Traduction des extraits du livre de Connes et Marcolli dans lequels on trouve des occurrences du théorème du point fixe de Lefschetz

DVC : On aimerait adapter à notre contexte des "carrés de Goldbach"[1] *les éléments trouvés dans le paragraphe* Fonctions zêta *retranscrit ci-dessous, mais on n'a pas du tout idée de la cohomologie qu'il faudrait prendre sur les carrés en question : sur le bord, on se dit qu'il faut forcément mettre les écarts entre premiers, mais on ne sait pas quelle doit être la règle de propagation d'un étiquetage des bords vers les sommets intérieurs du carré, et qui assurerait qu'il existerait un point fixe sur la diagonale*[2].

8.1.3 *Fonctions zêta.* Une autre donnée importante qui a contribué à l'origine des motifs est la question du comptage des points de variétés sur des corps, et sa généralisation aux fonctions L appliquées à des variétés.

Étant donnée une variété X définie sur un corps fini $\mathbb{F}_q$, avec $q = p^\ell$ pour un certain nombre premier p, on veut compter les points de X sur les corps $\mathbb{F}_{q^n}$. Il est naturel d'introduire une fonction génératrice pour les nombres $N_n = \#X(\mathbb{F}_{q^n})$ de la forme :

$$\log Z_X(t) = \sum_n \frac{N_n}{n} t^n. \tag{1.374}$$

Les nombres N_n ont une interprétation comme nombres d'intersections de la diagonale de $X \times X$ avec la correspondance donnée par le graphe de la n^{ieme} puissance Fr_X^n de l'endomorphisme de Frobenius induit par la transformations $x \mapsto x^q$ sur l'algèbre des fonctions sur X. Ainsi la question du calcul de tels nombres d'intersections peut être vue comme une question naturellement formulée dans la catégorie des motifs à une équivalence numérique près.

Dans le contexte topologique, la question du comptage du nombre de points fixes isolés d'une application (les intersections de son graphe avec la diagonale) peut être traitée efficacement en utilisant la formule du point fixe de Lefschetz, ce qui fournit du problème la formulation topologique

$$\#\mathrm{Fix}(f) = \sum_i (1)^i \,\mathrm{Tr}(f^* \mid H^i(X)). \tag{1.375}$$

où $f^* \mid H^i(X)$ est l'action de l'application induite sur la cohomologie.

André Weil a été un pionnier pour utiliser cette méthode dans le cas du comptage des points $X(\mathbb{F}_{q^n})$. En fait, si on dispose d'une théorie de la cohomologie adéquate H^* pour les variétés algébriques sur les corps finis pour laquelle une version de la formule du point fixe de Lefschetz s'applique, alors on peut reformuler le comptage de $N_n = \#X(\mathbb{F}_{q^n})$ en fonction d'une formule de Lefschetz pour l'endomorphisme de Frobenius ainsi :

Retranscription en LaTeX : Denise Vella-Chemla, mars 2026.

1. Voir lien1 ou lien2.
2. Tout ça est insurmontable, on va revenir aux textes sources de Lefschetz, Hopf, et Whitney pour voir si cela permettrait de mieux comprendre leurs idées.

$$N_n = \sum_i (-1)^i \operatorname{Tr}((\mathrm{Fr}_X^n)^* \mid H^i(X)), \tag{1.376}$$

de telle façon que la fonction $Z_X(t)$ peut s'exprimer sous la forme

$$Z_X(t) = \prod_{i=0}^{2\dim X} \det(1 - t\,\mathrm{Fr}_X^* \mid H^i(X))^{(-1)^{i+1}}. \tag{1.377}$$

On peut avoir un premier aperçu de la raison de la décomposition sous la forme d'un produit sur les groupes de cohomologie $H^i(X)$ pair ou impair de la fonction zêta en envisageant cette décomposition comme un phénomène motivique qui vient de la formule très simple

$$\#\mathbb{P}^n(\mathbb{F}_q) = 1 + q + q^2 + \ldots + q^n,$$

qu'on peut voir comme une manifestation du fait que la variété $\mathbb{P}^n$ a une décomposition dans la catégorie des motifs de la forme

$$h(\mathbb{P}^n) = 1 \oplus L \oplus L^2 \oplus \ldots \oplus L^n,$$

où 1, également noté $\mathbb{Q}(0)$, est le motif d'un point, et où L est le motif de Lefschetz, qui se note aussi $\mathbb{Q}(-1)$. C'est le motif $L = h^2(\mathbb{P}^1)$. Ainsi, on pense en général à la décomposition sous la forme d'un produit de (1.377) comme à la décomposition motivique

$$Z_X(t) = \prod_{i=0}^{2\dim X} L(h^i(X), t)^{(-1)^{i+1}},$$

en les L-facteurs $L(h^i(X), t)$ associés aux motifs $h^i(X)$.

Il est également fait mention de la formule de trace de Leschetz dans l'article de Alain Connes, Caterina Consani et Matilde Marcolli, *The Weil Proof and the Geometry of the Adèles Class Space*, paru à l'occasion des 70 ans de Yuri Manin p. 339, dans Y. Tschinkel and Y. Zarhin (eds.), Algebra, Arithmetic, and Geometry, 339, Progress in Mathematics 269.

La version initiale arXiv est consultable ici https://arxiv.org/pdf/math/0703392.

On réalise qu'il est question de formule de Lefschetz dans les premiers articles de Caterina Consani, comme

- https://arxiv.org/pdf/math/9801080,
- https://arxiv.org/pdf/math/0207059
- ou https://arxiv.org/pdf/math/0512138.