Trois extraits du cours de Jean-Yves Girard sur les algèbres d'opérateurs

[*en bas de la page 2*]

1.3.1 Dimension finie

L'exemple le plus naturel vient de la géométrie euclidienne, l'espace de Hilbert n'étant qu'un espace euclidien complexifié : au lieu de $\mathbb{R}^n$, on considère $\mathbb{C}^n$, muni de $\langle\vec{x}|\vec{y}\rangle = \sum_{1\leq i\leq n} x_i.\overline{y_i}$. La complexification permet de diagonaliser les rotations en résolvant l'équation $\det(M-\lambda I)=0$, par exemple, pour une rotation d'angle α, $(\cos\,\alpha-\lambda)^2+\sin^2\alpha=0$, i.e., $\lambda^2-2\lambda\cos\alpha+1=0$, équation qui n'a de racines réelles que pour $\cos\,\alpha=\pm1$: les solutions complexes sont $\cos\,\alpha\pm i\sin\,\alpha$, et correspondent aux vecteurs propres $\sqrt{2}/2.(1,\pm i)$. L'involution sur la partie droite évite les vecteurs isotropes, i.e., de "norme" nulle : comparer l'interprétation euclidienne (bilinéaire)

$$\langle\sqrt{2}/2.(1,i)|\sqrt{2}/2.(1,i)\rangle = 1/2.(1+i^2) = 0$$

avec la version hermitienne (sesquilinéaire [1])

$$\langle\sqrt{2}/2.(1,i)|\sqrt{2}/2.(1,i)\rangle = 1/2.(1+i.(-i)) = 1.$$

Il ne s'agit pas, loin s'en faut, de la seule façon de construire un espace de Hilbert sur $\mathbb{C}^n$. On peut chercher la forme générale : si $\{e_1,\ldots,e_n\}$ est la base canonique, on peut poser $b_{ij}:=\langle e_i|e_j\rangle$; la condition (3) devient $b_{ij}=\overline{b_{ji}}$, i.e. la matrice (b_{ij}) est hermitienne, égale à sa transconjuguée, quant à la condition (4), elle dit que les racines du polynôme caractéristique de (b_{ij}) (qui sont nécessairement réelles) sont strictement positives ; en d'autres termes, (b_{ij}) est un hermitien strictement positif.

Il s'agit en fait d'une remarque générale : si $\mathcal{H}$ est un espace de Hilbert et si u est un hermitien positif, voir plus bas, $\langle u(x)|y\rangle$ définit une autre structure d'espace préhilbertien sur $\mathcal{H}$. L'espace est hilbertien par rapport à la nouvelle forme quand u est inversible.

[*bas de la page 15*]

3.4 Petite taxinomie des opérateurs

Les éléments d'une algèbre stellaire, et donc les opérateurs sur un Hilbert, sont principalement étudiés en fonction de leur relation à leur propre adjoint. Voilà les cas les plus typiques :

- **Normal** : se dit d'un opérateur qui commute à son adjoint : $uu^*=u^*u$. Alors l'algèbre stellaire engendrée par u est commutative et u possède une espèce de "diagonalisation". Parmi les opérateurs normaux se trouvent les hermitiens et les unitaires.
- **Unitaire** : se dit d'un opérateur u d'inverse u^*, i.e., tel que $uu^*=u^*u=I$. Ce sont les isométries de $\mathcal{H}$, car $\langle u(x)|u(y)\rangle = \langle x|u^*u(x)\rangle = \langle x|y\rangle$, et ils forment donc un groupe. Le

Référence : http://recherche.ircam.fr/equipes/repmus/mamux/AlgOpGirard.pdf.

Denise Vella-Chemla, janvier 2026.

1. Le préfixe latin "*sesqui*" signifie "un et demi".

spectre d'un unitaire est inclus dans le cercle $\mathcal{U} = \{z\ ;\ |z| = 1\}$. C'est évident, car $\|u\| = 1$ (à cause de $\|uu^*\| = \|u\|^2$) et donc $\mathrm{Sp}(u)$ est inclus dans le disque unité $\mathcal{D}$; il en est de même de $\mathrm{Sp}(u^*) = \mathrm{Sp}(u)^{-1}$, ce qui montre que $\mathrm{Sp}(u) \subset \mathcal{D} \cap \mathcal{D}^{-1} = \mathcal{U}$.

- **Hermitien** : (ou auto-adjoint) se dit d'un opérateur u égal à son adjoint, en d'autres termes tel que $\langle u(x)|x\rangle$ soit réel pour tout x. Le spectre d'un hermitien est réel (voir infra), et les bornes extrêmes de son spectre sont les réels $\sup\{\langle u(x)|x\rangle\ ;\ \|x\| = 1\}$ et $\inf\{\langle u(x)|x\rangle\ ;\ \|x\| = 1\}$. L'hermitien typique (c'est même un théorème, tout hermitien s'écrit ainsi) est une somme $u + u^*$.
- **Symétries** : se dit d'un hermitien unitaire, i.e., tel que $u = u^* = u^{-1}$. Son spectre est inclus dans $\{-1, +1\}$, et de fait on peut "diagonaliser" u comme la différence des projecteurs (voir infra) $(I + u)/2$ (espace propre de $+1$) et $(I - u)/2$ (espace propre de -1).
- **Projecteur** : se dit d'un hermitien idempotent : $u = u^* = u^2$. Son spectre est inclus dans $\{0, +1\}$, et u correspond à une projection orthogonale sur un sous-espace clos, l'image de u.
- **Hermitien positif** : se dit d'un hermitien tel que $\langle u(x)|x\rangle \geq 0$ pour tout x. Les hermitiens positifs sont particulièrement importants, car la structure d'ordre de $\mathbb{R}$ supplée aux défaillances de la topologie, par exemple dans les questions de convergence de séries. Les hermitiens positifs ont un spectre inclus dans $\mathbb{R}^+$. L'hermitien positif typique (c'est encore un théorème, ils sont tous de cette forme) est un produit uu^*, on peut même supposer u hermitien, et, mieux, u lui-même positif : le fait capital est qu'un hermitien positif a une racine carrée.

L'analogie courante est la suivante : les opérateurs sont une version "non-commutative" de leur spectre, autrement dit, les hermitiens sont les "réels non-commutatifs", les unitaires jouant le rôle des arguments complexes $e^{i\theta}$, et d'ailleurs, la décomposition polaire (infra) exprime tout opérateur comme le produit d'un module (hermitien positif) et d'une isométrie (partielle, cependant).

[*bas de la page 23, haut de la page 24*]

$\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est isomorphe à $\mathcal{B}(\mathbb{C}^n)$ (*Note : ici, à confirmer, $\mathcal{B}$ signifie "algèbre stellaire simple sur ..." (i.e. algèbre sans idéal bilatère fermé autre que $\mathcal{B}$ et 0)*), l'adjoint correspondant à la transconjuguaison (transposition + conjugaison). En dimension infinie, $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ contient un unique idéal bilatère clos non trivial : celui des opérateurs compacts, voir infra.

La fonction φ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ qui remplace chaque coefficient a_{ij} par une matrice de taille $m \times m$ formée de coefficients tous égaux à a_{ij} sur la diagonale, nuls en dehors, est un *-isomorphisme. Si $n_0 < n_1 < \ldots < n_k < \ldots$ est une suite croissante d'entiers dont chacun divise le suivant, on obtient ainsi un système direct d'algèbres stellaires. Ce système admet une limite directe algébrique munie d'une (unique) norme stellaire, ce qui permet de le compléter pour en faire une algèbre stellaire, la limite directe du système. On peut classer les algèbres ainsi obtenues par l'exposant de chaque nombre premier dans la suite n_k (un entier ou ∞), ce qui permet de les caractériser à isomorphisme près. L'exemple le plus courant est celui de $n_k := 2^k$, ce qui donne les exposants : ∞ pour 2, 0 pour $p > 2$, ce qu'on écrit 2^∞ (algèbre CAR). Mais on pourrait tout aussi bien construire une algèbre correspondant à $3^\infty \cdot 5^2 \cdot 11^\infty$, ou encore à $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \ldots$

Paragraphe "Géométrie non-commutative" extrait de *La logique comme géométrie du cognitif, Manifeste* [2]

9. La géométrie non-commutative

Ce constat est rendu un peu obsolète par la géométrie non-commutative. L'exemple classique est celui d'un tore, i.e., une chambre à air mathématique ; si on le découpe aux ciseaux en suivant une orientation constante, le résultat va dépendre de l'angle d'attaque s'il est mal choisi (cas le plus courant), on n'en finit plus de redécouper le tore en une lanière de plus en plus fine ; en d'autres termes on crée une trajectoire dense, i.e., qui semble passer partout, alors que ce n'est pas une "courbe de Peano". Comme si le tore était "trop serré", comme s'il manquait de points. Mais on ne peut pas trouver les "points manquants", et c'est l'idée même de tore-ensemble qu'on doit remettre en cause, par l'introduction des tores non-ensemblistes, "non-commutatifs", dit Connes. Techniquement parlant, un tore au sens habituel peut être appréhendé au moyen de l'espace de ses fonctions "lisses", qui est une algèbre commutative. Si on oublie la commutativité, les algèbres restent manipulables, mais ne proviennent plus d'une "vraie" variété comme le tore, elles ne sont plus "réifiables".

Cet exemple devrait suffire à nous convaincre qu'on assiste à une véritable expulsion des ensembles et au début d'une nouvelle approche fondationnelle, en harmonie avec le miracle quantique. À vrai dire, Groethendieck en son temps avait déjà voulu expulser les ensembles au profit des catégories : malheureusement ses topoi sont "réifiables", i.e., ils ont quand même un substrat ensembliste "naturel", ce qu'on ne saurait trouver pour les algèbres d'opérateurs.

Mais quid du commutatif ? Des opérateurs commutent quand ils sont tous "diagonaux" dans une "base"[3] commune. Le non-dit commun à la logique, à la théorie des ensembles, aux catégories, c'est l'accord implicite sur une telle "base". Tout ce beau monde, ensembles, éléments, preuves, modèles, langage, objets, morphismes, fonctions, arguments... "commute". On ne s'accorde sur rien, sauf sur cette base, "arène" ensembliste, où tout se joue, tout se mesure. Tout le monde est donc calé sur les mêmes repères, mais imaginons un choc et que les gyroscopes se décalent... Les questions ne tombent plus pile sur leurs réponses, les billes dans leurs cases. Pourtant, si la logique est aussi augustinienne que le monde physique, l'interaction a lieu malgré son absence de statut formel. En physique, on sait qu'elle se fait au moyen de la réduction du paquet d'ondes. Voilà ce qu'il faut importer en logique pour pimenter le relation objet/sujet !

2. Référence : http://repmus.ircam.fr/_media/mamux/documents/girard-logique-2004.pdf
3. Caractérisations d'algèbres commutatives comme espaces $\mathcal{C}(X)$ ou $\mathcal{L}^\infty(X, \mu)$.