Annexe 1 : extrait du Mémoire sur la théorie des nombres de Libri qui explique comment trouver les solutions entières d'une équation

limite n. Il faut remarquer surtout que les coefficiens des variables x, y, z, ... etc., dans le développement en série de l'intégrale qui forme le premier membre de l'équation (13.), sont tels qu'en calculant un certain nombre de termes, il ne reste à peu près que ce qu'il faut pour donner le nombre des solutions de l'équation proposée. C'est de cette considération, et de l'examen attentif de la nature de ces coefficiens (qui s'expriment aussi par des intégrales définies) que l'on pourrait déduire des considérations qui jetteraient beaucoup de lumière sur la marche de la fonction représentée par la formule (13.): mais ces recherches ne sauraient trouver place ici, et nous les exposerons dans un travail particulier.

Cet aperçu suffirait déjà pour montrer de quelle manière on pourrait réduire la théorie des nombres à l'analyse ordinaire: mais nous allons reprendre maintenant cette question dans toute sa généralité.

Étant proposée une équation à plusieurs inconnues à résoudres en nombres rationnels, fractionnaires ou entiers, on pourra toujours la préparer de manière que tous les nombres cherchés doivent être entiers et positifs: puisqu'en général, si l'équation proposée est de la forme

$$\varphi(x, y, z, \ldots \text{ etc.}) = 0,$$

et que l'on cherche pour x, y, z, ... etc., des valeurs fractionnaires, en faisant

$$x = \frac{x_1}{x_2}, \quad y = \frac{y_1}{y_2}, \quad z = \frac{z_1}{z_2}, \ldots \text{ etc.},$$

on aura l'équation

$$\varphi\left(\frac{x_1}{x_2}, \frac{y_1}{y_2}, \frac{z_1}{z_2}, \ldots \text{ etc.}\right) = 0,$$

dans laquelle il ne faudra chercher pour

$$x_1, x_2, y_1, y_2, z_1, z_2, \ldots \text{ etc.},$$

que des valeurs entières: et d'ailleurs s'il y avait des solutions négatives on les obtiendrait en changeant les signes des variables. Nous supposerons par conséquent que ces réductions soient toujours effectuées dans les équations dont nous chercherons la résolution.

Soit proposé de résoudre en nombres entiers et positifs l'équation

$$\varphi(x, y, z, \ldots \text{ etc.}) = 0$$

que nous représenterons comme auparavant par $\varphi = 0$. Avec les méthodes connues on s'arrête là, et on tâche de résoudre cette équation en s'aidant de la forme particulière de ses coefficiens. Mais l'équatiou $\varphi = 0$, exprime seulement les relations qui doivent exister entre les inconnues, et n'indique pas que ces inconnues ne doivent recevoir que des valeurs entières et positives: pour exprimer cette dernière condition l'on supposera d'abord que l'on veuille trouver toutes les solutions qui s'obtiennent en donnant à x des valeurs moindres qu'une limite donnée a; à y des valeurs plus petites que b; à z des valeurs moindres que c; et ainsi de suite: $a, b, c, \ldots.$ etc., étant des nombres entiers et positifs. Il est clair qu'à cet effet l'on devra donner à $x, y, z, \ldots.$ etc., toutes les valeurs comprises dans les séries

$$\begin{aligned} x &= 0,\ 1,\ 2,\ 3, \ldots\ldots\ldots\ a-1; \\ y &= 0,\ 1,\ 2,\ 3, \ldots\ldots\ldots\ b-1; \\ z &= 0,\ 1,\ 2,\ 3, \ldots\ldots\ldots\ c-1; \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ \text{etc.}; \end{aligned}$$

et faire toutes les combinaisons possibles dans l'équation $\varphi = 0$. On observera que toutes ces valeurs de x se trouveront parmi les racines de l'équation

$$X = x(x-1)(x-2)\ldots..(x-(a-1)) = 0;$$

et que de mêmes les valeurs de y et de z seront comprises parmi les racines des équations

$$\begin{aligned} Y &= y(y-1)(y-2)\ldots..(y-(b-1)) = 0; \\ Z &= z(z-1)(z-2)\ldots..(z-(c-1)) = 0; \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ \text{etc.} \end{aligned}$$

Les équations précédentes expriment les conditions que x soit un nombre entier positif moindre que a; que y soit un nombre entier positif moindre que b; et ainsi de suite. Ces équations dont le nombre est égal à celui des inconnues, étant combinées avec l'équation $\varphi = 0$, fournissent toutes les conditions du problème; de manière qu'ayant un nombre total d'équations qui surpasse de l'unité le nombre des inconnues, le problème sera plus que déterminé; en éliminant successivement toutes les inconnues entre ces équations, on aura une autre équation de condition $F = 0$, qui comprendra les limites $a, b, c, \ldots.$ etc., assignées aux variables, et les coefficiens de l'équation proposée; et qui exprimera la relation qui doit exister entre ces quantités afin que le problème soit résoluble. Lorsque l'équation de condition sera satisfaite, et que l'on sera assuré que l'équation proposé peut être résolue, on reprendra l'une des équations à une seule inconnue que l'on a obtenues par l'élimination avant de parvenir à l'équation $F = 0$. Soit $X_1 = 0$, cette équation en x seul;

en cherchant le plus grand diviseur commun entre $X = 0$, et $X_1 = 0$, on aura une équation de la forme $X_2 = 0$, qui ne contiendra que l'inconnue x, et dont le degré sera égal au nombre des valeurs de x qui satisfont à l'équation proposée; et en résolvant l'équation $X_2 = 0$, on aura toutes les valeurs de x qui satisfont à l'équation $\varphi = 0$. On pourrait trouver de même les valeurs des autres inconnues, qui résolvent l'équation proposée; et l'on voit que ce principe s'applique encore à la recherche directe des racines rationnelles d'une équation à une seule inconnue; car ce problème aussi dépend de la théorie des nombres.

Avec la méthode que nous venons d'indiquer, on a seulement les racines inégales; mais s'il y a des racines égales, elles peuvent se trouver avec facilité de la manière suivante. Nous supposerons d'abord, pour simplifier la question, qu'il s'agisse d'une équation à deux inconnues seulement; puisque la méthode est absolument la même lorsque le nombre des variables est plus grand.

Maintenant soit proposé de résoudre en nombres rationnels l'équation

$$\varphi(x, y) = 0;$$

et supposons que n valeurs rationnelles de $x = a$, correspondent à une seule valeur rationnelles de $y = b$; (n étant un nombre plus grand que l'unité) en différentiant l'équation proposée par rapport à x, et cherchant le plus grand commun diviseur Δ, entre

$$\frac{d.\varphi(x, y)}{dx} \quad \text{et} \quad \varphi(x, y),$$

on aura $\Delta = F(x, y)$, et il y aura un reste $R = f(y)$ qui ne contiendra plus x, et qui par supposition devra se réduire à zéro. Si l'on fait par conséquent $f(y) = 0$, on cherchera les racines rationnelles $y = b$, $y = b_1$, $y = b_2$, ... etc., de cette équation, lorsqu'il en existe, et en substituant successivement b, b_1, b_2, ... etc., pour y dans l'expression de Δ on aura les équations

$$F(x, b) = 0; \quad F(x, b_1) = 0; \quad F(x, b_2) = 0; \; \ldots . \; \text{etc.}$$

que l'on tâchera de réduire à la forme $(x - a)^{n-1} = 0$; et on trouvera de cette manière les valeurs multiples de x que l'on cherche.

Si l'on avait identiquement $R = 0$, on trouverait l'équation

$$\Delta = F(x, y) = (x - \psi(y))^{n-1} = 0,$$

qui devrait exister en même tems que l'équation $\varphi(x, y) = 0$, et qui en serait un facteur: l'on ne pourrait donc pas déterminer de cette manière