödinger), remarquable illustration des résultats généraux de Hilbert.

(2) Le simple problème de « l'oscillateur harmonique linéaire », par où nous avons commencé cette étude, conduit à considérer la suite infinie de fonctions orthogonales à laquelle est attaché le nom d'Hermite.

(3) Von NEUMANN : *Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik*, 1932.

(4) Signalé en même temps, sous une forme un peu différente, par Fischer.

(5) Voir à ce sujet l'article de M. PERRIN sur LEBESGUE, ainsi que les passages correspondants des articles de M. M. VALIRON et DESANTI. (Note de F. LL.)

(6) CARLEMAN : *Equations intégrales singulières à noyau réel et symétrique*, 1923.

(7) Méthode peut-être moins puissante à l'heure actuelle que les méthodes analytiques de Carleman. (Cf. JULIA : *Introduction mathématique aux théories quantiques*, 1936.)

en plus nombreuses et de plus en plus fines des physiciens conduisaient à une conception nouvelle qui s'est trouvée avoir juste à point dans la théorie constituée son instrument essentiel. Les efforts de ceux qui semblaient cultiver pour elle-même la théorie des ensembles, comme les efforts de ceux qui observaient et expérimentaient dans les laboratoires, convergeaient obscurément vers une œuvre commune. La théorie des équations intégrales linéaires et celle de l'espace de Hilbert se prolongent actuellement dans des directions très variées. A l' « Analyse fonctionnelle » (1), l'avenir réserve sans doute de riches développements ; il est permis de penser qu'ils pourront naître de cette vraie philosophie mathématique (2) qui consiste surtout à « sentir profondément la relation intime et continue de l'abstrait au concret ».

MAURICE JANET,
Professeur à la Sorbonne.

(1) Cf. VOLTERRA et PÉRÈS : *Théorie générale des fonctionnelles*, 1936.
(2) Léon BRUNSCHVICG : *Les étapes de la philosophie mathématique.*