XXXI.

Bemerkungen über die Reduction der vollen elliptischen Integrale zweiter Gattung auf die vollen elliptischen Integrale erster Gattung für denselben Modul.

Von

E. Meissel.

Abdruck aus dem Programm der Realschule in Kiel.

Auf den Wunsch einiger mathematischen Freunde habe ich mich entschlossen, die folgenden Untersuchungen hier zu veröffentlichen.

Es sei

$$\varDelta\varphi = \sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}; \quad F(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\varDelta\varphi}; \quad E(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \varDelta\varphi\, d\varphi$$

so erhält man bekanntlich durch die Transformation der $n$ten Ordnung

$$(1) \qquad \left\{ \begin{aligned} F(\lambda) &= AF(k) \\ F\sqrt{1-\lambda^2} &= \frac{A}{n} F\sqrt{1-k^2} \end{aligned} \right.$$

In diesen Gleichungen ist λ der transformirte Modul, den wir als eine Function von k ansehen werden; während der Factor A, welcher gleichfalls von k abhängig ist, mit Hülfe der Modulargleichung zwischen λ und k aus der Beziehung

$$A^2 = \frac{n(k-k^3)}{\lambda-\lambda^3}\cdot\frac{d\lambda}{dk} \tag{2}$$

gefunden werden kann.

Die Gleichung (2) leitet man aus der Verbindung von (1) mit den Gleichungen

$$d\left(\frac{F\sqrt{1-k^2}}{Fk}\right) = -\frac{\pi}{2}\cdot\frac{dk}{(k-k^3)F^2(k)}$$

$$d\left(\frac{F\sqrt{1-\lambda^2}}{F\lambda}\right) = -\frac{\pi}{2}\cdot\frac{d\lambda}{(\lambda-\lambda^3)F^2(\lambda)}$$

her, wie dieses Jacobi in den Fundamentis novis p. 75 gleichfalls getan hat.

In den vorstehenden Gleichungen (1) und (2) ist n eine ganze positive Zahl, welche den Ordnungsexponenten der angewandten Transformation darstellt. — Leicht lässt sich zeigen, dass diese Gleichungen noch gültig bleiben, wenn n gleich einer gebrochenen positiven Zahl wird. Denn durch eine Transformation $m$ter Ordnung würde man erhalten

$$F(\lambda) = A_1 F(\mu)$$

$$F\sqrt{1-\lambda^2} = \frac{A_1}{m}F\sqrt{1-\mu^2}; \qquad A_1{}^2 = m\frac{(\mu-\mu^3)}{\lambda-\lambda^3}\cdot\frac{d\lambda}{d\mu}$$

und durch Verbindung dieser Gleichungen mit (1) und (2) zu den Resultaten gelangen:

$$F(\mu) = \frac{A}{A_1}.F(k); \qquad F\sqrt{1-\mu^2} = \frac{m}{n}\cdot\left(\frac{A}{A_1}\right)F\sqrt{1-k^2}$$

$$\left(\frac{A}{A_1}\right)^2 = \frac{n}{m}\cdot\frac{k-k^3}{\mu-\mu^3}\cdot\frac{d\mu}{dk}$$

Man sieht hieraus, dass die Gleichungen (1) und (2) bestehen bleiben, selbst wenn man n gleich einer beliebigen positiven rationalen Zahl setzt. Nur sind in diesem Falle zwei Transformationen anzuwenden, deren Ordnungsexponenten dem Nenner und Zähler der gebrochenen Zahl n beziehlich gleich werden.

Nun differentiire man die Gleichungen (1) nach k und benutze die bekannten Relationen:

$$F'(k) = \frac{E(k)}{k - k^3} - \frac{F(k)}{k}$$

$$E'(k) = \frac{E(k)}{k} - \frac{F(k)}{k}$$

sowie die Gleichungen (1) und (2); dann ergeben sich leicht die beiden folgenden Gleichungen:

$$E(\lambda) = \frac{n}{A} E(k) - \left[(k - k^3) \frac{d\left(\frac{n}{A}\right)}{dk} + \frac{n}{A}(1 - k^2) - A(1 - \lambda^2) \right] F(k)$$

$$E\sqrt{1-\lambda^2} = \frac{1}{A} E\sqrt{1-k^2} + \left[(k - k^3) \frac{d\left(\frac{n}{A}\right)}{dk} - \frac{n}{A} k^2 + A\lambda^2 \right] \cdot \frac{F\sqrt{1-k^2}}{n}$$

Durch Zusammenstellung erhält man demnach:

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} \left. \begin{array}{l} F(\lambda) = AF(k) \\ F\sqrt{1-\lambda^2} = \frac{A}{n} F\sqrt{1-k^2} \end{array} \right\} \text{mit der entsprechenden algebraischen Modular-Gleichung zwischen } k \text{ und } \lambda. \\ A^2 = n \cdot \frac{k - k^3}{\lambda - \lambda^3} \cdot \frac{d\lambda}{dk} \\ E(\lambda) = \frac{n}{A} E(k) - BF(k) \\ E\sqrt{1-\lambda^2} = \frac{1}{A} E\sqrt{1-k^2} + \left(\frac{A+B}{n} - \frac{1}{A} \right) F\sqrt{1-k^2} \\ \text{wenn gesetzt wird:} \\ B = (k - k^3) \cdot \frac{d\left(\frac{n}{A}\right)}{dk} + \frac{n}{A}(1 - k^2) - A(1 - \lambda^2) \end{array} \right.$$

Differentiirt man nun die Gleichungen

$$E(\lambda) = \frac{n}{A} E(k) - BF(k)$$

$$E\sqrt{1-\lambda^2} = \frac{1}{A} E\sqrt{1-k^2} + \left(\frac{A+B}{n} - \frac{1}{A} \right) F\sqrt{1-k^2}$$

abermals nach k und benutzt die vorher angegebenen Relationen, so gewinnt man eine neue Beziehung zwischen A, B, λ, nämlich:

$$\frac{A^2(A+B)}{n}(1 - \lambda^2) = \left(\frac{n}{A} - B \right)(1 - k^2) + (k - k^3) \frac{dB}{dk}$$

so dass überhaupt zwischen diesen drei Grössen und dem Modul k folgende Gleichungen bestehen:

$$(4)\quad \begin{cases} A^2(\lambda-\lambda^3) = n(k-k^3)\dfrac{d\lambda}{dk} \\[2ex] B = \dfrac{n}{A}(1-k^2) - A(1-\lambda^2) + (k-k^3)\cdot\dfrac{d\left(\frac{n}{A}\right)}{dk} \\[2ex] (k-k^3)\dfrac{dB}{dk} = \dfrac{A^2(A+B)}{n}(1-\lambda^2) + \left(B-\dfrac{n}{A}\right)(1-k^2) \end{cases}$$

Durch Elimination von A und B gewinnt man die wichtige Differentialgleichung dritter Ordnung zwischen den beiden Moduln k und λ, welche zuerst von Jacobi, Fund. nova pag. 77 aufgestellt worden ist.

In mehr übersichtlicher Weise schreiben sich die Gleichungen (4), wenn man setzt:

$$(4a)\quad \begin{cases} A = \alpha\sqrt{n} \\ B = \sqrt{n}\left[-\beta + \dfrac{1-k^2}{\alpha} - (1-\lambda^2)\alpha\right] \end{cases}$$

und man erhält:

$$(4b)\quad \begin{cases} \dfrac{\alpha dk}{k-k^3} = \dfrac{d\alpha}{\alpha\beta} = \dfrac{1}{\alpha}\cdot\dfrac{d\lambda}{\lambda-\lambda^3} \\[2ex] d(\beta^2) = k^2(1-k^2)\,d\left(\dfrac{1}{\alpha^2}\right) + \lambda^2(1-\lambda^2)\,d(\alpha^2) \end{cases}$$

Zu bemerken ist bei diesen Gleichungen der Umstand, dass wenn k in λ' und λ in k' übergehen, die Grösse α sich in $\frac{1}{\alpha}$ verwandelt, während β ungeändert bleibt. Gehen aber k in λ, λ in k über, so verwandeln sich n in $\frac{1}{n}$, α in $\frac{1}{\alpha}$, β in $-\beta$.

Bildet man aus den Gleichungen (3)

$$F(\lambda)E\sqrt{1-\lambda^2} = F(k)E\sqrt{1-k^2} + \left(\frac{A^2+AB}{n} - 1\right)F(k)F\sqrt{1-k^2}$$

$$F\sqrt{1-\lambda^2}\,E(\lambda) = F\sqrt{1-k^2}\,E(k) - \frac{AB}{n}\cdot F(k)F\sqrt{1-k^2}$$

$$-F(\lambda)F\sqrt{1-\lambda^2} = \quad - \frac{A^2}{n}\cdot F(k)F\sqrt{1-k^2}$$

und addirt dieselben, so ergiebt sich:

$$F(\lambda)E\sqrt{1-\lambda^2}+F\sqrt{1-\lambda^2}E(\lambda)-F(\lambda)F\sqrt{1-\lambda^2}$$
$$=F(k)E\sqrt{1-k^2}+F\sqrt{1-k^2}E(k)-F(k)F\sqrt{1-k^2}$$

Diese Gleichung gilt für jeden beliebigen rationalen Wert von n; daher muss jede der beiden Seiten sich auf einen constanten Wert reduciren. Also:

$$F(k)E\sqrt{1-k^2}-\{F(k)-E(k)\}F\sqrt{1-k^2}=\text{Const.}$$

Dass $\{F(k)-E(k)\}F\sqrt{1-k^2}$ für abnehmende k sich der Nullgrenze nähert und $F(k)E\sqrt{1-k^2}$ die Grenze $\frac{\pi}{2}$ für $k=0$ erreicht, beweist man leicht aus den Integralen und leitet auf diese Weise den schönen Satz des Legendre aus der Transformation her.

Es mag nun in der algebraischen Modulargleichung zwischen k und λ unter der Voraussetzung, dass n eine positive rationale Zahl ist,

$$\lambda=\sqrt{1-k^2}$$

eingesetzt werden, so wird k eine specielle Zahl, welche nur von n abhängig ist und man gewinnt aus (3):

$$\text{(5)}\qquad \begin{cases} F\sqrt{1-k^2}=\sqrt{n}\,F(k) \\ \sqrt{n}\,E(k)-E\sqrt{1-k^2}=B_0F(k) \end{cases}$$

wo B_0 der besondere Wert ist, welchen B in diesem Falle annimmt und den man in jedem einzelnen Falle von der Auflösung einer algebraischen Gleichung als abhängig anzusehen hat.

Durch Verbindung der zweiten Gleichung (5) mit der Gleichung von Legendre

$$F(k)E\sqrt{1-k^2}+F\sqrt{1-k^2}E(k)-F(k)F\sqrt{1-k^2}=\frac{\pi}{2}$$

erhält man die Resultate:

$$\text{(6)}\qquad \begin{cases} F\sqrt{1-k^2}=\sqrt{n}\,.\,F(k) \\ E(k)=\left(\frac{1}{2}+\frac{B_0}{2\sqrt{n}}\right)F(k)+\frac{\pi}{4F\sqrt{1-k^2}} \\ E\sqrt{1-k^2}=\left(\frac{1}{2}-\frac{B_0}{2\sqrt{n}}\right)F\sqrt{1-k^2}+\frac{\pi}{4F(k)} \end{cases}$$

und man ersieht,

> dass die vollen Integrale zweiter Gattung in einer unbegrenzten Menge von Fällen durch die vollen Integrale erster Gattung dargestellt werden können.

Beispiele.

Für die allgemeine Transformation zweiter Ordnung hat man

$$(7)\quad \left\{\begin{aligned} &\lambda = \frac{2\sqrt{k}}{1+k}; \qquad \sqrt{1-\lambda^2} = \frac{1-k}{1+k} \\ &F(\lambda) = (1+k)F(k); \qquad F\sqrt{1-\lambda^2} = \frac{1+k}{2}F\sqrt{1-k^2} \\ &E(\lambda) = \frac{2}{1+k}E(k) - (1-k)F(k) \\ &E\sqrt{1-\lambda^2} = \frac{1}{1+k}E\sqrt{1-k^2} + \frac{k}{1+k}F\sqrt{1-k^2} \end{aligned}\right.$$

Hieraus folgt, wenn $k^2+\lambda^2=1$ gesetzt wird:

$$(7a)\quad \left\{\begin{aligned} &k = \sqrt{2}-1; \qquad B_0 = 2-\sqrt{2} \\ &F\sqrt{1-k^2} = \sqrt{2}\,.\,F(k) \\ &E(k) = \sqrt{\tfrac{1}{2}}\,.\,F(k) + \frac{\pi}{4F\sqrt{1-k^2}} \\ &E\sqrt{1-k^2} = (1-\sqrt{\tfrac{1}{2}})F\sqrt{1-k^2} + \frac{\pi}{4F(k)} \end{aligned}\right.$$

Für die allgemeine Transformation dritter Ordnung wird

$$(8)\quad \left\{\begin{aligned} &k^2 = \frac{\alpha^3(2+\alpha)}{1+2\alpha}; \qquad 1-k^2 = \frac{(1-\alpha)(1+\alpha)^3}{1+2\alpha} \\ &\lambda^2 = \frac{\alpha(2+\alpha)^3}{(1+2\alpha)^3}; \qquad 1-\lambda^2 = \frac{(1+\alpha)(1-\alpha)^3}{(1+2\alpha)^3} \\ &F(\lambda) = (1+2\alpha)F(k); \quad F\sqrt{1-\lambda^2} = \frac{1+2\alpha}{3}F\sqrt{1-k^2} \\ &E(\lambda) = \frac{3}{1+2\alpha}E(k) - \frac{2(1-\alpha^2)}{1+2\alpha}F(k) \\ &E\sqrt{1-\lambda^2} = \frac{1}{1+2\alpha}E\sqrt{1-k^2} + \frac{2\alpha(2+\alpha)}{3(1+2\alpha)}F\sqrt{1-k^2} \end{aligned}\right.$$

Hieraus folgt, wenn $k^2 + \lambda^2 = 1$ gesetzt wird:

$$
\text{(8a)} \quad \begin{cases}
k = \dfrac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}; \qquad \alpha = \dfrac{\sqrt{3}-1}{2}; \qquad B_0 = 1 \\
F\sqrt{1-k^2} = \sqrt{3} \, . \, F(k) \\
E(k) = \dfrac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{3}} F(k) + \dfrac{\pi}{4F\sqrt{1-k^2}} \\
E\sqrt{1-k^2} = \dfrac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{3}} F\sqrt{1-k^2} + \dfrac{\pi}{4F(k)}
\end{cases}
$$

Entsprechend erhält man für die nächstfolgenden Transformationen die fertigen Resultate:

$$
\text{(9)} \quad \begin{cases}
n = 4; \qquad k = (\sqrt{2}-1)^2 \\
F\sqrt{1-k^2} = 2F(k) \\
E(k) = 2(\sqrt{2}-1) \, . \, F(k) + \dfrac{\pi}{4F\sqrt{1-k^2}} \\
E\sqrt{1-k^2} = (\sqrt{2}-1)^2 \, . \, F\sqrt{1-k^2} + \dfrac{\pi}{4F(k)}
\end{cases}
$$

$$
\text{(10)} \quad \begin{cases}
n = 5; \quad 2k\sqrt{1-k^2} = \sqrt{5}-2; \quad k = \sqrt{\tfrac{1}{2} - \sqrt{\sqrt{5}-2}} \\
F\sqrt{1-k^2} = \sqrt{5} \, . \, F(k) \\
E(k) = \left(\tfrac{1}{2} + \sqrt{\dfrac{\sqrt{5}-1}{10}}\right) F(k) + \dfrac{\pi}{4F\sqrt{1-k^2}} \\
E\sqrt{1-k^2} = \left(\tfrac{1}{2} - \sqrt{\dfrac{\sqrt{5}-1}{10}}\right) F\sqrt{1-k^2} + \dfrac{\pi}{4F(k)}
\end{cases}
$$

$$
\text{(11)} \quad \begin{cases}
n = 6; \qquad k = (2-\sqrt{3})(\sqrt{3}-\sqrt{2}) \\
F\sqrt{1-k^2} = \sqrt{6} \, . \, F(k) \\
E(k) = \dfrac{11+8\sqrt{2}-6\sqrt{3}-4\sqrt{6}}{\sqrt{6}} \, . \, F(k) + \dfrac{\pi}{4F\sqrt{1-k^2}} \\
E\sqrt{1-k^2} = \dfrac{5\sqrt{6}+6\sqrt{3}-8\sqrt{2}-11}{\sqrt{6}} \, . \, F\sqrt{1-k^2} + \dfrac{\pi}{4F(k)}
\end{cases}
$$

$$
(12)\quad \left\{\begin{aligned}
&n = 7; \qquad 2k\sqrt{1-k^2} = \tfrac{1}{8}; \qquad k = \frac{3-\sqrt{7}}{4\sqrt{2}} \\
&F\sqrt{1-k^2} = \sqrt{7}\,.\,F(k) \\
&E(k) = \left(\tfrac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{7}}\right)F(k) + \frac{\pi}{4F\sqrt{1-k^2}} \\
&E\sqrt{1-k^2} = \left(\tfrac{1}{2}-\frac{1}{\sqrt{7}}\right)F\sqrt{1-k^2} + \frac{\pi}{4F(k)}
\end{aligned}\right.
$$

$$
(13)\quad \left\{\begin{aligned}
&n = 8; \qquad k = \frac{1-\sqrt{2}\sqrt{\sqrt{2}-1}}{1+\sqrt{2}\sqrt{\sqrt{2}-1}} \\
&F\sqrt{1-k^2} = \sqrt{8}\,.\,F(k) \\
&E(k) = \frac{1+2\sqrt{\sqrt{2}-1}}{2-\sqrt{\tfrac{1}{2}}+2\sqrt{\sqrt{2}-1}}\cdot F(k) + \frac{\pi}{4F\sqrt{1-k^2}} \\
&E\sqrt{1-k^2} = \frac{1-\sqrt{\tfrac{1}{2}}}{1-\sqrt{\tfrac{1}{2}}+2\sqrt{\sqrt{2}-1}}\cdot F\sqrt{1-k^2} + \frac{\pi}{4F(k)}
\end{aligned}\right.
$$

$$
(14)\quad \left\{\begin{aligned}
&n = 9; \qquad 2k\sqrt{1-k^2} = \frac{(\sqrt{3}-1)^4}{4} \\
&k = \frac{\sqrt{3}-1-\sqrt{2\sqrt{3}-3}}{\sqrt{2}} \\
&F\sqrt{1-k^2} = 3F(k) \\
&E(k) = \left(\tfrac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}\,.\,\sqrt[4]{3}}\right)F(k) + \frac{\pi}{4F\sqrt{1-k^2}} \\
&E\sqrt{1-k^2} = \left(\tfrac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}\,.\,\sqrt[4]{3}}\right)F\sqrt{1-k^2} + \frac{\pi}{4F(k)}
\end{aligned}\right.
$$

u. s. w.

Es braucht kaum bemerkt zu werden, dass wenn n ein Quadrat ist, die Grösse $F(k)$ sich stets durch $F\sqrt{\tfrac{1}{2}}$ darstellen lässt. So ist z. B.

$$\text{für } n = 4; \qquad F(k) = \tfrac{1}{2}\cdot\frac{F\sqrt{\tfrac{1}{2}}}{2-\sqrt{2}}$$

$$\text{„ } n = 9; \qquad F(k) = \frac{\sqrt{2}\,F\sqrt{\tfrac{1}{2}}}{\sqrt[4]{3}\,(3-\sqrt{3})}$$

Um die Resultate für gebrochene n ohne zu grossen Aufwand von Rechnung zu gewinnen, bemerke man, dass aus der Transformation $n$ter Ordnung (n ganz) die Gleichungen fliessen:

$$\left.\begin{aligned}
&F(\lambda) = AF(k); \quad F\sqrt{1-\lambda^2} = \frac{A}{n}F\sqrt{1-k^2} \\
&E(\lambda) = \frac{n}{A}E(k) - BF(k) \\
&A^2 = n\frac{k-k^3}{\lambda-\lambda^3}\cdot\frac{d\lambda}{dk}
\end{aligned}\right\}\text{cf. (3)}$$

$$B = (k-k^3)\frac{d\left(\frac{n}{A}\right)}{dk} + \frac{n}{A}(1-k^2) - A(1-\lambda^2)$$

und aus der Transformation $m$ter Ordnung (m ganz) die folgenden:

$$F(\lambda) = A_1F(\mu); \quad F\sqrt{1-\lambda^2} = \frac{A_1}{m}F\sqrt{1-\mu^2}$$

$$E(\lambda) = \frac{m}{A_1}E(\mu) - B_1F(\mu)$$

$$A_1^2 = m\frac{\mu-\mu^3}{\lambda-\lambda^3}\cdot\frac{d\lambda}{d\mu}$$

$$B_1 = (\mu-\mu^3)\frac{d\left(\frac{m}{A_1}\right)}{d\mu} + \frac{m}{A_1}(1-\mu^2) - A_1(1-\lambda^2)$$

Durch Elimination der „λ" folgt:

$$F(\mu) = \frac{A}{A_1}F(k): \quad F\sqrt{1-\mu^2} = \frac{m}{n}\cdot\frac{A}{A_1}\cdot F\sqrt{1-k^2}$$

$$E(\mu) = \frac{n}{m}\cdot\frac{A_1}{A}\cdot E(k) - \frac{A_1B-AB_1}{m}F(k)$$

$$\frac{A^2}{A_1^2} = \frac{n}{m}\cdot\frac{k-k^3}{\mu-\mu^3}\cdot\frac{d\mu}{dk} = A_2^2$$

$$\frac{A_1B-AB_1}{m} = B_2 = (k-k^3)\frac{d\left(\frac{nA_1}{mA}\right)}{dk} + \frac{nA_1}{mA}(1-k^2) - \frac{A}{A_1}(1-\mu^2)$$

Aus der letzten Gleichung folgt, dass alle Gleichungen (3) selbst noch für gebrochene n gültig bleiben. Ferner ist klar, dass die Modulargleichung zwischen k und μ als das

Resultat der Elimination von λ aus den algebraischen Gleichungen zwischen λ und k, sowie zwischen λ und μ selber algebraisch wird.

Ich will der Kürze wegen die obige inverse Doppel-Transformation als eine Transformation von der Ordnung $\frac{n}{m}$ bezeichen; sowie die algebraische Gleichung zwischen den Moduln k und μ durch

$$f\left(k, \mu, \frac{n}{m}\right) = 0 \tag{15}$$

Setzt man nun:

$$F(\mu) = AF(k); \quad F\sqrt{1-\mu^2} = \frac{mA}{n} F\sqrt{1-k^2}$$

$$E(\mu) = \frac{n}{mA} E(k) - BF(k)$$

$$E\sqrt{1-\mu^2} = \frac{1}{A} E\sqrt{1-k^2} + \left(\frac{m(A+B)}{n} - \frac{1}{A}\right) F\sqrt{1-k^2}$$

so werden A und B algebraische Functionen von k und μ.

Ferner ergiebt sich, dass wenn $\mu = \sqrt{1-k^2}$ gemacht wird,

$$(16)\quad \left\{\begin{aligned} F\sqrt{1-k^2} &= \sqrt{\frac{n}{m}}\,.\,F(k) \\ E\sqrt{1-k^2} &= \sqrt{\frac{n}{m}}\, E(k) - B_0 F(k) \\ E(k) &= \left(\frac{1}{2} + \frac{B_0}{2}\sqrt{\frac{m}{n}}\right) F(k) + \frac{\pi}{4F\sqrt{1-k^2}} \\ E\sqrt{1-k^2} &= \left(\frac{1}{2} - \frac{B_0}{2}\sqrt{\frac{m}{n}}\right) F\sqrt{1-k^2} + \frac{\pi}{4F(k)} \end{aligned}\right. \text{cf. (6)}$$

und B_0 eine algebraische Zahl wird, welche von der Grösse des Bruchs $\frac{n}{m}$ abhängt, sobald die algebraische Gleichung

$$f\left(k, \sqrt{1-k^2}, \frac{n}{m}\right) = 0$$

sich algebraisch lösen lässt.

Man gewinnt z. B. für $n = 3$, $m = 2$

$$
(17)\quad \begin{cases}
\sqrt{1-k^2} = (2-\sqrt{3})(\sqrt{3}+\sqrt{2}) \\
F\sqrt{1-k^2} = \sqrt{\tfrac{2}{3}}\,.\,F(k) \\
E(k) = \dfrac{11-8\sqrt{2}-6\sqrt{3}+5\sqrt{6}}{\sqrt{6}}F(k) + \dfrac{\pi}{4F\sqrt{1-k^2}} \\
E\sqrt{1-k^2} = \dfrac{8\sqrt{2}+6\sqrt{3}-11-4\sqrt{6}}{\sqrt{6}}F\sqrt{1-k^2} + \dfrac{\pi}{4F(k)}
\end{cases}
$$

Um zu untersuchen, ob in dem Falle

$$F\sqrt{1-k^2} = \sqrt{\frac{7}{3}}\,F(k)$$

die vollen Integrale zweiter Gattung durch $F(k)$ und algebraische Zahlen ausgedrückt werden können, hat man die Modulargleichung für die Transformation siebenter Ordnung

$$\sqrt[4]{k\lambda} + \sqrt[8]{(1-k^2)(1-\lambda^2)} = 1$$

mit der Modulargleichung für die Transformation dritter Ordnung

$$\sqrt{\lambda\mu} + \sqrt[4]{(1-\lambda^2)(1-\mu^2)} = 1$$

zu verbinden, $\mu^2 = 1-k^2$ zu setzen und zu untersuchen, ob k aus beiden Gleichungen algebraisch dargestellt werden kann.

Man setze, wodurch beide Gleichungen erfüllt werden:

$$k^2\lambda^2 = \left(\frac{1+x}{2}\right)^8;\quad k^2(1-\lambda^2) = \left(\frac{1-y}{2}\right)^4$$

$$(1-k^2)(1-\lambda^2) = \left(\frac{1-x}{2}\right)^8;\quad (1-k^2)\lambda^2 = \left(\frac{1+y}{2}\right)^4$$

Aus ihnen folgt zunächst

$$1-x^2 = 2\sqrt{1-y^2}$$

und dann durch Elimination

$$x^8+12x^6+22x^4+44x^2-15 = 0$$

mit den reellen Wurzeln

$$x^2 = 2\sqrt{7}-5$$

Ist der Kürze wegen

$$(18)\quad \left\{\begin{aligned} x &= \sqrt{2\sqrt{7}-5} \\ y &= x\sqrt{3} \\ &\text{so folgt:} \\ k^2 &= \left(\frac{1+x}{2}\right)^6 + \left(\frac{1-y}{2}\right)^4 \\ 1-k^2 &= \left(\frac{1-x}{2}\right)^6 + \left(\frac{1+y}{2}\right)^4 \\ \lambda^2 &= \left(\frac{1+x}{2}\right)^6 + \left(\frac{1+y}{2}\right)^4 \\ 1-\lambda^2 &= \left(\frac{1-x}{2}\right)^6 + \left(\frac{1-y}{2}\right)^4 \end{aligned}\right.$$

und es sind in den Gleichungen

$$F\sqrt{1-k^2} = \sqrt{\tfrac{7}{3}}\,F(k)$$

$$E(k) = g\,F(k) + \frac{\pi}{4\,F\sqrt{1-k^2}}$$

$$E\sqrt{1-k^2} = h\,F\sqrt{1-k^2} + \frac{\pi}{4\,F(k)}$$

k, g und h algebraisch darstellbare Zahlen.

Ich habe in einer grossen Anzahl von anderen Fällen die Moduln k, welche der Gleichung

$$F\sqrt{1-k^2} = \sqrt{\frac{n}{m}}\,F(k)$$

genügen, in algebraischer Form gefunden. In allen diesen Fällen sind die vollen elliptischen Integrale zweiter Gattung in $F(k)$ und algebraischen Zahlen darstellbar. Ob aber k immer als algebraische Zahl dargestellt werden kann, darüber wage ich keine Vermutung auszusprechen.

Kiel, im Januar 1874.