Available online at www.sciencedirect.com

SciVerse ScienceDirect

Expo. Math. 31 (2013) 1–39

EXPOSITIONES MATHEMATICAE

www.elsevier.de/exmath

La conjecture de Novikov et le groupe de Thompson

Catherine Oikonomides[a,*], Vlad Sergiescu[b]

[a] *Graduate School of Mathematical Sciences, The University of Tokyo, 3-8-1 Komaba, Meguro-ku, Tokyo, 153-8914, Japan*

[b] *Institut Fourier, UMR 5582 du CNRS, 100 rue des Maths, 38402 Saint-Martin d'Hères, France*

Received 7 August 2011

Abstract

Using the index theorem of Connes and Moscovici and the cyclic cocycle associated to a group cocycle, we prove the Novikov conjecture for the generalized Godbillon–Vey cocycle, which has been defined by Tsuboi through area functionals. As a corollary, we get a new proof of the fact that Thompson's groups T and F satisfy the Novikov conjecture.

Résumé

En utilisant le théorème de l'indice de Connes et Moscovici et le cocycle cyclique associé à un cocycle de groupe, nous démontrons la conjecture de Novikov pour le cocycle de Godbillon–Vey généralisé, défini par Tsuboi avec des "fonctions d'aire". Nous en déduisons une nouvelle preuve de la conjecture de Novikov pour les groupes de Thompson T et F.

Keywords: Cyclic cohomology; Novikov conjecture; Thompson group; Godbillon–Vey cocycle; Area functionals

1. Introduction

Soient Γ un groupe discret et $\omega \in H^*(\Gamma; \mathbf{R})$ un cocycle de groupe. Nous dirons que la paire (Γ, ω) vérifie la conjecture de Novikov [22] si pour toute variété compacte orientée

* Corresponding author.

E-mail addresses: oikonomi@ms.u-tokyo.ac.jp (C. Oikonomides), Vlad.Sergiescu@ujf-grenoble.fr (V. Sergiescu).

0723-0869/$ - see front matter
doi:10.1016/j.exmath.2012.08.003

sans bord M, et pour toute application continue $\rho : M \to B\Gamma$, la haute signature

$$\langle L(M) \cup \rho^*\omega, [M]\rangle$$

est un invariant d'homotopie, i.e. si

$$\langle L(N) \cup f^*\rho^*\omega, [N]\rangle = \langle L(M) \cup \rho^*\omega, [M]\rangle$$

pour toute équivalence d'homotopie $f : N \to M$ (N étant aussi une variété compacte orientée sans bord). ($L(M) \in H^*(M; \mathbb{Q})$ désigne ici la classe L de Hirzebruch). Nous dirons que le groupe Γ vérifie la conjecture de Novikov si (Γ, ω) la vérifie pour toute classe $\omega \in H^*(\Gamma; \mathbf{R})$.

Dans cet article, nous nous proposons de traiter le cas où ω est le cocycle de Godbillon–Vey généralisé, défini par Tsuboi dans [27], et où les groupes Γ sont certains sous-groupes du groupe $\mathrm{Homeo}_+(S^1)$ des homéomorphismes directs du cercle (voir Définition 1.1) qui constituent le domaine de définition "naturel" du cocycle de Godbillon–Vey. Cela nous permettra en particulier de résoudre le cas des groupes de Thompson T et F.

Notre méthode sera celle de la cohomologie cyclique, qui est exposée en détail dans [26] (voir aussi [8] p. 237–238). Rappelons-en brièvement les grandes lignes.

A tout n-cocycle normalisé ω du groupe Γ, on peut associer [7] un n-cocycle cyclique τ_ω sur l'algèbre du groupe $\mathbf{C}\Gamma$. Si M est une variété compacte orientée sans bord, $\rho : M \to B\Gamma$ une application continue et $\tilde{D}$ l'opérateur de signature sur le revêtement $\tilde{M}$ associé, le théorème de l'indice de Connes et Moscovici [10] affirme que le couplage $\langle \tau_\omega \# Tr, Ind(\tilde{D})\rangle$ est égal, à un facteur constant près, à la haute signature $\langle L(M) \cup \rho^*\omega, [M]\rangle$. Par ailleurs, le théorème de l'indice de Kasparov et Mishchenko [20,18] affirme que l'image de $Ind(\tilde{D})$ par l'inclusion est un invariant d'homotopie dans $K_*(C_r^*\Gamma)$. Il s'en suit que si le cocycle τ_ω s'étend à une algèbre $\mathcal{B}$,

$$\mathbf{C}\Gamma \subset \mathcal{B} \subset C_r^*\Gamma,$$

telle que l'inclusion $\mathcal{B} \to C_r^*\Gamma$ induise des isomorphismes en K-théorie, alors la haute signature $\langle L(M) \cup \rho^*\omega, [M]\rangle$ sera un invariant d'homotopie. Démontrer la conjecture de Novikov pour la paire (Γ, ω) se ramène donc à étudier le domaine de définition du cocycle cyclique τ_ω, et ce sera notre stratégie dans cet article.

Nous allons nous intéresser aux sous-groupes de $\mathrm{Homeo}_+(S^1)$ définis de la manière suivante.

Définition 1.1 (*[27]*)**.** Soit $\beta > 0$ un réel. Nous dénoterons par $\mathrm{Lip}_+^\beta(S^1)$ le groupe des $f \in \mathrm{Homeo}_+(S^1)$ tels que:

- en tout point $t \in S^1$, f admet une dérivée à droite $f'_d(t) > 0$,
- la fonction $\log(f'_d) : S^1 \to \mathbf{R}$ est à β-variation bornée (voir Définition 2.1).

Nous verrons que ces $\mathrm{Lip}_+^\beta(S^1)$ sont bien des groupes, qui consistent d'homéomorphismes lipschitziens, et qu'ils sont emboîtés les uns dans les autres:

$$\beta \leq \beta' \Rightarrow \mathrm{Lip}_+^\beta(S^1) \subset \mathrm{Lip}_+^{\beta'}(S^1).$$

En particulier, $\mathrm{Lip}^1_+(S^1)$ est le groupe des homéomorphismes “de classe P” [17], qui contient d’une part le groupe $\mathrm{Diff}^2_+(S^1)$ des difféomorphismes directs de classe C^2 et d’autre part le groupe $\mathrm{PL}_+(S^1)$ des homéomorphismes directs qui sont affines par morceaux.

Par ailleurs, quand $\beta > 1$, $\mathrm{Lip}^\beta_+(S^1)$ contient $\mathrm{Diff}^{1+\frac{1}{\beta}}_+(S^1)$, le groupe des difféomorphismes directs de classe C^1 dont la dérivée satisfait une condition de Hölder d’exposant $\frac{1}{\beta}$.

Le cocycle de Godbillon–Vey [15] était initialement un 2-cocycle de groupe défini sur $\mathrm{Diff}^2_+(S^1)$ par la formule de Bott–Thurston [3]. Puis deux nouvelles versions de ce cocycle ont été proposées, l’une par Ghys et Sergiescu sur $\mathrm{PL}_+(S^1)$ [14], l’autre par Hurder et Katok sur $\mathrm{Diff}^{1+\alpha}_+(S^1)$ pour $\frac{1}{2} < \alpha < 1$ [19]. Dans [27], Tsuboi a défini un 2-cocycle généralisé, que nous désignerons par gv, sur les groupes $\mathrm{Lip}^\beta_+(S^1)$ pour $1 \leq \beta < 2$. gv est une extension des trois cocycles précédents dans le sens où sa restriction à chacun des groupes ci-dessus coincide avec le cocycle de [3], de [14] et de [19].

Dans cet article, nous allons d’abord décrire en détail la construction de Tsuboi. Puis, nous allons définir un 2-cocycle cyclique τ_{gv} associé à gv et démontrer le résultat suivant, qui généralise en quelque sorte le Théorème 7.3. de [7].

Théorème 1.2. *Pour tout réel $\beta \in [1, 2[$, le cocycle cyclique τ_{gv} est une 2-trace au sens de Connes [7] sur $C^*_r\mathrm{Lip}^\beta_+(S^1)$. La paire $(\mathrm{Lip}^\beta_+(S^1), gv)$ vérifie donc la conjecture de Novikov.*

Remarquons ici que gv est loin d’être un cocycle borné. Le fait que τ_{gv} est une 2-trace provient d’une certaine propriété géométrique de gv, qui s’exprime comme l’aire enfermée par une courbe plane. Cette propriété est au coeur même de la définition du cocycle gv et nous allons l’étudier en détail.

Par la suite, nous allons nous intéresser au groupe de Thompson:

$$T \subset \mathrm{PL}_+(S^1) \subset \mathrm{Lip}^1_+(S^1)$$

dont la cohomologie, calculée dans [14], est précisémment engendrée par la classe de Godbillon–Vey et la classe d’Euler.

Définition 1.3 (*[5,14]*)**.** Le groupe de Thompson T est le groupe des $f \in \mathrm{Homeo}_+(S^1)$ tels que:

- f est affine par morceaux;
- en tout point $t \in S^1$, la dérivée à droite $f'_d(t)$ est une puissance entière de 2, i.e. un nombre du type 2^n avec $n \in \mathbf{Z}$;
- les points de discontinuité de f'_d sont des rationnels dyadiques, i.e. des nombres du type $\frac{p}{2^q}$ avec $p, q \in \mathbf{Z}$;
- $f(0)$ est un rationnel dyadique.

Le groupe de Thompson F est le sous-groupe des $f \in T$ tels que $f(0) = 0$.

Il est bien connu [5] que T et F sont des groupes infinis, de présentation finie et à croissance exponentielle (et que T est de plus un groupe simple). Ils contiennent des sous-groupes isomorphes à $\mathbf{Z}^2$ et sont donc très loin d’être des groupes hyperboliques.

Cependant, la méthode de [10] s'applique à eux. Nous retrouvons le résultat suivant, dû à Farley [12].

Théorème 1.4. *Les groupes de Thompson T et F vérifient la conjecture de Novikov.*

Notons que Farley a en fait démontré un résultat plus fort, à savoir que T et F vérifient la conjecture de Baum–Connes [12]. De plus, Mathai a démontré dans [21] (voir aussi [9] et [16]) que la conjecture de Novikov est vraie pour tout groupe dont la cohomologie est engendrée par des cocycles de degré un et deux, condition qui est manifestement vérifiée par les groupes T et F. Notre article n'a donc pas la prétention de présenter des résultats nouveaux: nous ne faisons que proposer une nouvelle démonstration d'un théorème déjà connu, en espérant que cela pourra servir.

Nous aimerions remercier Georges Skandalis pour plusieurs discussions sans lesquelles cet article n'aurait jamais été terminé. Nous remercions aussi Hitoshi Moriyoshi, Toshikazu Natsume, Shin-ichi Oguni, Takashi Tsuboi et Alain Valette pour l'intérêt qu'ils ont porté à ce travail. Le premier auteur remercie également Emmanuel Giroux pour son hospitalité, et l'UMR 5669 du CNRS à l'Ecole Normale Supérieure de Lyon, où une partie de ce travail a été effectuée.

2. L'aire enfermée par une courbe $S^1 \to \mathbf{C}$

Nous désignerons par $S^1 = \mathbf{R}/\mathbf{Z}$ le cercle, et par $\pi : \mathbf{R} \to S^1$ la projection canonique. Un partage de S^1 sera la donnée d'un entier $p \geq 1$ et d'un ensemble de p points distincts $A = \{t_1, \ldots, t_p\}$ placés dans cet ordre-là sur le cercle. Autrement dit, il existe des réels $\tilde{t}_1, \ldots, \tilde{t}_p$ tels que

- $\tilde{t}_1 < \tilde{t}_2 < \cdots < \tilde{t}_p < \tilde{t}_1 + 1$,
- $\forall k \in \{1, \ldots, p\}, t_k = \pi(\tilde{t}_k)$.

Nous poserons par convention $\tilde{t}_{p+1} = \tilde{t}_1 + 1$, $t_{p+1} = t_1$, et nous désignerons par

$$\mathrm{mesh}(A) = \mathrm{Sup}_{k\in\{1,\ldots,p\}}(\tilde{t}_{k+1} - \tilde{t}_k)$$

le pas du partage, qui vérifie toujours $\frac{1}{p} \leq \mathrm{mesh}(A) \leq 1$.

Dans tout cet article, $B(S^1)$ désignera l'algèbre des fonctions réglées (donc bornées) de S^1 dans $\mathbf{C}$, munie de la norme de la convergence uniforme:

$$\|\Phi\| = \mathrm{Sup}_{t\in S^1}|\Phi(t)|$$

et $C(S^1) \subset B(S^1)$ désignera la sous-algèbre des fonctions continues de S^1 dans $\mathbf{C}$.

Définition 2.1 (*[27,28]*)**.** Soit $\beta > 0$ un réel. Une fonction $\Phi : S^1 \to \mathbf{C}$ sera dite à β-variation bornée si la quantité

$$\sum_{k=1}^{p} |\Phi(t_{k+1}) - \Phi(t_k)|^\beta$$

est bornée indépendamment du partage $A = \{t_1, \ldots, t_p\}$ de S^1 choisi. Le nombre

$$V_\beta(\Phi) = \operatorname{Sup} \sum_{k=1}^{p} |\Phi(t_{k+1}) - \Phi(t_k)|^\beta,$$

où le Sup est pris sur tous les partages du cercle, sera alors appelé la β-variation totale de Φ. Dans la suite, l'ensemble de ces fonctions sera désigné par $BV_\beta(S^1)$.

Notons tout d'abord que, par définition, une fonction $\Phi \in BV_\beta(S^1)$ n'est pas forcément continue. Cependant, l'inégalité

$$\forall t \in S^1, \quad |\Phi(t)| \leq |\Phi(t_1)| + \frac{V_\beta(\Phi)^{\frac{1}{\beta}}}{2^{\frac{1}{\beta}}}$$

montre qu'elle est bornée. Par ailleurs, il est aisé de vérifier que pour tout $h \in \mathrm{Homeo}_+(S^1)$, $\Phi \circ h \in BV_\beta(S^1)$ et

$$V_\beta(\Phi \circ h) = V_\beta(\Phi).$$

Lemme 2.2. *Soit $\beta > 0$ un réel. Toute fonction $\Phi \in BV_\beta(S^1)$ est réglée (i.e. elle admet une limite à gauche $\Phi(t^-)$ et une limite à droite $\Phi(t^+)$ en tout point $t \in S^1$) et le nombre de ses discontinuités est donc au plus dénombrable.*

Démonstration. Définissons la fonction $v_\beta(\Phi) : [0, 1] \to \mathbf{R}_+$ par $v_\beta(\Phi)(0) = 0$ et

$$\forall t \in]0, 1], \quad v_\beta(\Phi)(t) = \operatorname{Sup} \sum_{k=1}^{p-1} |\Phi(t_{k+1}) - \Phi(t_k)|^\beta,$$

où le Sup est pris sur tous les partages $A = \{t_1, \ldots, t_p\}$ du cercle tels que

$$0 \leq t_1 < t_2 < \cdots < t_p \leq t.$$

La fonction $v_\beta(\Phi)$ est croissante et bornée, avec $v_\beta(\Phi)(1) = V_\beta(\Phi)$, donc elle est réglée. De plus, si $t \in]0, 1]$ est fixé, pour tout $\epsilon > 0$, il existe un partage $A \subset [0, t]$ comme ci-dessus tel que

$$\sum_{k=1}^{p-1} |\Phi(t_{k+1}) - \Phi(t_k)|^\beta \geq v_\beta(\Phi)(t) - \epsilon$$

donc $\forall t' \geq t$,

$$v_\beta(\Phi)(t') \geq |\Phi(t') - \Phi(t)|^\beta + v_\beta(\Phi)(t) - \epsilon,$$

ce qui entraîne

$$|\Phi(t') - \Phi(t)|^\beta \leq v_\beta(\Phi)(t') - v_\beta(\Phi)(t).$$

Par suite, le fait que $v_\beta(\Phi)$ est réglée implique que Φ est réglée. $\square$

Lemme 2.3. *Pour tout réel $\beta > 0$, $BV_\beta(S^1)$ est un $\mathbf{C}$-espace vectoriel. De plus, si $0 < \beta \leq \beta'$ alors $BV_\beta(S^1) \subset BV_{\beta'}(S^1)$.*

Démonstration. La première affirmation résulte de l'inégalité:

$$\forall \beta > 0, \forall a \geq 0, \forall b \geq 0, \quad (a+b)^\beta \leq 2^\beta(a^\beta + b^\beta).$$

Soit maintenant $\Phi \in BV_\beta(S^1)$ une fonction non nulle et soit $\beta' \geq \beta$.
Φ étant bornée, on peut poser:

$$\|\Phi\| = \mathrm{Sup}_{t \in S^1}|\Phi(t)| \quad \text{et} \quad \Psi = \frac{\Phi}{2\|\Phi\|}.$$

Alors $\forall t, t' \in S^1$, $|\Psi(t) - \Psi(t')| \leq 1$, d'où

$$|\Psi(t) - \Psi(t')|^{\beta'} \leq |\Psi(t) - \Psi(t')|^\beta.$$

Par suite, pour tout partage $A = \{t_1, \ldots, t_p\}$ du cercle,

$$\sum_{k=1}^{p} |\Phi(t_{k+1}) - \Phi(t_k)|^{\beta'} \leq (2\|\Phi\|)^{\beta'-\beta} V_\beta(\Phi),$$

ce qui implique que $\Phi \in BV_{\beta'}(S^1)$. □

A partir de là, nous pouvons en fait facilement montrer que pour tout $\beta > 0$, $BV_\beta(S^1)$ est une sous-algèbre de $B(S^1)$.

Notons que $BV_1(S^1)$ est l'ensemble des fonctions communément appelées "à variation bornée," et qui contient l'espace vectoriel $C^1(S^1)$ des fonctions de classe C^1. Il est clair par ailleurs que si $\beta > 1$, $BV_\beta(S^1)$ contient l'espace vectoriel $C^{\frac{1}{\beta}}(S^1)$ des fonctions continues satisfaisant une condition de Hölder d'exposant $\frac{1}{\beta}$.

Quand $0 < \beta < 1$, nous pouvons prouver, par un raisonnement analogue à la Proposition 2.3 de [27], qu'une fonction $\Phi \in BV_\beta(S^1)$ est constante sur chaque intervalle où elle est continue. Comme ces espaces sont de toute façon inclus dans $BV_1(S^1)$, nous ferons souvent par la suite l'hypothèse $\beta \geq 1$.

Lemme 2.4 ([27]). *Soit $\beta \geq 1$ un réel. L'égalité $\|\Phi\|_\beta = V_\beta(\Phi)^{\frac{1}{\beta}}$ définit une semi-norme sur $BV_\beta(S^1)$.*

Démonstration. L'inégalité du Lemme 2.3 améliorée:

$$\forall \beta \geq 1, \forall a \geq 0, \forall b \geq 0, \quad (a+b)^\beta \leq 2^{\beta-1}(a^\beta + b^\beta)$$

permet de prouver l'inégalité triangulaire:

$$\|\Phi + \Psi\|_\beta \leq \|\Phi\|_\beta + \|\Psi\|_\beta$$

quand $\beta \geq 1$ et Φ et Ψ sont dans $BV_\beta(S^1)$. De plus, il est clair que

$$\forall z \in \mathbf{C}, \quad \|z\Phi\|_\beta = |z|\|\Phi\|_\beta.$$

Cependant, $\|\Phi\|_\beta = 0$ si et seulement si Φ est constante. Cette semi-norme n'est donc pas une norme. □

Soient maintenant φ et ψ deux fonctions de S^1 dans $\mathbf{R}$. Nous allons nous intéresser à la courbe $\Phi : S^1 \to \mathbf{C}$ définie par

$$\forall t \in S^1, \quad \Phi(t) = \varphi(t) + i\psi(t).$$

Il est clair que pour tout réel $\beta > 0$, $\Phi \in BV_\beta(S^1)$ si et seulement si les composantes φ et ψ appartiennent toutes deux à $BV_\beta(S^1)$.

Une ligne polygonale inscrite dans Φ sera la donnée d'un partage $A = \{t_1, \dots, t_p\}$ de S^1 et de la fonction $\Phi_A : S^1 \to \mathbf{C}$ égale à $\Phi(t_k)$ en tout point t_k et affine sur chaque intervalle $[t_k, t_{k+1}]$, pour $k \in \{1, \dots, p\}$.

Rappelons que $\Phi \in BV_1(S^1)$ signifie géométriquement que la longueur de la courbe image de Φ est finie [25]. En effet, la quantité $V_1(\Phi)$ est la borne supérieure des longueurs des lignes polygonales inscrites dans Φ, et peut donc être considérée comme la longueur de la courbe image de Φ. Quand Φ n'est pas continue, cette interprétation géométrique garde un sens, à condition de remplacer chaque intervalle de discontinuité de Φ par un segment de droite.

Il est connu de plus ([25], Théorème 3.2.35) que quand Φ est continue à droite (ou continue à gauche), la longueur $V_1(\Phi)$ est égale à la limite des longueurs des lignes polygonales inscrites dans Φ quand le pas du partage tend vers zéro:

$$\forall \epsilon > 0, \exists \alpha > 0, \quad \mathrm{mesh} A \leq \alpha \Rightarrow V_1(\Phi) \leq V_1(\Phi_A) + \epsilon.$$

Cette dernière interprétation nous servira de base pour définir l'aire algébrique enfermée par la courbe Φ.

Définition 2.5 *([27])***.** Soit $\Phi : S^1 \to \mathbf{C}$ une fonction réglée, continue à droite (ou continue à gauche). Nous dirons que l'aire enfermée par la courbe $\Phi = \varphi + i\psi$ est bien définie si les quantités

$$\sum_{k=1}^{p} \frac{1}{2}(\varphi(t_k)\psi(t_{k+1}) - \varphi(t_{k+1})\psi(t_k))$$

convergent quand le pas du partage $A = \{t_1, \dots, t_p\}$ de S^1 tend vers 0. La limite sera alors désignée par $\mathrm{Area}(\Phi)$ ou par $\mathrm{Area}(\varphi, \psi)$.

Remarquons d'abord que la quantité

$$\mathrm{Area}(\Phi_A) = \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{2}(\varphi(t_k)\psi(t_{k+1}) - \varphi(t_{k+1})\psi(t_k))$$

est bien l'aire algébrique du polygone dont les sommets sont $\{\Phi(t_1), \dots, \Phi(t_p)\}$, c'est-à-dire l'aire enfermée par la courbe Φ_A. $\mathrm{Area}(\Phi)$ est donc la limite des aires algébriques enfermées par les lignes polygonales inscrites dans Φ quand le pas du partage tend vers zero:

$$\forall \epsilon > 0, \exists \alpha > 0, \quad \mathrm{mesh} A \leq \alpha \Rightarrow |\mathrm{Area}(\Phi) - \mathrm{Area}(\Phi_A)| \leq \epsilon.$$

Remarquons de plus que la définition ci-dessus est bien valable quand Φ n'est pas continue, et qu'on peut toujours parler d'aire "enfermée" par la courbe Φ après avoir relié les points $\Phi(t^-)$ et $\Phi(t^+)$ par un segment de droite.

Lemme 2.6. *Soient $\Phi : S^1 \to \mathbf{C}$ une fonction réglée, continue à droite (ou continue à gauche) et $h \in \mathrm{Homeo}_+(S^1)$. Si l'aire enfermée par la courbe Φ est bien définie, alors il en est de même pour $\Phi \circ h$ et*

$$\mathrm{Area}(\Phi \circ h) = \mathrm{Area}(\Phi).$$

Démonstration. Pour tout partage $A = \{t_1, \ldots, t_p\}$ de S^1, l'image par h de A est le partage $h(A) = \{h(t_1), \ldots, h(t_p)\}$ et h étant uniformément continu,

$$\forall \alpha > 0, \exists \alpha' > 0, \quad \mathrm{mesh}(A) \leq \alpha' \Rightarrow \mathrm{mesh}(h(A)) \leq \alpha.$$

De plus, nous avons $\Phi_A = (\Phi \circ h)_{h^{-1}(A)}$ et donc

$$\forall \epsilon > 0, \exists \alpha > 0, \quad \mathrm{mesh} A \leq \alpha \Rightarrow |\mathrm{Area}(\Phi) - \mathrm{Area}((\Phi \circ h)_{h^{-1}(A)})| \leq \epsilon.$$

Comme $A = h^{-1}(h(A))$, on obtient bien:

$$\forall \epsilon > 0, \exists \alpha' > 0, \quad \mathrm{mesh} A \leq \alpha' \Rightarrow |\mathrm{Area}(\Phi) - \mathrm{Area}((\Phi \circ h)_A)| \leq \epsilon. \quad \square$$

Quand φ et ψ sont de classe C^1, le théorème de Stokes fournit:

$$\mathrm{Area}(\varphi, \psi) = \int_{S^1} \varphi(t)\psi'(t)dt = \frac{1}{2}\int_{S^1} (\varphi(t)\psi'(t) - \psi(t)\varphi'(t))dt.$$

Cette formule, écrite cette fois sous la forme:

$$\mathrm{Area}(\varphi, \psi) = \frac{1}{2}\int_{S^1} (\varphi D\psi - \psi D\varphi)$$

s'étend à $BV_1(S^1)$, en prenant pour $D\varphi$ et $D\psi$ les dérivées au sens des distributions de φ et de ψ [23]. En particulier, si φ et ψ sont des fonctions en escalier, $D\varphi$ et $D\psi$ sont des combinaisons linéaires de mesures de Dirac. L'intégrale est bien égale à l'aire algébrique du polygone correspondant à la fonction Φ.

L'une des idées cruciales de [27] est de remarquer que l'aire enfermée par une courbe peut être finie sans que la longueur de la courbe ne le soit. Nous allons illustrer cette idée par l'exemple suivant.

Exemple 2.7. Soit $M : [0, 1] \to \mathbf{R}_+$ la fonction définie de la manière suivante:

- $M(0) = 0$;
- pour tout entier $n \geq 1$, $M(\frac{1}{n}) = 0$;
- si a_n désigne le milieu du segment $[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}]$, $M(a_n) = \frac{1}{n}$;
- sur les intervalles $[\frac{1}{n+1}, a_n]$ et $[a_n, \frac{1}{n}]$, M est affine.

Le graphe de M ressemble alors à une suite de pics isocèles de plus en plus petits, de plus en plus étroits, qui "tendent" vers l'origine comme dans la Fig. 1. Il est clair que M induit une fonction continue sur le cercle, qui n'est pas à variation bornée. Par contre, $M \in BV_\beta(S^1)$ pour tout $\beta > 1$ et

$$\forall \beta > 1, \quad V_\beta(M) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^\beta}.$$

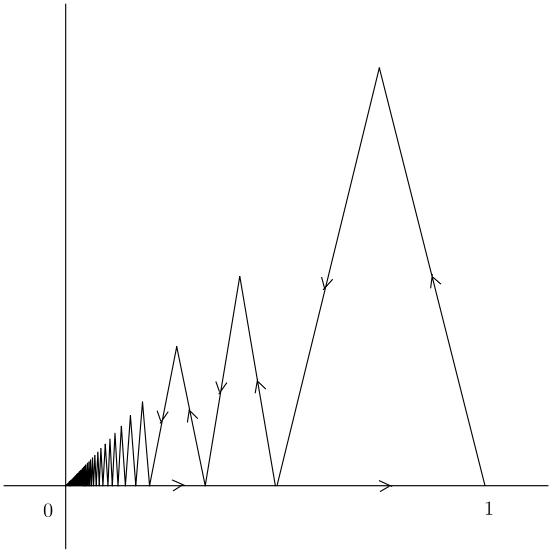

Fig. 1.

Définissons alors la fonction $\Phi : S^1 \to \mathbf{C}$ par:

$$\forall t \in \left[0, \frac{1}{2}\right], \quad \Phi(t) = 2t; \quad \forall t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right], \quad \Phi(t) = 2 - 2t + iM(2 - 2t).$$

La courbe Φ est obtenue en parcourant l'axe des x de 0 à 1, puis le graphe de M en sens inverse. La longueur de la courbe est infinie, mais la somme des aires des triangles converge, et nous avons:

$$\mathrm{Area}(\Phi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n^2(n+1)}.$$

L'exemple élémentaire suivant montre par ailleurs qu'il n' est pas possible de définir l'aire enfermée par une courbe continue de S^1 dans $\mathbf{C}$ en général.

Exemple 2.8. Soit $\Phi : [0, 1] \to \mathbf{C}$ la fonction définie de la manière suivante:

- pour tout entier $n \geq 1$, $\Phi(1 - \frac{1}{n}) = 0$;
- si a_n est placé au tiers et b_n aux deux-tiers du segment $[1 - \frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n+1}]$, $\Phi(a_n) = \frac{1}{\sqrt{n}}$, $\Phi(b_n) = \frac{i}{\sqrt{n}}$;
- sur chaque intervalle $[1 - \frac{1}{n}, a_n]$, $[a_n, b_n]$ et $[b_n, 1 - \frac{1}{n+1}]$, Φ est affine;
- $\Phi(1) = 0$.

Il est clair que Φ induit une fonction continue de S^1 dans $\mathbf{C}$, et que la courbe Φ consiste d'une suite de triangles rectangles de plus en plus petits, emboîtés les uns dans les autres et parcourus dans le même sens, comme dans la Fig. 2. La somme des aires des triangles

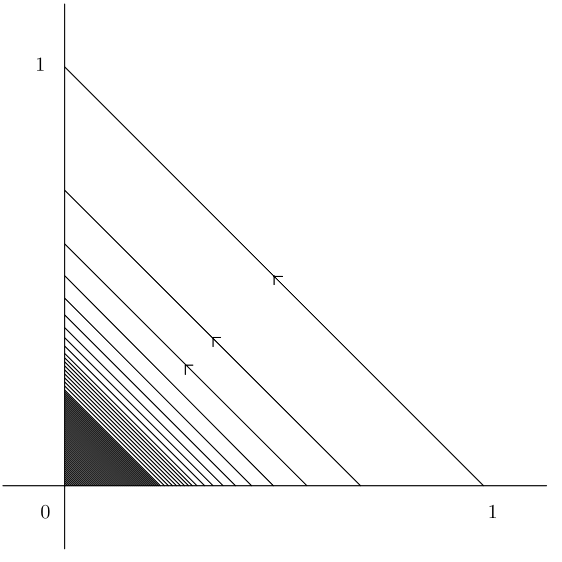

Fig. 2.

est une série de terme général $\frac{1}{2n}$, et donc Area(Φ) diverge. Par ailleurs, la série:
$|\Phi(1-\frac{1}{n+1}) - \Phi(b_n)|^2 + |\Phi(b_n) - \Phi(a_n)|^2 + |\Phi(a_n) - \Phi(1-\frac{1}{n})|^2 = \frac{4}{n}$
est également divergente, donc $\Phi \notin BV_2(S^1)$. En fait, nous pouvons montrer que pour tout $\beta > 2$, $\Phi \in BV_\beta(S^1)$ et

$$\forall \beta > 2, \quad V_\beta(\Phi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2+2^{\frac{\beta}{2}}}{n^{\frac{\beta}{2}}}.$$

Nous sommes maintenant prêts à citer le théorème de Tsuboi, qui donne une condition suffisante pour que l'aire converge. Le lecteur en trouvera la démonstration détaillée dans [27].

Proposition 2.9 (*[27], 3.7 et 3.8*)**.** *Soit β un réel, $1 \le \beta < 2$. Pour toute fonction $\Phi = \varphi + i\psi \in BV_\beta(S^1)$, continue à droite (ou continue à gauche), l'aire enfermée par la courbe Φ est bien définie. De plus, il existe une constante $K_\beta > 0$, dépendant uniquement de β, telle que*

$$|\mathrm{Area}(\varphi, \psi)| \le K_\beta \|\varphi\|_\beta \|\psi\|_\beta.$$

Remarque 2.10. Quand Φ n'est pas continue à droite ou à gauche, le résultat reste valable à condition de définir alors Area(Φ) comme étant l'aire enfermée par la courbe $t \mapsto \Phi(t^+)$ [27].

Remarque 2.11. Dans [27], Tsuboi a défini un espace $\mathcal{Q}_2(S^1) \subset BV_2(S^1)$ qui contient tous les espaces $BV_\beta(S^1)$ pour $0 < \beta < 2$. Il a démontré que Area(Φ) est bien définie pour toute fonction $\Phi \in \mathcal{Q}_2(S^1)$, continue à droite (ou continue à gauche). Nous ne savons toujours pas si ce $\mathcal{Q}_2(S^1)$ est bien le domaine de définition maximal de Area.

3. Le cocycle de Godbllon-Vey généralisé

Revenons maintenant à la Définition 1.1. Un homéomorphisme du cercle f appartient à $\mathrm{Lip}_+^\beta(S^1)$ si la fonction $\log f'_d$ est bien définie et appartient à $BV_\beta(S^1)$. Il est donc clair que $\mathrm{Diff}_+^2(S^1) \subset \mathrm{Lip}_+^1(S^1)$, puisque toute fonction de classe C^1 est à variation bornée, et que $\mathrm{PL}_+(S^1) \subset \mathrm{Lip}_+^\beta(S^1)$ pour tout $\beta > 0$.

Rappelons que $\mathrm{PL}_+(S^1)$ est le groupe des homéomorphismes du cercle préservant l'orientation et qui sont affines par morceaux. $g \in \mathrm{Homeo}_+(S^1)$ est dit "affine par morceaux" s'il existe un partage $\{t_1, t_2, \ldots, t_p\}$ du cercle tel que la restriction de g à chaque intervalle compact $[t_i, t_{i+1}]$ soit affine.

Lemme 3.1. *Pour tout réel* $\beta > 0$, $\mathrm{Lip}_+^\beta(S^1)$ *est un groupe. De plus, si* $0 < \beta \leq \beta'$, *alors* $\mathrm{Lip}_+^\beta(S^1) \subset \mathrm{Lip}_+^{\beta'}(S^1)$.

Démonstration. Si $f \in \mathrm{Homeo}_+(S^1)$ et $g \in \mathrm{Homeo}_+(S^1)$ sont dérivables à droite, alors $f \circ g$ est dérivable à droite, et nous avons:

$$\log(f \circ g)'_d = \log f'_d \circ g + \log g'_d.$$

Il résulte donc du Lemme 2.3 que $\mathrm{Lip}_+^\beta(S^1)$ est stable par composition. De plus, si $\log f'_d \in BV_\beta(S^1)$, il est clair que f'_d est minorée par un réel strictement positif, et nous avons

$$\log(f^{-1})'_d = -\log f'_d \circ f^{-1}$$

d'où $f^{-1} \in \mathrm{Lip}_+^\beta(S^1)$. Le reste résulte du Lemme 2.3. □

Remarque 3.2. Un homéomorphisme $f \in \mathrm{Lip}_+^\beta(S^1)$ n'est pas forcément de classe C^1. Cependant, il admet une dérivée à droite bornée et est donc lipschitzien. De plus, f'_d étant règlée, le théorème des accroissements finis [25] montre que f'_d est continue à droite, que la dérivée à gauche $f'_g(t) > 0$ est bien définie pour tout $t \in S^1$, que la fonction $\log f'_g$ appartient aussi à $BV_\beta(S^1)$, et que f'_g est donc règlée et continue à gauche. Les fonctions f'_g et f'_d sont égales sauf sur un ensemble au plus dénombrable.

Le cocycle de Godbillon–Vey est initialement défini sur $\mathrm{Diff}_+^2(S^1)$ par la formule [3]:

$$\forall f, g \in \mathrm{Diff}_+^2(S^1), \quad gv(f, g) = \int_{S^1} \log g'(x)(\log f' \circ g)'(x)dx,$$

et la formule d'intégration par partie permet d'écrire la version symétrique:

$$gv(f, g) = \frac{1}{2}\int_{S^1} (\log g'(x)(\log(f' \circ g))'(x) - \log(f' \circ g)(x)(\log g')'(x))dx.$$

Cette formule s'étend à $\mathrm{Lip}_+^1(S^1)$, en remplacant les dérivées f' et g' par les dérivées à droite f'_d et g'_d, et en considérant $D\log f'_d$ et $D\log g'_d$ comme les dérivées au sens des distributions des fonctions à variation bornée $\log f'_d$ et $\log g'_d$ [23]. Cette définition coincide en particulier avec celle de Ghys–Sergiescu [14] si l'on se restreint à $\mathrm{PL}_+(S^1) \subset \mathrm{Lip}^1_+(S^1)$. Nous obtenons:

$$\forall f, g \in \mathrm{Lip}^1_+(S^1),$$
$$gv(f,g) = \frac{1}{2}\int_{S^1} \log g'_d D\log(f'_d \circ g) - \log(f'_d \circ g) D\log g'_d.$$

L'idée de considérer $gv(f,g)$ comme l'aire enfermée par la courbe $\Phi : S^1 \to \mathbf{C}$

$$\Phi = \log g'_d + i \log f'_d \circ g$$

est initialement attribuée à Thurston [3], et a servi de base aux extensions de Hurder–Katok [19] et de Tsuboi [27]. En effet, si f et g sont dans $\mathrm{Lip}^\beta_+(S^1)$ pour $\beta > 1$, alors la formule ci-dessus donnant $gv(f,g)$ n'a plus de sens, étant donné que les mesures $D\log f'_d$ et $D\log g'_d$ ne sont pas définies. En revanche, quand $\beta \in [1, 2[$ la Proposition 2.9 nous assure que l'aire enfermée par la courbe Φ est bien définie, et nous prendrons cette aire comme la définition du cocycle de Godbillon–Vey.

Définition 3.3 (*[27]*)**.** Soit β un réel, $1 \le \beta < 2$. La formule suivante donne un 2-cocycle normalisé gv du groupe $\mathrm{Lip}^\beta_+(S^1)$:

$$\forall f, g \in \mathrm{Lip}^\beta_+(S^1), \quad gv(f,g) = \mathrm{Area}(\log g'_d,\ \log f'_d \circ g)$$

que nous appellerons le cocycle de Godbillon–Vey généralisé.

L'application $(\varphi, \psi) \mapsto \mathrm{Area}(\varphi, \psi)$ est $\mathbf{R}$-bilinéaire antisymétrique, et invariante par homéomorphisme. Donc gv est bien un cocycle: pour tout triplet $f, g, h \in \mathrm{Lip}^\beta_+(S^1)$,

$$gv(g,h) - gv(fg,h) + gv(f,gh) - gv(f,g) = 0.$$

De plus, l'antisymétrie implique que gv est normalisé, dans le sens où si f ou g ou fg est l'identité, alors $gv(f,g) = 0$.

D'autre part, par définition même, les restrictions de gv à $\mathrm{Diff}^2_+(S^1)$, à $\mathrm{PL}_+(S^1)$ et à $\mathrm{Diff}^{1+\frac{1}{\beta}}_+(S^1)$ quand $1 < \beta < 2$ coincident avec les cocycles de [3], de [14] et de [19].

Remarque 3.4. Dans [27], Tsuboi a défini un groupe $G \subset \mathrm{Lip}^2_+(S^1)$, qui contient tous les groupes $\mathrm{Lip}^\beta_+(S^1)$ pour $1 \le \beta < 2$, et il a démontré que le cocycle gv s'étend à G. Nous ne savons toujours pas si ce groupe est vraiment le domaine de définition maximal du cocycle gv.

Proposition 3.5. *Le cocycle gv n'est pas cohomologue à un cocycle borné.*

Démonstration. Soient $n \ge 1$ et $m \ge 1$ deux entiers. Nous allons d'abord construire deux homéomorphismes f et g appartenant au groupe de Thompson F, qui commutent, et tels que

$$gv(f,g) = mn\frac{(\log 2)^2}{2}.$$

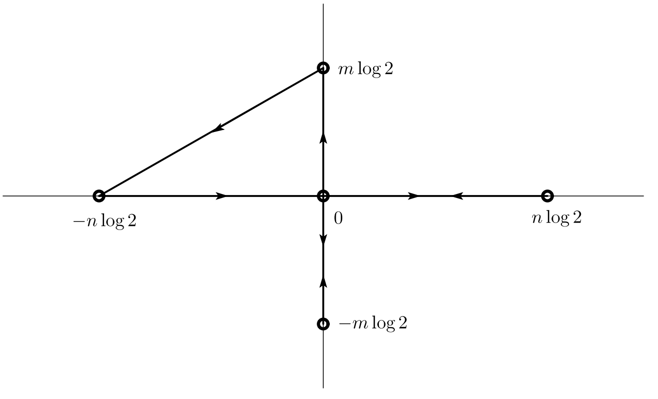

Fig. 3.

Posons:

$$a_n = \frac{1}{4} - \frac{1}{2^{n+2}}, \qquad b_n = \frac{1}{4} - \frac{1}{2^{2n+2}},$$
$$c_m = \frac{3}{4} + \frac{1}{2^{2m+2}}, \qquad d_m = 1 - \frac{1}{2^{m+2}} + \frac{1}{2^{2m+2}},$$

et définissons les homéomorphismes f et g par:

$$\begin{array}{llll} \forall x \in [0, a_n], & g(x) = \dfrac{x}{2^n} & \forall x \in [a_n, b_n], & g(x) = 2^n(x - b_n) + b_n \\ \forall x \in [b_n, 1], & g(x) = x & & \\ \forall x \in \left[0, \dfrac{a_n}{2^n}\right], & f(x) = 2^n x & \forall x \in \left[\dfrac{a_n}{2^n}, b_n\right], & f(x) = \dfrac{1}{2^n}(x - b_n) + b_n \\ \forall x \in [b_n, c_m], & f(x) = x & \forall x \in [c_m, d_m], & f(x) = \dfrac{1}{2^m}(x - c_m) + c_m \\ \forall x \in [d_m, 1], & f(x) = 2^m(x - 1) + 1. & & \end{array}$$

Remarquons que nous avons:

$$f|_{[0,\frac{3}{4}]} = (g|_{[0,\frac{3}{4}]})^{-1}.$$

La courbe $\Phi = \log g'_d + i \log(f \circ g)'_d$ consiste des 5 points:

$$(-n \log 2, 0), \qquad (n \log 2, 0), \qquad (0, 0), \qquad (0, -m \log 2), \qquad (0, m \log 2)$$

que nous relions dans l'ordre cyclique par 5 segments de droite, comme dans la Fig. 3. Area(Φ) est donc l'aire du triangle ainsi obtenu. De plus

$$\mathrm{Area}(\Phi) = \mathrm{Area}(\log g'_d, \log f'_d \circ g) = gv(f, g)$$

puisque $\mathrm{Area}(\log g'_d, \log g'_d) = 0$. Nous avons donc bien construit les homéomorphismes f et g désirés.

Considérons maintenant le cycle:

$$\sigma = (f, g) - (g, f).$$

Par la même méthode que ci-dessus, nous pouvons prouver que

$$gv(g, f) = -gv(f, g),$$

la nouvelle courbe à considérer étant donnée par les cinq points:

$$(n \log 2, 0), \qquad (-n \log 2, 0), \qquad (0, 0), \qquad (-m \log 2, -m \log 2), \qquad (m \log 2, m \log 2)$$

(nous voyons bien que l'aire du triangle obtenu est la même que ci-dessus et que les signes sont opposés). Donc

$$gv(\sigma) = gv(f, g) - gv(g, f) = mn(\log 2)^2$$

et ceci n'est pas borné. De plus, pour toute cochaîne α de degré 1, nous avons $\delta\alpha(\sigma) = \alpha(fg) - \alpha(gf) = 0$ puisque f et g commutent. Il s'en suit que $(gv + \delta\alpha)(\sigma)$ n'est pas borné, d'où le résultat. $\square$

4. Cocycles de groupe et cocycles cycliques

Soit Γ un groupe. Rappelons que l'algèbre du groupe $\mathbf{C}\Gamma$ est, par définition, le $\mathbf{C}$-espace vectoriel des sommes:

$$a = \sum_{g \in \Gamma} a_g g$$

où $(a_g)_{g \in \Gamma}$ est une famille de nombres complexes de support fini. Munie du produit $(a_g g)(b_h h) = a_g b_h gh$ et de l'involution $(a_g g)^* = \bar{a}_g g^{-1}$, $\mathbf{C}\Gamma$ est une algèbre involutive. De plus, pour $a \in \mathbf{C}\Gamma$ fixé, la formule

$$\forall \theta \in l^2\Gamma,\ \forall g \in \Gamma, \quad \langle a, \theta \rangle_g = \sum_{h \in \Gamma} a_{gh^{-1}} \theta_h$$

définit un opérateur continu sur $l^2\Gamma$, dont la norme sera désignée par $\|a\|$. La C*-algèbre réduite du groupe Γ, que nous désignerons par $C_r^*\Gamma$, est l'adhérence de $\mathbf{C}\Gamma$ dans la C*-algèbre des opérateurs continus sur $l^2\Gamma$.

Lemme 4.1. *Pour tout $a \in \mathbf{C}\Gamma$, nous avons:* $\sqrt{\sum_{g \in \Gamma} |a_g|^2} \leq \|a\|$.

Démonstration. Nous avons:

$$\|a\|^2 = \mathrm{Sup} \left\{ \sum_{g \in \Gamma} |\langle a, \theta \rangle_g|^2,\ \theta \in l^2\Gamma,\ \sum_{g \in \Gamma} |\theta_g|^2 \leq 1 \right\}.$$

En considérant l'élément $\theta \in l^2\Gamma$ tel que $\theta_e = 1$ et $\forall g \neq e$, $\theta_g = 0$, nous obtenons le résultat. $\square$

Soit $n \geq 1$ un entier. Un n-cocycle du groupe Γ est une application $\omega : \Gamma^n \to \mathbf{C}$ telle que, $\forall (g_1, \ldots, g_n, g_{n+1}) \in \Gamma^{n+1}$,

$$\begin{aligned}\delta\omega(g_1, \ldots, g_{n+1}) &= \omega(g_2, \ldots, g_{n+1}) \\ &\quad + \sum_{i=1}^{n} (-1)^i \omega(g_1, \ldots g_i g_{i+1}, \ldots, g_{n+1}) + (-1)^{n+1} \omega(g_1, \ldots, g_n) = 0.\end{aligned}$$

De plus, ω sera dit normalisé si:

$$(\exists i \in \{1, \ldots, n\},\ g_i = 1 \text{ ou } g_1 g_2 \ldots g_n = 1) \quad \Rightarrow \quad \omega(g_1, \ldots, g_n) = 0.$$

La construction de Connes [7] permet d'associer à un tel ω un n-cocycle cyclique τ_ω sur l'algèbre du groupe $\mathbf{C}\Gamma$, par la formule:

$$\tau_\omega(a^0, a^1, \ldots, a^n) = \sum_{g_0 \cdots g_n = 1} a^0_{g_0} a^1_{g_1} \ldots a^n_{g_n}\ \omega(g_1, \ldots, g_n).$$

Plus précisémment, τ_ω est une forme $(n+1)$-linéaire sur $\mathbf{C}\Gamma$, à valeurs complexes, et satisfaisant aux deux équations:

$$\begin{aligned}&\sum_{i=0}^{n} (-1)^i \tau_\omega(a^0, \ldots, a^i a^{i+1}, \ldots, a^{n+1}) + (-1)^{n+1} \tau_\omega(a^{n+1} a^0, a^1, \ldots, a^n) = 0, \\ &\tau_\omega(a^0, a^1, \ldots, a^n) = (-1)^n \tau_\omega(a^n, a^0, \ldots, a^{n-1}),\end{aligned}$$

pour tout $(n+2)$-uplet $(a^0, a^1, \ldots, a^{n+1})$ d'éléments de $\mathbf{C}\Gamma$.

La premiére équation dit que τ_ω est un cocycle de Hochschild, et découle directement du fait que ω est un cocycle de groupe. La deuxième équation dit que τ_ω est cyclique, et est due au fait que ω est normalisé. Ces deux formules se vérifient facilement par le calcul.

Soit maintenant $\Omega^*\Gamma$ l'algèbre différentielle graduée universelle associée au groupe Γ [6]. Pour tout $k \geq 0$,

$$\Omega^k \Gamma = \mathbf{C}\Gamma \otimes \mathbf{C}\Gamma \otimes \cdots \otimes \mathbf{C}\Gamma$$

est défini comme le produit tensoriel sur $\mathbf{C}$ de $k+1$ facteurs de $\mathbf{C}\Gamma$. Un élément de $\Omega^k\Gamma$ s'écrit de manière unique sous la forme d'une combinaison linéaire finie de symboles du type $g_0 dg_1 \ldots dg_k$ où $\forall i \in \{0, \ldots, k\}$, $g_i \in \Gamma$. Le produit et la différentielle sur $\Omega^*\Gamma$ sont définis de manière usuelle [6]:

$$\begin{aligned}&d(g_1 dg_2 \ldots dg_n) = dg_1 dg_2 \ldots dg_n, \\ &(g_0 dg_1 \ldots dg_k)(g_{k+1} dg_{k+2} \ldots dg_n) = (-1)^k g_0 g_1 dg_2 \ldots dg_n \\ &\qquad + \sum_{i=1}^{k} (-1)^{k-i} g_0 dg_1 \ldots d(g_i g_{i+1}) \ldots dg_n,\end{aligned}$$

pour tous entiers $1 \leq k \leq n$ et pour tout $(n+1)$-uplet $g_0, \ldots, g_n$ d'éléments de Γ.

La donnée d'un n-cocycle cyclique τ sur $\mathbf{C}\Gamma$ correspond bijectivement [6], par la formule:

$$\forall a^0, a^1, \ldots, a^n \in \mathbf{C}\Gamma, \quad \tau(a^0, a^1, \ldots, a^n) = \hat{\tau}(a^0 da^1 \ldots da^n),$$

à la donnée d'une trace fermée graduée sur $\Omega^n\Gamma$, c'est-à-dire une forme linéaire $\hat{\tau}$: $\Omega^n\Gamma \to \mathbf{C}$ telle que pour tout $(n+2)$-uplet $a^0, a^1, \ldots, a^{n+1}$ d'éléments de $\mathbf{C}\Gamma$ et pour tout $k \in \{0, \ldots, n\}$,

$$\begin{aligned}
&\hat{\tau}(da^1 da^2 \ldots da^n) = 0,\\
&\hat{\tau}(a^0 da^1 \ldots da^k a^{k+1} da^{k+2} \ldots da^{n+1})\\
&\quad = (-1)^{k(n-k)} \hat{\tau}(a^{k+1} da^{k+2} \ldots da^{n+1} a^0 da^1 \ldots da^k).
\end{aligned}$$

Le cocycle cyclique τ_ω associé au cocycle de groupe ω n'est pas en général une forme $(n+1)$-linéaire continue, et on ne peut donc pas espérer l'étendre à la C*-algèbre $C_r^*\Gamma$ en entier. Cependant, la définition suivante, due à Connes [7], nous donne une condition de continuité partielle, qui sera suffisante pour que τ_ω s'étende à une sous-algèbre "pleine" de $C_r^*\Gamma$ [26].

Définition 4.2 (*[7]*)**.** Soit τ un n-cocycle cyclique sur $\mathbf{C}\Gamma$. Nous dirons que τ est une n-trace sur $C_r^*\Gamma$ si la condition suivante est vérifiée:
$\forall a^1, a^2, \ldots, a^n \in \mathbf{C}\Gamma, \exists C \geq O,$

$$\forall x^1, x^2, \ldots, x^n \in \mathbf{C}\Gamma, \quad |\hat{\tau}(x^1 da^1 x^2 da^2 \ldots x^n da^n)| \leq C \prod_{i=1}^{n} \|x^i\|.$$

Le Théorème 2.7 de [7] affirme qu'une n-trace τ s'étend à une sous-algèbre $\mathcal{B}$, avec

$$\mathbf{C}\Gamma \subset \mathcal{B} \subset C_r^*\Gamma,$$

et que $\mathcal{B}$ est stable par calcul fonctionnel holomorphe dans $C_r^*\Gamma$, ce qui implique que l'inclusion

$$\mathcal{B} \longrightarrow C_r^*\Gamma$$

induit des isomorphismes en K-théorie: $K_i(\mathcal{B}) \cong K_i(C_r^*\Gamma), i \in \{0, 1\}$. Il s'en suit qu'une n-trace τ induit un morphisme global $K_i(C_r^*\Gamma) \to \mathbf{C}$ (ici $i = 0$ si n est pair, $i = 1$ si n est impair) [6,7].

Quand ω est un n-cocycle de groupe normalisé, nous pouvons donc nous demander à quelle condition le cocycle cyclique τ_ω sera une n-trace.

Quand $n = 1$, c'est toujours vrai. En effet, si ω est un 1-cocycle d'un groupe Γ quelconque, alors

$$\forall x, a \in \mathbf{C}\Gamma, \quad \hat{\tau}_\omega(x da) = \tau_\omega(x, a) = \sum_{g \in \Gamma} x_{g^{-1}} a_g \omega(g).$$

Pour $a \in \mathbf{C}\Gamma$ fixé, nous avons donc:

$$\forall x \in \mathbf{C}\Gamma, \quad |\hat{\tau}_\omega(x da)| \leq \|x\| \sum_{g \in \Gamma} |a_g \omega(g)|.$$

(puisque $\forall g \in \Gamma, |x_g| \leq \|x\|$ par le Lemme 4.1). Le cocycle cyclique τ_ω est donc une 1-trace sur $C_r^*\Gamma$.

Quand $n \geq 2$ par contre, le résultat ci-dessus n'est plus valable: sur le groupe résoluble $\Gamma = \mathbf{Z}^2 \rtimes_\alpha \mathbf{Z}(\alpha \in \mathrm{SL}_2(\mathbf{Z}), \mathrm{Tr}(\alpha) > 2)$ par exemple, il existe un 2-cocycle de groupe normalisé dont le cocycle cyclique associé n'est pas une 2-trace ([8] pp. 256–257).

Revenons maintenant au cocycle de Godbillon–Vey. Nous pouvons associer au cocycle gv de la Définition 3.3 le 2-cocycle cyclique suivant, que nous appellerons le cocycle cyclique de Godbillon–Vey généralisé.

Définition 4.3. Soit β un réel, $1 \leq \beta < 2$. La formule suivante donne un 2-cocycle cyclique sur l'algèbre $\mathbf{C}\mathrm{Lip}_+^\beta(S^1)$:

$$\tau_{gv}(a^0, a^1, a^2) = \sum_{g_0 g_1 g_2 = 1} a^0_{g_0} a^1_{g_1} a^2_{g_2} gv(g_1, g_2),$$

dont la restriction à $\mathbf{C}\mathrm{Diff}_+^2(S^1)$ coincide avec le cocycle cyclique de Godbillon–Vey défini par Connes dans [7].

Nous pouvons maintenant énoncer le premier résultat de cet article.

Proposition 4.4. *Pour tout réel $\beta \in [1, 2[$, le cocycle cyclique τ_{gv} est une 2-trace sur $C_r^*\mathrm{Lip}_+^\beta(S^1)$.*

Démonstration. Posons $\Gamma = \mathrm{Lip}_+^\beta(S^1)$. Pour $g_1, g_2, h_1, h_2 \in \Gamma$, nous avons:

$$\begin{aligned} \hat{\tau}_{gv}(g_1 dh_1 g_2 dh_2) &= \hat{\tau}_{gv}(g_1 d(h_1 g_2) dh_2) - \hat{\tau}_{gv}(g_1 h_1 dg_2 dh_2) \\ &= \tau_{gv}(g_1, h_1 g_2, h_2) - \tau_{gv}(g_1 h_1, g_2, h_2), \end{aligned}$$

et donc

$$\hat{\tau}_{gv}(g_1 dh_1 g_2 dh_2) = gv(h_1 g_2, h_2) - gv(g_2, h_2) \text{ si } g_1 h_1 g_2 h_2 = id,$$
$$\hat{\tau}_{gv}(g_1 dh_1 g_2 dh_2) = 0 \text{ si } g_1 h_1 g_2 h_2 \neq id.$$

De plus,

$$gv(h_1 g_2, h_2) - gv(g_2, h_2) = \mathrm{Area}(\log(h_2)'_d, \log(h_1)'_d \circ (g_2 h_2))$$

et donc, d'après la Proposition 2.9, pour h_1 et h_2 fixés, la fonction

$$g_2 \mapsto gv(h_1 g_2, h_2) - gv(g_2, h_2)$$

est bornée par la constante:

$$C_{h_1, h_2} = K_\beta \| \log(h_1)'_d \|_\beta \| \log(h_2)'_d \|_\beta.$$

Fixons maintenant $h_1, h_2 \in \Gamma$. Pour tout $x^1, x^2 \in \mathbf{C}\Gamma$, nous avons:

$$\hat{\tau}_{gv}(x^1 dh_1 x^2 dh_2) = \sum_{g \in \Gamma} x^1_g \theta_{g^{-1}}$$

où $\theta \in l^2\Gamma$ est l'élément défini par:

$$\forall g \in \Gamma, \quad \theta_g = x^2_{h_1^{-1} g h_2^{-1}} (gv(g h_2^{-1}, h_2) - gv(h_1^{-1} g h_2^{-1}, h_2)).$$

Comme

$$\forall g \in \Gamma, \quad |\theta_g| \le C_{h_1,h_2}\, |x^2_{h_1^{-1}gh_2^{-1}}|$$

nous avons

$$\sum_{g\in\Gamma} |\theta_g|^2 \le C^2_{h_1,h_2} \sum_{g\in\Gamma} |x^2_g|^2$$

et donc

$$|\hat{\tau}_{gv}(x^1dh_1x^2dh_2)| \le C_{h_1,h_2} \sqrt{\sum_{g\in\Gamma} |x^1_g|^2} \sqrt{\sum_{g\in\Gamma} |x^2_g|^2} \le C_{h_1,h_2} \|x^1\| \|x^2\|.$$

On en déduit facilement que pour $a^1, a^2 \in \mathbf{C}\Gamma$ quelconques, en posant

$$C = \sum_{h_1,h_2\in\Gamma} |a^1_{h_1}||a^2_{h_2}| C_{h_1,h_2}$$

nous avons:

$$\forall x^1, x^2 \in \mathbf{C}\Gamma, \quad |\hat{\tau}_{gv}(x^1da^1x^2da^2)| \le C\|x^1\|\|x^2\|. \quad \square$$

Le théorème de l'indice de Connes et Moscovici [10,26] fournit le corollaire suivant:

Corollaire 4.5. *Pour tout réel* $\beta \in [1, 2[$, *la paire* $(\mathrm{Lip}^{\beta}_{+}(S^1), gv)$ *vérifie la conjecture de Novikov.*

Remarquons que les résultats de la Proposition 4.4 et du Corollaire 4.5 restent vrais si le cocycle gv est remplacé par n'importe quel 2-cocycle normalisé ω, d'un groupe Γ quelconque, tel que pour h_1 et h_2 fixés, la fonction

$$g \mapsto \omega(h_1g, h_2) - \omega(g, h_2)$$

soit bornée (ceci a déjà été signalé par Alain Connes dans [8] pp. 256-257). C'est le cas en particulier si le 2-cocycle ω est un cocycle borné. Le résultat suivant doit être déjà connu. Nous avons jugé bon cependant d'en inclure une démonstration détaillée.

Proposition 4.6. *Soit* $eu \in H^2(\mathrm{Homeo}_+(S^1); \mathbb{Q})$ *le cocycle d'Euler. Le cocycle cyclique* τ_{eu} *est une* 2*-trace sur* $C^*_r\mathrm{Homeo}_+(S^1)$.

Démonstration. Soit $\widetilde{\mathrm{Homeo}}_+(S^1)$ le groupe des homéomorphismes croissants de $\mathbf{R}$ qui commutent avec les translations entières:

$$\widetilde{\mathrm{Homeo}}_+(S^1) = \{F \in \mathrm{Homeo}_+(\mathbf{R}), \forall x \in \mathbf{R}, F(x+1) = F(x) + 1\}.$$

Nous avons une projection naturelle:

$$\pi : \widetilde{\mathrm{Homeo}}_+(S^1) \longrightarrow \mathrm{Homeo}_+(S^1)$$

dont le noyau est le groupe des translations entières $\{id + k, k \in \mathbf{Z}\}$. Il est connu que la classe d'Euler de l'extension centrale:

$$0 \to \mathbf{Z} \to \widetilde{\mathrm{Homeo}}_+(S^1) \to \mathrm{Homeo}_+(S^1) \to 1$$

peut être représentée par le cocycle borné $c \in H^2(\mathrm{Homeo}_+(S^1); \mathbf{Z})$ suivant.

Pour tout $f \in \mathrm{Homeo}_+(S^1)$ soit $\sigma(f) \in \widetilde{\mathrm{Homeo}}_+(S^1)$ le relevé de f tel que $\sigma(f)(0) \in [0, 1[$. Pour $f, g \in \mathrm{Homeo}_+(S^1)$, l'homéomorphisme $\sigma(f \circ g)^{-1}\sigma(f)\sigma(g)$ est une translation entière. En posant:

$$\forall f, g \in \mathrm{Homeo}_+(S^1), \quad c(f, g) = \sigma(f \circ g)^{-1}\sigma(f)\sigma(g)(0)$$

nous obtenons un 2-cocycle qui ne peut prendre que les valeurs 0 ou 1 (voir [13]).

Pour obtenir un cocycle normalisé cohomologue à c, il nous suffit maintenant de remarquer que, σ étant défini comme ci-dessus, $\sigma(f^{-1})^{-1}$ est aussi un relevé de f et que l'expression

$$c'(f, g) = \sigma(g^{-1} \circ f^{-1})\sigma(f^{-1})^{-1}\sigma(g^{-1})^{-1}(0)$$

nous donne donc un 2-cocycle borné cohomologue à c. Par suite, en posant

$$eu = \frac{1}{2}(c + c')$$

nous obtenons un 2-cocycle borné cohomologue à c et nous vérifions facilement qu'il est, cette fois-ci, normalisé (eu ne peut prendre en fait que les valeurs 0, $-\frac{1}{2}$ ou $\frac{1}{2}$). La même démonstration que celle de la Proposition 4.4 montre que le cocycle cyclique associé τ_{eu} est une 2-trace. □

Corollaire 4.7. *La paire* $(\mathrm{Homeo}_+(S^1), eu)$ *vérifie la conjecture de Novikov.*

5. Cup-produits

Nous voudrions maintenant généraliser les résultats de la section précédente aux puissances des cocycles gv et eu.

Rappelons que le cup-produit de deux cocycles du groupe Γ est défini de la manière suivante [11]. Si ω est un n-cocycle et ω' un m-cocycle de Γ, alors la formule $\forall(g_1, \ldots, g_{n+m}) \in \Gamma^{n+m}$,

$$\omega\omega'(g_1, \ldots, g_{n+m}) = \omega(g_1, \ldots, g_n)\omega'(g_{n+1}, \ldots, g_{n+m})$$

définit un $(n + m)$-cocycle que nous dénoterons par $\omega\omega'$.

La première difficulté à laquelle nous nous heurtons est que, même si ω et ω' sont normalisés, le cocycle $\omega\omega'$ n'est pas normalisé en général. Nous devons donc chercher un cocycle normalisé cohomologue à $\omega\omega'$.

D'autre part, le cup-produit de deux cocycles cycliques sur $\mathbf{C}\Gamma$ est défini par la formule usuelle ([8] pp. 191–192): si τ est un n-cocycle cyclique et τ' est un m-cocycle cyclique sur $\mathbf{C}\Gamma$, alors

$$\widehat{\tau\#\tau'} = (\hat{\tau} \otimes \hat{\tau}') \circ \pi,$$

où π est le morphisme naturel d'algèbres différentielles graduées

$$\pi : \Omega^{n+m}(\Gamma \times \Gamma) \to \bigoplus_{k=0}^{n+m} \Omega^k(\Gamma) \otimes \Omega^{n-k}(\Gamma)$$

donné par: $\forall g_0, \ldots, g_{n+m} \in \Gamma, \forall h_0, \ldots, h_{n+m} \in \Gamma,$

$$\pi((g_0 \otimes h_0)d(g_1 \otimes h_1) \ldots d(g_{n+m} \otimes h_{n+m})) \\ = (g_0 \otimes h_0) \prod_{j=1}^{n+m} (dg_j \otimes h_j + g_j \otimes dh_j).$$

$\widehat{\tau \# \tau'}$ est une trace fermée graduée sur $\Omega^{n+m}(\Gamma \times \Gamma)$, et donc $\tau \# \tau'$ est bien un $(n+m)$-cocycle cyclique sur $\mathbf{C}\Gamma \otimes \mathbf{C}\Gamma \cong \mathbf{C}(\Gamma \times \Gamma)$ [8].

Nous définissons alors le cup-produit $\tau \cup \tau'$ comme le $(n+m)$-cocycle cyclique sur $\mathbf{C}\Gamma$ donné par la formule:

$$\tau \cup \tau' = \phi^*(\tau \# \tau')$$

où $\phi : \mathbf{C}\Gamma \to \mathbf{C}\Gamma \otimes \mathbf{C}\Gamma$ désigne l'application diagonale, définie par:

$$\phi\left(\sum_{g \in \Gamma} a_g g\right) = \sum_{g \in \Gamma} a_g g \otimes g.$$

ϕ étant évidemment un morphisme d'algèbres involutives, $\tau \cup \tau'$ est bien un $(n+m)$-cocycle cyclique sur $\mathbf{C}\Gamma$.

Notre premier but est d'explorer la relation entre le cup-produit de deux cocycles de groupes et cup-produit des cocycles cycliques associés.

Le lemme suivant, qui permet de caractériser les cocycles cycliques associés à des cocycles de groupe, nous a été suggéré par le referee.

Lemme 5.1. *Soit τ un n-cocycle cyclique sur $\mathbf{C}\Gamma$. Il existe alors un n-cocycle de groupe normalisé ω tel que $\tau = \tau_\omega$ si et seulement si τ vérifie les deux conditions suivantes:*

- $\forall g_1, \ldots, g_n \in \Gamma, \tau(1, g_1, \ldots, g_n) = 0$
- $\forall g_0, \ldots, g_n \in \Gamma, g_0 g_1 \ldots g_n \neq 1 \Rightarrow \tau(g_0, g_1, \ldots, g_n) = 0.$

Démonstration. Il est clair que si ω est un cocycle de groupe normalisé, alors le cocycle cyclique τ_ω vérifie ces deux conditions. Réciproquement, soit τ un cocycle cyclique vérifiant ces deux conditions et posons:

$$\forall g_1, \ldots, g_n \in \Gamma, \qquad \omega(g_1, \ldots, g_n) = \tau((g_1 \ldots g_n)^{-1}, g_1, \ldots, g_n).$$

Un calcul direct montre alors que $\delta\omega = 0$, que ω est normalisé et que $\tau = \tau_\omega$. □

La proposition suivante devrait être connue et nous semble pouvoir se déduire des résultats de [4]. Nous en incluons cependant une démonstration directe.

Proposition 5.2. *Soient ω un n-cocycle normalisé et ω' un m-cocycle normalisé d'un groupe Γ quelconque. Alors il existe un $(n+m)$-cocycle normalisé c de Γ tel que:*

$$\tau_c = \tau_\omega \cup \tau_{\omega'}$$

et c est de plus cohomologue à $\frac{(n+m)!}{n!m!}\omega\omega'$.

Démonstration. Pour $g_0, \dots, g_{n+m} \in \Gamma$, la quantité $\widehat{\tau_\omega \cup \tau_{\omega'}}(g_0 dg_1 \dots dg_{n+m})$ est égale à la somme:

$$\sum_\sigma \epsilon(\sigma)\hat{\tau}_\omega(\lambda_1 dg_{\sigma(1)} \dots \lambda_n dg_{\sigma(n)})\hat{\tau}_{\omega'}(\mu_1 dg_{\sigma(n+1)} \dots \mu_m dg_{\sigma(n+m)})$$

où σ parcourt l'ensemble des permutations de $\{1, \dots, n+m\}$ telles que

$$\sigma(1) < \dots < \sigma(n) \quad \text{et} \quad \sigma(n+1) < \dots < \sigma(n+m),$$

$\epsilon(\sigma) \in \{-1, 1\}$ étant la signature de σ, et les termes $\lambda_i \in \Gamma$ et $\mu_i \in \Gamma$ sont définis par:

$$\lambda_1 = \left(\prod_{j=\sigma(n)+1}^{n+m} g_j\right) g_0 \left(\prod_{j=1}^{\sigma(1)-1} g_j\right),$$

$$\forall i \in \{2, \dots, n\}, \lambda_i = \prod_{j=\sigma(i-1)+1}^{\sigma(i)-1} g_j,$$

$$\mu_1 = \left(\prod_{j=\sigma(n+m)+1}^{n+m} g_j\right) g_0 \left(\prod_{j=1}^{\sigma(n+1)-1} g_j\right),$$

$$\forall i \in \{2, \dots, m\},\ \mu_i = \prod_{j=\sigma(n+i-1)+1}^{\sigma(n+i)-1} g_j,$$

(avec la convention que $\prod_{j=r}^{s} g_j = 1$ si $r > s$). Nous avons évidemment:

$$\lambda_1 g_{\sigma(1)} \dots \lambda_n g_{\sigma(n)} = 1 \iff \mu_1 g_{\sigma(n+1)} \dots \mu_m g_{\sigma(n+m)} = 1 \iff g_0 \dots g_{n+m} = 1$$

et

$$g_{n+m} = 1 \quad \Rightarrow \quad \tau_\omega \cup \tau_{\omega'}(g_0, \dots, g_{n+m}) = 0.$$

Le cocycle cyclique $\tau_\omega \cup \tau_{\omega'}$ vérifie donc les conditions du Lemme 5.1. Posons:

$$\forall g_1, \dots, g_{n+m} \in \Gamma, \quad c(g_1, \dots, g_{n+m}) = \widehat{\tau_\omega \cup \tau_{\omega'}}((g_1 \dots g_{n+m})^{-1} dg_1 \dots dg_{n+m}).$$

Nous pouvons alors écrire:

$$c(g_1, \dots, g_{n+m}) = \sum_\sigma \epsilon(\sigma) c_\sigma(g_1, \dots, g_{n+m})$$

avec, pour chaque σ,

$$c_\sigma(g_1, \dots, g_{n+m}) = \hat{\tau}_\omega(\lambda_1 dg_{\sigma(1)} \dots \lambda_n dg_{\sigma(n)}) \quad \hat{\tau}_{\omega'}(\mu_1 dg_{\sigma(n+1)} \dots \mu_m dg_{\sigma(n+m)}),$$

λ_i, μ_i étant définis comme ci-dessus en remplaçant g_0 par $(g_1 \dots g_{n+m})^{-1}$.

Nous affirmons alors que chaque terme $\epsilon(\sigma)c_\sigma$ est un cocycle de groupe cohomologue à $\omega\omega'$, c'est-à-dire qu'il existe une $(n+m-1)$-cochaîne α_σ telle que

$$\epsilon(\sigma)c_\sigma - \omega\omega' = \delta\alpha_\sigma.$$

En effet, toute permutation σ comme ci-dessus s'obtient par "décalages successifs", en définissant, pour tout $p \in \{1, \ldots, n\}$, la permutation σ_p par:

$$\begin{aligned} &\forall i \in \{1, \ldots, p\}, && \sigma_p(i) &&= \sigma(i) \\ &\forall i \in \{p+1, \ldots, n\}, && \sigma_p(i) &&= \sigma(p) + i - p \\ &\sigma_p(n+1) < \cdots < \sigma_p(n+m). \end{aligned}$$

Nous avons alors $\sigma_n = \sigma$, et en posant de plus $\sigma_0 = \mathrm{id}$, nous voyons que chaque σ_p pour $p \in \{1, \ldots, n\}$ s'obtient à partir de σ_{p-1} par un nombre fini de "décalages d'un cran".

Il nous suffit donc de montrer que $\epsilon(\sigma')c_{\sigma'} - \epsilon(\sigma)c_\sigma$ est un cobord quand les permutations σ et σ' sont définies comme ci-dessous. Soient p et k deux entiers, avec

$$0 \leq p \leq n-1, \quad p+1 \leq k \leq p+m,$$

soit σ une permutation de $\{1, \ldots, n+m\}$ telle que

$$\begin{aligned} &\sigma(1) < \cdots < \sigma(p) \leq k-1 \\ &\forall i \in \{p+1, \ldots, n\}, \quad \sigma(i) = k + i - p - 1 \\ &\sigma(n+1) < \cdots < \sigma(n+m) \end{aligned}$$

et soit σ' la permutation définie à partir de σ en décalant d'un cran les images de $\{p+1, \ldots, n\}$, i.e.

$$\begin{aligned} &\forall i \in \{1, \ldots, p\}, && \sigma'(i) &&= \sigma(i) \\ &\forall i \in \{p+1, \ldots, n\}, && \sigma'(i) &&= k + i - p \\ &\sigma'(n+1) < \cdots < \sigma'(n+m). \end{aligned}$$

Un calcul permet alors de montrer que

$$(-1)^{n-p} c_{\sigma'} - c_\sigma = \delta\alpha$$

où α est définie par la formule (en posant $l = n - p - 1$):

$$\begin{aligned} &\alpha(g_1, \ldots, g_{n+m-1}) \\ &\quad = (-1)^{k+l+1} \hat{\tau}_\omega(g_0 \theta(g_1, \ldots, g_{k-1}) dg_k \ldots dg_{k+l} g_{k+l+1} \ldots g_{n+m+1}) \cdot \\ &\qquad \cdot \hat{\tau}_{\omega'}(g_0 \tilde{\theta}(g_1, \ldots, g_{k-1}) d(g_k \ldots g_{k+l}) dg_{k+l+1} \ldots dg_{n+m-1}) \end{aligned}$$

où $g_0 = (g_1 \ldots g_{n+m-1})^{-1}$, où $\theta \in \Omega^p(\Gamma)$ est définie par:

$$\theta(g_1, \ldots, g_{k-1}) = \lambda_1 dg_{\sigma(1)} \ldots \lambda_p dg_{\sigma(p)} \lambda_{p+1}$$

avec

$$\lambda_1 = \prod_{j=1}^{\sigma(1)-1} g_j, \quad \forall i \in \{2, \ldots, p+1\}, \qquad \lambda_i = \prod_{j=\sigma(i-1)+1}^{\sigma(i)-1} g_j,$$

et où $\tilde{\theta} \in \Omega^{k-1-p}(\Gamma)$ est définie par:

$$\tilde{\theta}(g_1, \ldots, g_{k-1}) = \mu_1 g_{\sigma(1)} \ldots \mu_p g_{\sigma(p)} \mu_{p+1}$$

avec

$$\mu_1 = \prod_{j=1}^{\sigma(1)-1} dg_j, \quad \forall i \in \{2, \dots, p+1\}, \qquad \mu_i = \prod_{j=\sigma(i-1)+1}^{\sigma(i)-1} dg_j.$$

(Dans les formules ci-dessus, on pose par convention $\prod_{j=r}^{s} g_j = 1$ et $\prod_{j=r}^{s} dg_j = 1$ quand $r > s$, et $\theta = \tilde{\theta} = 1$ quand $k = 1$). En calculant $\delta\alpha$, on trouve plus précisément $\delta\alpha = (-1)^{n-p} c_{\sigma'} - c_\sigma + \beta$, où β est une somme de $k+1$ termes, et on montre par récurrence sur k que β est toujours identiquement nulle. □

Exemple 5.3. Quand $n = m = 1$, nous obtenons simplement:

$$\widehat{\tau_\omega \cup \tau_{\omega'}}(g_0 dg_1 dg_2) = \hat{\tau}_\omega(g_0 dg_1 g_2)\hat{\tau}_{\omega'}(g_0 g_1 dg_2) - \hat{\tau}_\omega(g_0 g_1 dg_2)\hat{\tau}_{\omega'}(g_0 dg_1 g_2)$$

et donc

$$c(g_1, g_2) = \omega(g_1)\omega'(g_2) - \omega(g_2)\omega'(g_1).$$

De plus, $c - 2\omega\omega' = \delta\alpha$ où α est définie par

$$\forall g \in \Gamma, \quad \alpha(g) = \omega(g)\omega'(g).$$

Exemple 5.4. Quand $n = m = 2$ et $\omega = \omega'$, nous obtenons:

$$\frac{1}{2} c(g_1, g_2, g_3, g_4) = \omega(g_1, g_2 g_3 g_4)\omega(g_3, g_4) - \omega(g_1 g_2, g_3 g_4)\omega(g_2 g_3, g_4) + \omega(g_1 g_2 g_3, g_4)\omega(g_2, g_3 g_4)$$

et nous voyons que c est bien normalisé. De plus, le calcul ci-dessus montre que:

$$c(g_1, g_2, g_3, g_4) - 6\omega(g_1, g_2)\omega(g_3, g_4) = \delta\alpha(g_1, g_2, g_3, g_4)$$

où, après simplification,

$$\alpha(g_1, g_2, g_3) = -2\omega(g_1, g_2)(\omega(g_1 g_2, g_3) + \omega(g_2, g_3)).$$

Nous ne savons toujours pas si le cup-produit d'une n-trace par une m-trace est une $(n+m)$-trace en général. Cependant, le résultat suivant est valable quand $m = 1$.

Proposition 5.5. *Soient ω un n-cocycle normalisé et ω' un 1-cocycle d'un groupe Γ quelconque. Si τ_ω est une n-trace sur $C_r^* \Gamma$ alors le cup-produit $\tau_\omega \cup \tau_{\omega'}$ est une $(n+1)$-trace sur $C_r^* \Gamma$.*

Démonstration. Pour $g_1, \dots, g_{n+1}, h_1, \dots, h_{n+1}$ dans Γ, nous avons:

$$\pi\left(\prod_{i=1}^{n+1} (g_i \otimes g_i) d(h_i \otimes h_i)\right) = \prod_{i=1}^{n+1} (g_i dh_i \otimes g_i h_i + g_i h_i \otimes g_i dh_i).$$

La quantité $\widehat{\tau_\omega \cup \tau_{\omega'}}(g_1 dh_1 \dots g_{n+1} dh_{n+1})$ est donc égale à la somme:

$$\sum_{k=1}^{n+1} (-1)^{n+1-k} \hat{\tau}_\omega(g_1 dh_1 \dots g_k h_k g_{k+1} dh_{k+1} \dots g_{n+1} dh_{n+1}) \hat{\tau}_{\omega'} \times (g_1 h_1 \dots g_k dh_k \dots g_{n+1} h_{n+1}).$$

De plus, quand $g_1h_1\dots g_{n+1}h_{n+1}=1$, nous avons:

$$\hat{\tau}_{\omega'}(g_1h_1\dots g_kdh_k\dots g_{n+1}h_{n+1})=\hat{\tau}_{\omega'}(h_k^{-1}dh_k)=\omega'(h_k).$$

Fixons maintenant $h_1,\dots,h_{n+1}$ dans Γ. Pour $x^1,\dots,x^{n+1}\in\mathbf{C}\Gamma$, nous avons donc:

$$\begin{aligned}&\widehat{\tau_\omega\cup\tau_{\omega'}}(x^1dh_1\dots x^{n+1}dh_{n+1})\\&\quad=\sum_{k=1}^{n+1}(-1)^{n+1-k}\hat{\tau}_\omega(x^1dh_1\dots x^kh_kx^{k+1}dh_{k+1}\dots x^{n+1}dh_{n+1})\omega'(h_k).\end{aligned}$$

Si τ_ω est une n-trace, les éléments $h_k\in\Gamma$ étant de norme 1, nous en déduisons facilement l'existence d'une constante $K(h_1,\dots,h_{n+1})\in\mathbf{R}$ telle que:

$$|\widehat{\tau_\omega\cup\tau_{\omega'}}(x^1dh_1\dots x^{n+1}dh_{n+1})|\le K(h_1,\dots,h_{n+1})\prod_{i=1}^{n+1}\|x^i\|.$$

Par suite, pour $a^1,\dots,a^{n+1}\in\mathbf{C}\Gamma$ fixés, en posant

$$C=\sum_{h_1,\dots,h_{n+1}\in\Gamma}|a^1_{h_1}|\dots|a^{n+1}_{h_{n+1}}|K(h_1,\dots,h_{n+1})$$

nous avons

$$\forall x^1,\dots,x^{n+1}\in\mathbf{C}\Gamma,\quad |\widehat{\tau_\omega\cup\tau_{\omega'}}(x^1da^1\dots x^{n+1}da^{n+1})|\le C\prod_{i=1}^{n+1}\|x^i\|.\quad\square$$

Remarque 5.6. Nous ne savons pas si le résultat de la Proposition 5.5 ci-dessus se généralise quand ω' est un m-cocycle de groupe normalisé, avec $m\ge 2$ (nous n'avons pas réussi à le démontrer).

6. Les puissances des cocycles d'Euler et de Godbillon–Vey

Nous allons maintenant traiter le cas des puissances des cocycles gv et eu. Notre problème provient évidemment du fait que nous n'avons pas réussi à généraliser la Proposition 5.5 au cas où ω' serait un 2-cocycle. Nous allons donc avoir recours à des arguments directs, spécifiques aux cocycles gv et eu.

Nous commençons par quelques rappels sur les produits croisés. Soit Γ un sous-groupe de $\mathrm{Homeo}_+(S^1)$. Pour tout entier $n\ge 1$, soit

$$T^n=S^1\times\dots\times S^1$$

le tore de dimension n, sur lequel le groupe

$$\Gamma^n=\Gamma\times\dots\times\Gamma$$

agit naturellement. Nous dénoterons par $t=(t_1,\dots,t_n)$ un élément de T^n et par $g=g_1\otimes\dots\otimes g_n$ un élément de Γ^n (avec $\forall i\in\{1,\dots,n\}$, $t_i\in S^1$ et $g_i\in\Gamma$) et nous avons bien-sûr:

$$g(t)=(g_1(t_1),\dots,g_n(t_n)).$$

Soit $B(T^n)$ la C*-algèbre des fonctions bornées et mesurables de T^n dans $\mathbf{C}$, munie de la norme de la convergence uniforme, et soit $B_c(T^n \rtimes \Gamma^n)$ l'algèbre involutive des sommes *finies*:

$$f = \sum_{g\in\Gamma^n} f_g U_g \text{ où } \forall g \in \Gamma^n, \quad f_g \in B(T^n).$$

Nous munissons $B_c(T^n \rtimes \Gamma^n)$ du produit et de l'involution donnés par: $\forall g \in \Gamma^n, \forall t \in T^n$,

$$(f^1 f^2)_g(t) = \sum_{h\in\Gamma^n} f^1_h(t) f^2_{h^{-1}g}(h^{-1}(t))$$
$$f^*_g(t) = \bar{f}_{g^{-1}}(g^{-1}(t)).$$

Un élément $f \in B_c(T^n \rtimes \Gamma^n)$ induit, pour chaque $t \in T^n$, un opérateur continu $\varphi_t(f)$ sur $l^2(\Gamma^n)$ défini par:

$$\forall \theta \in l^2(\Gamma^n),\ \forall g \in \Gamma^n, \qquad \varphi_t(f)(\theta)_g = \sum_{h\in\Gamma^n} f_{gh^{-1}}(g(t))\,\theta_h,$$

et dont la norme est bornée indépendamment de $t \in T^n$.

Le produit croisé $B(T^n) \rtimes \Gamma^n$ est le complété de $B_c(T^n \rtimes \Gamma^n)$ pour la norme:

$$\|f\| = \operatorname*{Sup}_{t\in T^n} \|\varphi_t(f)\|_{\mathcal{B}(l^2(\Gamma^n))}.$$

La sous-algèbre $C(T^n) \rtimes \Gamma^n$ de $B(T^n) \rtimes \Gamma^n$ est définie de façon analogue, en partant de l'algèbre involutive $C_c(T^n \rtimes \Gamma^n)$ des sommes *finies*:

$$f = \sum_{g\in\Gamma^n} f_g U_g \text{ où } \forall g \in \Gamma^n, \quad f_g \in C(T^n),$$

$C(T^n)$ étant l'algèbre des fonctions continues $T^n \to \mathbf{C}$.

Dans la suite, nous allons nous fonder sur le résultat crucial suivant, dû à Bost [2].

Théorème 6.1 (*[2]*)**.** *Soit Γ un sous-groupe de* $\mathrm{Homeo}_+(S^1)$ *et supposons donnée une application $l : \Gamma \longrightarrow B(S^1)$ telle que:*

$$\forall g, h \in \Gamma, \quad l(g\circ h) = l(g)\circ h + l(h).$$

Soit $n \geq 1$ un entier. Pour tout $(z_1, \ldots, z_n) \in [-1, 1]^n$, définissons le morphisme d'algèbres:

$$\mu(z_1, \ldots, z_n) : B_c(T^n \rtimes \Gamma^n) \to B_c(T^n \rtimes \Gamma^n)$$

par

$$\mu(z_1, \ldots, z_n)(f)_{g_1\otimes\cdots\otimes g_n}(t_1, \ldots, t_n)$$
$$= f_{g_1\otimes\cdots\otimes g_n}(t_1, \ldots, t_n) \exp\left(\sum_{k=1}^n z_k l(g_k^{-1})(t_k)\right)$$

et soit $\mathcal{B}_n$ le complété de $B_c(T^n \rtimes \Gamma^n)$ pour la norme:

$$\|f\|_{\mathcal{B}_n} = \operatorname*{Sup}_{(z_1,\ldots,z_n)\in[-1,1]^n} \|\mu(z_1, \ldots, z_n)(f)\|.$$

$\mathcal{B}_n$ est alors une algèbre de Banach et l'inclusion

$$\mathcal{B}_n \longrightarrow B(T^n) \rtimes \Gamma^n$$

induit des isomorphismes en K-théorie.

Démonstration. Pour $z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbf{R}^n$ fixé, l'expression

$$\alpha(z)(f)_{g_1\otimes\cdots\otimes g_n}(t_1, \dots, t_n) = f_{g_1\otimes\cdots\otimes g_n}(t_1, \dots, t_n) \exp\left(\sum_{k=1}^{n} i z_k l(g_k^{-1})(t_k)\right)$$

définit un automorphisme de la C*-algèbre $B(T^n) \rtimes \Gamma^n$. En effet,

$$\alpha(z) : B_c(T^n \rtimes \Gamma^n) \longrightarrow B_c(T^n \rtimes \Gamma^n)$$

est clairement un morphisme d'algèbres involutif et une bijection d'inverse $\alpha(-z)$. De plus, pour tout $t \in T^n$, l'expression:

$$\forall \theta \in l^2(\Gamma^n),\ \forall g \in \Gamma^n, \qquad k(z,t)(\theta)_g = \theta_g \exp\left(\sum_{k=1}^{n} i z_k l(g_k)(t_k)\right)$$

définit une isométrie

$$k(z,t) : l^2(\Gamma) \longrightarrow l^2(\Gamma)$$

et un calcul simple montre que nous avons l'égalité:

$$k(z,t) \circ \varphi_t(\alpha(z)(f)) = \varphi_t(f) \circ k(z,t).$$

Nous en déduisons $\|\alpha(z)(f)\| \leq \|f\|$ et comme $f = \alpha(-z) \circ \alpha(z)(f)$, nous avons finalement:

$$\|\alpha(z)(f)\| = \|f\|.$$

De plus, nous vérifions facilement que

$$\forall z, z' \in \mathbf{R}^n, \quad \alpha(z + z') = \alpha(z) \circ \alpha(z')$$

et que, pour $f \in B(T^n) \rtimes \Gamma^n$ fixé,

$$\lim_{z\to 0} (\alpha(z)(f) - f) = 0.$$

En effet, pour montrer cette dernière assertion, nous pouvons nous limiter au cas où

$$f = f_{g_1\otimes\cdots\otimes g_n} U_{g_1\otimes\cdots\otimes g_n}$$

pour $g = g_1 \otimes \cdots \otimes g_n$ fixé dans Γ^n et nous voyons qu'alors:
$\forall t \in T^n, \forall \theta \in l^2(\Gamma^n), \forall h \in \Gamma^n,$

$$\varphi_t(\alpha(z)(f) - f)(\theta)_h = f_g(h(t))(e^{\sum_{k=1}^{n} i z_k l(g_k^{-1})(h_k(t_k))} - 1)\theta_{g^{-1}h}$$

et donc, comme les fonctions $l(g_k^{-1})$ sont bornées, en posant:

$$\epsilon(g)(z) = \mathrm{Sup}_{t\in T^n} \left| \sin\left(\sum_{k=1}^{n} z_k l(g_k^{-1})(t_k)\right) \right|$$

nous avons $\lim_{z\to 0}\epsilon(g)(z) = 0$ et

$$\|\alpha(z)(f) - f\| \leq 2\|f_g\|\epsilon(g)(z).$$

Par suite, α est bien une action fortement continue et isométrique de $\mathbf{R}^n$ sur $B(T^n) \rtimes \Gamma^n$ au sens du paragraphe 2.1.2 de [2] et

$$\mu(z_1, \dots, z_n) = \alpha(-iz_1, \dots, -iz_n).$$

Le résultat découle donc directement du Théorème 2.2.1 de [2]. □

Nous allons également utiliser l'idée ci-dessous, qui est inspirée de diverses techniques sous-jacentes à [7].

Proposition 6.2. *Soient Γ un sous-groupe de* $\mathrm{Homeo}_+(S^1)$, *ω un cocycle de groupe normalisé de Γ et $n \geq 1$ un entier. Soit*

$$\phi : C_r^*\Gamma \to C_r^*\Gamma^n$$

l'application diagonale, définie par:

$$\phi(g) = g \otimes \cdots \otimes g$$

et soit

$$j : C_r^*\Gamma^n \to B(T^n) \rtimes \Gamma^n$$

l'injection canonique, définie par:

$$j(g_1 \otimes \cdots \otimes g_n) = U_{g_1\otimes\cdots\otimes g_n}.$$

Supposons qu'il existe une sous-algèbre $\mathcal{A}$ de $B(T^n) \rtimes \Gamma^n$ telle que l'inclusion

$$\mathcal{A} \longrightarrow B(T^n) \rtimes \Gamma^n$$

induise des isomorphismes en K-théorie, et un cocycle cyclique τ sur $B_c(T^n \rtimes \Gamma^n)$ qui s'étend à $\mathcal{A}$ et tel que

$$\tau_\omega = (j \circ \phi)^*\tau.$$

Alors la paire (Γ, ω) vérifie la conjecture de Novikov.

Démonstration. τ induit une application

$$K_i(B(T^n) \rtimes \Gamma^n) \to \mathbf{C}$$

via l'isomorphisme $K_i(\mathcal{A}) \to K_i(B(T^n) \rtimes \Gamma^n)$ ($i = 0$ si ω est un cocycle de degré pair, $i = 1$ sinon) et τ_ω induit donc une application $K_i(C_r^*\Gamma) \to \mathbf{C}$ en composant l'application ci-dessus par $j_* \circ \phi_*$. Le résultat découle donc du théorème de l'indice de Connes et Moscovici [10]. Remarquons que cette méthode ne nous dit rien en fait sur le domaine de définition du cocycle τ_ω lui-même, mais elle nous suffit pour obtenir ce que nous voulons. Une technique similaire est utilisée extensivement au chapitre 5 de [7]. □

Nous pouvons maintenant énoncer les résultats principaux de cet article.

Théorème 6.3. *Posons* $\Gamma = \mathrm{Diff}^2_+(S^1)$ *et soit* $n \geq 1$ *un entier. Alors il existe:*
- une algèbre de Banach $\mathcal{B}_n \subset C(T^n) \rtimes \Gamma^n$ *telle que l'inclusion*

$$\mathcal{B}_n \to C(T^n) \rtimes \Gamma^n$$

induise des isomorphismes en K-théorie et
- un $2n$*-cocycle cyclique* $\tau_{(n)}$ *sur* $C_c(T^n \rtimes \Gamma^n)$ *qui est une* $2n$*-trace sur* $\mathcal{B}_n$ *et tel que le cup-produit*

$$\tau^n_{gv} = \tau_{gv} \cup \cdots \cup \tau_{gv}$$

vérifie l'égalité:

$$\tau^n_{gv} = (j \circ \phi)^* \tau_{(n)}.$$

La paire $(\mathrm{Diff}^2_+(S^1), gv^n)$ *vérifie donc la conjecture de Novikov pour tout* $n \geq 1$.

Démonstration. Comme nous n'aurons affaire ici qu'à des fonctions continues, nous nous restreignons dès le début à l'algèbre $C(T^n) \rtimes \Gamma^n$. Il est clair que les résultats du Théorème 6.1 et de la Proposition 6.2 restent vrais si $B(T^n) \rtimes \Gamma^n$ est remplacée par $C(T^n) \rtimes \Gamma^n$.

Soit $l : \Gamma \to C(S^1)$ l'application définie par:

$$\forall g \in \Gamma, \quad l(g) = \log(g').$$

Il est clair que l satisfait les hypothèses du Théorème 6.1. Pour tout $n \geq 1$, soit $\mathcal{B}_n$ la sous-algèbre de $C(T^n) \rtimes \Gamma^n$ correspondante.

De plus, la fonction $l(g)$ étant de classe C^1, nous pouvons définir $l(g)' \in C(S^1)$, qui est la dérivée de $l(g)$, et qui vérifie la formule:

$$l(gh)' = l(g)' \circ h \ \exp(l(h)) + l(h)'.$$

Pour $f^0, f^1, f^2 \in C_c(T^n \rtimes \Gamma^n)$, posons:

$$\begin{aligned}&\tau_{(1)}(f^0, f^1, f^2)\\ &\quad = \sum_{g_0 g_1 g_2 = 1} \int_{S^1} (f^0_{g_0} f^1_{g_1} \circ g_0^{-1} f^2_{g_2} \circ (g_0 g_1)^{-1})(l(g_2) l(g_1 g_2)' - l(g_1 g_2) l(g_2)')(t)dt\end{aligned}$$

$\tau_{(1)}$ est le cocycle cyclique de Godbillon–Vey défini par Connes dans [7] et $\tau_{(1)}$ est une 2-trace sur $C(S^1) \rtimes \Gamma$ ([7], Théorème 7.3). De plus, nous avons bien évidemment:

$$\tau_{gv} = j^* \tau_{(1)}.$$

Pour tout $n \geq 2$, définissons $\tau_{(n)}$ comme le cup-produit de n fois $\tau_{(1)}$:

$$\tau_{(n)} = \tau_{(1)} \# \cdots \# \tau_{(1)}$$

(voir [8] pp. 191–192.) $\tau_{(n)}$ est alors un $2n$-cocycle cyclique sur $C_c(T^n \rtimes \Gamma^n)$ et nous avons:

$$\tau_{gv^n} = (j \circ \phi)^* \tau_{(n)}.$$

Nous n'avons pas réussi à démontrer que $\tau_{(n)}$ était une $2n$-trace sur $C(T^n) \rtimes \Gamma^n$ quand $n \geq 2$. Nous allons démontrer que $\tau_{(n)}$ est une $2n$-trace sur $\mathcal{B}_n$.

Regardons d'abord en détail le cas $n = 1$. Pour $f^1, a^1, f^2, a^2 \in C_c(S^1 \rtimes \Gamma)$, un calcul assez simple montre que:

$$\begin{aligned}\hat{\tau}_{(1)}(f^1da^1f^2da^2) = &\frac{1}{2}\int_{S^1}(\mu(1)(f^1\delta^2(a^1))f^2\delta^1(a^2))_e(t)dt\\ &-\frac{1}{2}\int_{S^1}(f^1\delta^1(a^1)f^2\delta^2(a^2))_e(t)dt\end{aligned}$$

où les applications δ^1 et δ^2 de $C_c(S^1 \rtimes \Gamma)$ dans lui-même sont définies par:

$$\begin{aligned}\delta^1\left(\sum a_gU_g\right) &= \sum a_gU_gl(g),\\ \delta^2\left(\sum a_gU_g\right) &= \sum a_gU_gl(g)'\end{aligned}$$

et où

$$\mu(1)\left(\sum_{g\in\Gamma} f_gU_g\right) = \sum_{g\in\Gamma} f_g(g^{-1})'U_g$$

est le morphisme du Théorème 6.1 dans le cas $n = 1$. Comme nous avons clairement:

$$\forall f \in C_c(S^1 \rtimes \Gamma), \quad \|f_e\| \leq \|f\|,$$

le terme de gauche désignant la norme de f_e dans $C(S^1)$, nous voyons facilement que pour a^1, a^2 fixés, il existe une constante $K(a^1, a^2)$ telle que

$$\forall f^1f^2 \in C_c(S^1 \rtimes \Gamma), \quad |\hat{\tau}_{(1)}(f^1da^1f^2da^2)| \leq K(a^1, a^2)\|f^1\|_{\mathcal{B}_1}\|f^2\|_{\mathcal{B}_1}$$

et que donc $\tau_{(1)}$ est une 2-trace sur $\mathcal{B}_1$. Remarquons en plus, comme dans [7], que dans ce cas-ci nous pouvons même en dire plus, à savoir que $\tau_{(1)}$ est une 2-trace sur $C(S^1) \rtimes \Gamma$. En effet, nous pouvons inverser l'ordre des termes dans la première intégrale, et donc faire disparaître $\mu(1)$ grâce à la formule:

$$\forall a, b \in C_c(S^1 \rtimes \Gamma), \quad \int_{S^1}(\mu(1)(a)b)_e(t)dt = \int_{S^1}(ba)_e(t)dt.$$

Cependant, nous n'avons pas réussi à utiliser cette astuce pour traiter les puissances de $\tau_{(1)}$ et c'est pourquoi nous avons recours à μ et à l'algèbre $\mathcal{B}_n$ quand $n \geq 2$.

Fixons maintenant un entier $n \geq 2$.

Remarquons d'abord que, pour $\lambda_1, h_1, \lambda_2, h_2, \lambda_3 \in \Gamma$, l'expression $\hat{\tau}_{gv}(\lambda_1dh_1\lambda_2dh_2\lambda_3)$ est égale à:

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\int_{S^1}(l(h_2)\circ(\lambda_1h_1\lambda_2h_2)^{-1}(l(h_1)\circ(\lambda_1h_1)^{-1})'\\ &\quad-(l(h_2)\circ(\lambda_1h_1\lambda_2h_2)^{-1})'l(h_1)\circ(\lambda_1h_1)^{-1})(t)dt\end{aligned}$$

si $\lambda_1 h_1 \lambda_2 h_2 \lambda_3 = 1$ et à zero sinon, et que donc nous avons:

$$\begin{aligned}&\forall \lambda_1, h_1, \lambda_2, h_2, \lambda_3 \in \Gamma, \quad \hat{\tau}_{gv}(\lambda_1 dh_1 \lambda_2 dh_2 \lambda_3)\\ &\quad = \frac{1}{2}\int_{S^1} (\mu(1)(U_{\lambda_1}\delta^2(U_{h_1}))U_{\lambda_2}\delta^1(U_{h_2})U_{\lambda_3})_e(t)dt\\ &\quad - \frac{1}{2}\int_{S^1} (\mu(1)(U_{\lambda_1}\delta^1(U_{h_1})U_{\lambda_2}\delta^2(U_{h_2}))U_{\lambda_3})_e(t)dt.\end{aligned}$$

Fixons maintenant $G_1, H_1, \ldots G_{2n}, H_{2n} \in \Gamma^n$, avec pour chaque $i \in \{1, \ldots, 2n\}$,

$$G_i = g_i^1 \otimes \cdots \otimes g_i^n, \qquad H_i = h_i^1 \otimes \cdots \otimes h_i^n.$$

L'expression

$$\tau_{gv}\widehat{\# \cdots \#}\tau_{gv}(G_1 dH_1 \ldots G_{2n} dH_{2n})$$

est égale à la somme, quand σ parcourt les permutations de $\{1, \ldots, 2n\}$ telles que

$$\forall k \in \{1, \ldots, n\}, \quad \sigma(2k-1) < \sigma(2k),$$

des termes:

$$\epsilon(\sigma)\prod_{k=1}^{n} \hat{\tau}_{gv}(\lambda_{1,k}^{\sigma} dh_{\sigma(2k-1)} \lambda_{2,k}^{\sigma} dh_{\sigma(2k)} \lambda_{3,k}^{\sigma})$$

où

$$\lambda_{1,k}^{\sigma} = \left(\prod_{i=1}^{\sigma(2k-1)-1} g_i^k h_i^k\right) g_{\sigma(2k-1)}^k, \qquad \lambda_{2,k}^{\sigma} = \left(\prod_{i=\sigma(2k-1)+1}^{\sigma(2k)-1} g_i^k h_i^k\right) g_{\sigma(2k)}^k,$$

$$\lambda_{3,k}^{\sigma} = \prod_{i=\sigma(2k)+1}^{2n} g_i^k h_i^k$$

(nous posons par convention $\prod_{i=r}^{s} g_i h_i = 1$ quand $r > s$) et, d'après le calcul ci-dessus, chacun de ces termes est égal à son tour à une somme de 2^n termes qui sont des intégrales sur le tore T^n.

Fixons maintenant $a^1, \ldots, a^{2n} \in C_c(T^n \rtimes \Gamma^n)$. Pour $f^1, \ldots, f^{2n} \in C_c(T^n \rtimes \Gamma^n)$, l'expression

$$\hat{\tau}_{(n)}(f^1 da^1 \ldots f^{2n} da^{2n})$$

peut donc s'écrire comme une somme de $(2n)!$ termes qui sont des intégrales sur le tore T^n d'une fonction du type:

$$\left(\prod_{i=1}^{2n} \mu(i_1, \ldots, i_n)(f^i \delta^{j,k}(a^i))\right)_{e\otimes\cdots\otimes e}$$

où $(i_1, \ldots, i_n) \in \{0, 1\}^n$, $j \in \{1, 2\}$ et $k \in \{1, \ldots, n\}$. Les fonctions $\delta^{j,k}$ de $C_c(T^n \rtimes \Gamma^n)$ dans lui-même sont définies de la façon suivante:

$$\begin{aligned}&\delta^{1,k}\left(\sum a_{g_1\otimes\cdots\otimes g_n}(t_1, \ldots, t_n) U_{g_1\otimes\cdots\otimes g_n}\right)\\ &\quad = \sum a_{g_1\otimes\cdots\otimes g_n}(t_1, \ldots, t_n) U_{g_1\otimes\cdots\otimes g_n} l(g_k)(t_k),\end{aligned}$$

$$\delta^{2,k}\left(\sum a_{g_1\otimes\cdots\otimes g_n}(t_1,\ldots,t_n)U_{g_1\otimes\cdots\otimes g_n}\right)$$
$$=\sum a_{g_1\otimes\cdots\otimes g_n}(t_1,\ldots,t_n)U_{g_1\otimes\cdots\otimes g_n}l(g_k)'(t_k).$$

Pour chacune de ces intégrales, il existe donc une constante $C_{a^1,\ldots,a^{2n}}$, ne dépendant que de $a^1,\ldots,a^{2n}$, telle que l' intégrale soit majorée par

$$C_{a^1,\ldots,a^{2n}}\prod_{i=1}^{2n}\|f^i\|_{\mathcal{B}_n}.$$

Par exemple, quand $n=2$, nous avons 24 intégrales, l'une d'entre elles étant:

$$\frac{1}{4}\int_{T^2}(\mu(1,1)(f^1\delta^{2,1}(a^1))\mu(0,1)(f^2\delta^{1,1}(a^2)$$
$$\times f^3\delta^{2,2}(a^3))f^4\delta^{1,2}(a^4))_{e\otimes e}(t_1,t_2)dt_1dt_2.$$

Il s'en suit qu'il existe une constante $K(a^1,\ldots,a^{2n})$, ne dépendant que de $a^1,\ldots,a^{2n}$, telle que

$$\forall f^1,\ldots,f^{2n}\in C_c(T^n\rtimes\Gamma^n),$$
$$|\hat{\tau}_{(n)}(f^1da^1\ldots f^{2n}da^{2n})|\le K(a^1,\ldots,a^{2n})\prod_{i=1}^{2n}\|f^i\|_{\mathcal{B}_n}.$$

$\tau_{(n)}$ est donc une $2n$-trace sur $\mathcal{B}_n$, ce qui était le résultat voulu. A partir de là, d'après le Théorème 2.7 de [7], $\tau_{(n)}$ s'étend à une algèbre

$$\mathcal{A}_n\subset\mathcal{B}_n$$

stable par calcul fonctionnel holomorphe dans $\mathcal{B}_n$ et l'inclusion induit des isomorphismes en K-théorie:

$$K_0(\mathcal{A}_n)\longrightarrow K_0(\mathcal{B}_n)\longrightarrow K_0(C(T^n)\rtimes\Gamma^n).$$

Le résultat découle donc de la Proposition 6.2. □

Remarque 6.4. Le résultat du Théorème 6.3 peut facilement s'étendre au groupe $\mathrm{Diff}_+^{1+abs}(S^1)$ des difféomorphismes de classe C^1 dont le logarithme de la dérivée est absolument continu. Le lecteur intéressé pourra consulter le chapitre 8 de [24].

Nous voulons maintenant démontrer un résultat analogue pour les puissances du cocycle d'Euler. Nous n'avons pas réussi à le faire sur le groupe $\mathrm{Homeo}_+(S^1)$ en entier, mais seulement sur le groupe $\mathrm{PDiff}_+^1(S^1)$ des difféomorphismes qui sont de classe C^1 par morceaux.

Rappelons que $\mathrm{PDiff}_+^1(S^1)$ est, par définition, le groupe des $g\in\mathrm{Homeo}_+(S^1)$ tels qu'il existe un partage $\{t_1,\ldots,t_p\}$ du cercle tel que la restriction de g à chaque intervalle compact $[t_i,t_{i+1}]$ soit un difféomorphisme de classe C^1 sur son image. Nous avons bien évidemment:

$$\mathrm{PL}_+(S^1)\subset\mathrm{PDiff}_+^1(S^1).$$

Tout d'abord, nous aurons besoin d'une expression du cocycle d'Euler différente de celle de la Proposition 4.6, à savoir d'un 2-cocycle du groupe $\mathrm{Homeo}_+(S^1)$ à valeurs dans $\mathbf{R}$.

Ce processus est connu, mais nous avons jugé bon, au point où nous en sommes, d'en inclure une démonstration complète.

Proposition 6.5. *Pour tout* $f, g \in \mathrm{PDiff}^1_+(S^1)$*, nous avons la formule:*

$$eu(f, g) = \mathrm{Area}(\sigma(g)^{-1} - id, \sigma(f) - id)$$

où $\sigma(f)$ *désigne le relevé dans* $\widetilde{\mathrm{Homeo}}_+(S^1)$ *de l'homéomorphisme du cercle* f *tel que* $\sigma(f)(0) \in [0, 1[$.

Démonstration. Pour tout $F \in \widetilde{\mathrm{Homeo}}_+(S^1)$, il s'agit d'abord de remarquer que $F - id$ est bien une fonction continue $S^1 \to \mathbf{R}$, que nous pouvons donc définir

$$\theta(F) = \int_{S^1} (F(t) - t)dt$$

et que ce θ est alors une fonction $\widetilde{\mathrm{Homeo}}_+(S^1) \to \mathbf{R}$ qui vérifie la propriété cruciale:

$$\forall F \in \widetilde{\mathrm{Homeo}}_+(S^1),\ \forall k \in \mathbf{Z}, \quad \theta(F \circ (id + k)) = \theta(F) + k.$$

Pour $f \in \mathrm{Homeo}_+(S^1)$, soit maintenant $\sigma(f) \in \widetilde{\mathrm{Homeo}}_+(S^1)$ le relevé de f tel que $\sigma(f)(0) \in [0, 1[$ comme dans la Proposition 4.6 et posons:

$$c(f, g) = \theta(\sigma(f)) + \theta(\sigma(g)) - \theta(\sigma(f) \circ \sigma(g)).$$

Nous voyons facilement que cette expression ne dépend pas du relevé σ, que c est un 2-cocycle borné à valeurs réelles et que sa classe de cohomologie ne dépend pas de l'application $\theta : \widetilde{\mathrm{Homeo}}_+(S^1) \to \mathbf{R}$ vérifiant la propriété cruciale ci-dessus. Il est connu [1] que ce c est cohomologue au c de la Proposition 4.6. Nous avons donc:

$$c(f, g) = \int_{S^1} (\sigma(f) - id)(t)dt - \int_{S^1} (\sigma(f) - id) \circ g(t)dt.$$

Pour normaliser ce c, nous procédons comme dans la Proposition 4.6 i.e. nous ajoutons le cocycle cohomologue:

$$c'(f, g) = -\theta(\sigma(f)^{-1}) - \theta(\sigma(g)^{-1}) + \theta(\sigma(g)^{-1} \circ \sigma(f)^{-1})$$

i.e.

$$c'(f, g) = \int_{S^1} (\sigma(g)^{-1} - id) \circ f^{-1}(t)dt - \int_{S^1} (\sigma(g)^{-1} - id)(t)dt$$

et nous divisons par deux pour obtenir la formule:

$$\forall f, g \in \mathrm{Homeo}_+(S^1), \quad eu(f, g) = \frac{1}{2}(c(f, g) + c'(f, g)).$$

De plus, quand f et g sont de classe C^1 par morceaux, la formule du changement de variables donne:

$$eu(f, g) = \frac{1}{2} \int_{S^1} ((\sigma(g)^{-1} - id)(\sigma(f) - id)'_d - (\sigma(g)^{-1} - id)'_d(\sigma(f) - id))(t)dt$$

où les expressions $(\sigma(f) - id)'_d$ et $(\sigma(g)^{-1} - id)'_d$ désignent les dérivées à droite des fonctions $\sigma(f) - id$ et $\sigma(g)^{-1} - id$. Nous obtenons donc finalement:

$$\forall f, g \in \mathrm{PDiff}^1_+(S^1), \quad eu(f, g) = \mathrm{Area}(\sigma(g)^{-1} - id, \sigma(f) - id)$$

ce qui était le résultat voulu. □

Remarque 6.6. Pour tout $f \in \mathrm{Homeo}_+(S^1)$, la fonction $\sigma(f) - id$ est naturellement à variation bornée sur le cercle. Il serait intéressant de savoir si la formule:

$$eu(f, g) = \mathrm{Area}(\sigma(g)^{-1} - id, \sigma(f) - id)$$

est bien valide pour tout couple $(f, g) \in \mathrm{Homeo}_+(S^1)$.

Théorème 6.7. *Posons $\Gamma = \mathrm{PDiff}^1_+(S^1)$ et soit $n \geq 1$ un entier. Alors il existe:*
- une algèbre de Banach $\mathcal{B}_n \subset B(T^n) \rtimes \Gamma^n$ telle que l'inclusion

$$\mathcal{B}_n \to B(T^n) \rtimes \Gamma^n$$

induise des isomorphismes en K-théorie et
- un 2n-cocycle cyclique $\tau_{(n)}$ sur $B_c(T^n \rtimes \Gamma^n)$ qui est une 2n-trace sur $\mathcal{B}_n$ et tel que le cup-produit

$$\tau^n_{eu} = \tau_{eu} \cup \cdots \cup \tau_{eu}$$

vérifie l'égalité:

$$\tau^n_{eu} = (j \circ \phi)^* \tau_{(n)}.$$

La paire $(\mathrm{PDiff}^1_+(S^1), eu^n)$ *vérifie donc la conjecture de Novikov pour tout $n \geq 1$.*

Démonstration. Soit $l : \Gamma \to B(S^1)$ l'application définie par:

$$\forall g \in \Gamma, \quad l(g) = \log(g'_d).$$

Il est clair que l satisfait les hypothèses du Théorème 6.1. Pour tout $n \geq 1$, soit $\mathcal{B}_n$ la sous-algèbre de $B(T^n) \rtimes \Gamma^n$ correspondante.

Pour tout $g \in \Gamma$, nous avons $\sigma(g) - id \in C(S^1)$ et cette fonction étant de classe C^1 par morceaux, nous pouvons définir sa dérivée à droite: $(\sigma(g) - id)'_d \in B(S^1)$ qui vérifie la formule:

$$(\sigma(gh) - id)'_d = (\sigma(g) - id)'_d \circ h \ \exp(l(h)) + (\sigma(h) - id)'_d.$$

Pour $f^0, f^1, f^2 \in B_c(T^n \rtimes \Gamma^n)$, posons:

$$\begin{aligned}
&\tau_{(1)}(f^0, f^1, f^2) \\
&\quad = \sum_{g_0 g_1 g_2 = 1} \int_{S^1} (f^0_{g_0} f^1_{g_1} \circ g_0^{-1} f^2_{g_2} \circ (g_0 g_1)^{-1})((\sigma(g_2)^{-1} - id)(\sigma(g_1) - id)'_d \\
&\quad - (\sigma(g_2)^{-1} - id)'_d(\sigma(g_1) - id))(t)dt.
\end{aligned}$$

Nous pouvons démontrer, en nous inspirant du Lemme 7.1. de [7], que $\tau_{(1)}$ est bien un 2-cocycle cyclique sur $B_c(S^1 \rtimes \Gamma)$ et nous avons:

$$\tau_{eu} = j^* \tau_{(1)}.$$

En effet, l'expression, pour tout $f, g \in \mathrm{PDiff}^1_+(S^1)$,

$$\omega(f,g) = ((\sigma(g)^{-1} - id)(\sigma(f) - id)'_d - (\sigma(g)^{-1} - id)'_d(\sigma(f) - id))(t)dt$$

définit bien une mesure finie sur le cercle, et ω est un 2-cocycle de Γ à valeurs dans le Γ-module des mesures finies sur le cercle (voir [11]). A partir de là, la démonstration de la Proposition 27 de [23] montre que $\tau_{(1)}$ est un 2-cocycle cyclique sur $B_c(S^1 \rtimes \Gamma)$.

De plus, pour $f^1, a^1, f^2, a^2 \in B_c(S^1 \rtimes \Gamma)$, un calcul assez simple montre que:

$$\begin{aligned}\hat{\tau}_{(1)}(f^1 da^1 f^2 da^2) = &\frac{1}{2}\int_{S^1} (f^1\delta^1(a^1) f^2 \delta^2(a^2))_e(t)dt \\ &- \frac{1}{2}\int_{S^1} (\mu(1)(f^1\delta^2(a^1)) f^2\delta^1(a^2))_e(t)dt\end{aligned}$$

où les applications δ^1 et δ^2 de $B_c(S^1 \rtimes \Gamma)$ dans lui-même sont définies par:

$$\delta^1\left(\sum a_g U_g\right) = \sum a_g U_g(\sigma(g) - id),$$
$$\delta^2\left(\sum a_g U_g\right) = \sum a_g U_g(\sigma(g) - id)'_d$$

et où

$$\mu(1)\left(\sum_{g\in\Gamma} f_g U_g\right) = \sum_{g\in\Gamma} f_g (g^{-1})'_d U_g$$

est le morphisme du Théorème 6.1 dans le cas $n = 1$. Nous avons donc au signe près la même formule que dans le Théorème 6.3. Le reste de la preuve se fait donc comme dans la démonstration du Théorème 6.3. □

Il nous reste maintenant à traiter le cas des puissances du cocycle de Godbillon–Vey "discret" de Ghys et Sergiescu [14]. Nous n'avons pas réussi à le faire pour le groupe $\mathrm{PL}_+(S^1)$ en entier, mais le résultat ci-dessous est valable pour les groupes de Thompson T et F.

Théorème 6.8. *Soit Γ le groupe de Thompson T ou F et soit $n \geq 1$ un entier. Alors il existe:*

- une algèbre de Banach $\mathcal{B}_n \subset B(T^n) \rtimes \Gamma^n$ telle que l'inclusion

$$\mathcal{B}_n \to B(T^n) \rtimes \Gamma^n$$

induise des isomorphismes en K-théorie et

- un $2n$-cocycle cyclique $\tau_{(n)}$ sur $B_c(T^n \rtimes \Gamma^n)$ qui est une $2n$-trace sur $\mathcal{B}_n$ et tel que le cup-produit

$$\tau^n_{gv} = \tau_{gv} \cup \cdots \cup \tau_{gv}$$

vérifie l'égalité:

$$\tau^n_{gv} = (j \circ \phi)^* \tau_{(n)}.$$

La paire (T, gv^n) vérifie donc la conjecture de Novikov pour tout $n \geq 1$. De même, la paire (F, gv^n) vérifie la conjecture de Novikov pour tout $n \geq 1$.

Démonstration. Soit $X \subset S^1$ l'ensemble (dénombrable) des rationnels dyadiques compris entre 0 et 1. Définissons le degré d'un élément $x \in X$ par $\deg(0) = 0$ et, pour chaque $x \in X - \{0\}$, $\deg(x) = q$ si x s'écrit $x = \frac{p}{2^q}$ avec p impair. Pour chaque entier $n \geq 1$, il y a donc 2^{n-1} éléments de degré n dans X. Nous pouvons définir la mesure suivante sur le cercle:

$$\forall f \in B(S^1), \quad m(f) = \frac{1}{2} \sum_{x \in X} \frac{f(x)}{3^{\deg(x)}}$$

et il est clair que $m : B(S^1) \to \mathbf{C}$ est une application linéaire continue de norme 1.

Dans la suite, Γ désignera le groupe T ou le groupe F.

Fixons $g \in \Gamma$ et remarquons qu'il existe un nombre fini de points $X_g \subset X$ tel que $\forall x \in X - X_g$,

$$\deg(x) - \deg(g(x)) = \frac{\log(g'_d)(x)}{\log(2)}.$$

En effet, soit $\{t_1, \ldots, t_p\}$ un partage du cercle ($t_i \in X$) tel que la restriction de g à chaque intervalle $[t_i, t_{i+1}]$ soit de la forme:

$$g(x) = 2^{n_i} x + \frac{p_i}{2^{q_i}}.$$

Il est alors clair que pour tout $x \in X \cap]t_i, t_{i+1}[$, $\deg(x) - \deg(g(x)) = n_i$ dès que $\deg(x) > n_i + q_i$. En définissant l'ensemble X_g comme la réunion des t_i et des points dans chaque intervalle $]t_i, t_{i+1}[$ dont le degré est inférieur ou égal à $n_i + q_i$, nous obtenons le résultat voulu.

Pour $g \in \Gamma$ fixé, définissons la fonction $l(g)$ par

$$\forall x \in X, \quad l(g)(x) = \log(3)(\deg(x) - \deg(g(x))),$$
$$\forall x \in S^1 - X, \quad l(g)(x) = \frac{\log(3)}{\log(2)} \log(g'_d(x)).$$

$l(g)$ est alors une fonction en escaliers, donc réglée (et donc bornée) sur le cercle, et l'application:

$$l : \Gamma \longrightarrow B(S^1)$$

vérifie les hypothèses du Théorème 6.1. Pour tout $n \geq 1$, soit $\mathcal{B}_n$ la sous-algèbre de $B(T^n) \rtimes \Gamma^n$ correspondante.

De plus, pour tout $h \in \Gamma$, soient h'_g et h'_d les dérivées à gauche et à droite de h et définissons la fonction $\Delta(h) \in B(S^1)$ par:

$$\forall x \in X, \quad \Delta(h)(x) = 3^{\deg(x)}(\log(h'_d)(x) - \log(h'_g)(x))$$
$$\forall x \in S^1 - X, \quad \Delta(h)(x) = 0.$$

$\Delta(h) : S^1 \to \mathbf{R}$ est alors non nulle seulement en un nombre fini de points. De plus, nous avons clairement l'égalité:

$$\Delta(gh) = \Delta(g) \circ h \ \exp(l(h)) + \Delta(h).$$

Pour $f^0, f^1, f^2 \in B_c(T^n \rtimes \Gamma^n)$, posons maintenant:

$$\tau_{(1)}(f^0, f^1, f^2) = \sum_{g_0 g_1 g_2 = 1} \sum_{x \in S^1} (f^0_{g_0} f^1_{g_1} \circ g_0^{-1} f^2_{g_2} \circ (g_0 g_1)^{-1})(x) \\ \times (l(g_2) Dl(g_1 g_2) - l(g_1 g_2) Dl(g_2))(x).$$

Pour $g \in \mathrm{PL}_+(S^1)$, rappelons ici que nous avons

$$\forall x \in S^1, \quad Dl(g)(x) = \log(h'_d)(x) - \log(h'_g)(x)$$

et que $Dl(g)$ est donc vue comme une somme finie de mesures de Dirac sur le cercle. $\tau_{(1)}$ est le cocycle cyclique de Godbillon–Vey généralisé défini dans [23], Théorème 25, et nous avons bien évidemment:

$$\tau_{gv} = j^* \tau_{(1)}.$$

De plus, pour $f^1, a^1, f^2, a^2 \in B_c(S^1 \rtimes \Gamma)$, un calcul assez simple montre que:

$$\hat{\tau}_{(1)}(f^1 da^1 f^2 da^2) = m((\mu(1)(f^1 \delta^2(a^1)) f^2 \delta^1(a^2))_e) - m((f^1 \delta^1(a^1) f^2 \delta^2(a^2))_e)$$

où les applications δ^1 et δ^2 de $B_c(S^1 \rtimes \Gamma)$ dans lui-même sont définies par:

$$\delta^1 \left(\sum a_g U_g \right) = \sum a_g U_g l(g)$$

$$\delta^2 \left(\sum a_g U_g \right) = \sum a_g U_g \Delta(g)$$

et où

$$\mu(1) \left(\sum_{g \in \Gamma} f_g U_g \right) = \sum_{g \in \Gamma} f_g e^{l(g^{-1})} U_g$$

est le morphisme du Théorème 6.1 dans le cas $n = 1$. Nous avons donc la même formule que dans le Théorème 6.3, en remplaçant la mesure de Lebesgue sur le cercle par $2m$, et le reste de la démonstration se fait donc comme dans le Théorème 6.3. □

Démonstration. Nous pouvons maintenant donner la démonstration du Théorème 1.4. La cohomologie des groupes de Thompson T et F est connue [14]. Pour T, nous avons:

$$H^*(T; \mathbb{Q}) = \frac{\mathbb{Q}[\alpha, eu]}{\alpha.eu = 0} \quad \text{avec} \quad \alpha = \frac{gv}{(\log 2)^2}$$

c'est-à-dire que le groupe $H^*(T; \mathbb{Q})$ ne contient que des combinaisons linéaires des puissances α^n et eu^n pour $n \geq 1$ (il est à remarquer que la restriction à T du cocycle eu tel qu'il est défini dans la démonstration du Théorème 6.7 est bien à coefficients dans $\mathbb{Q}$). Le résultat découle donc des Théorèmes 6.7 et 6.8. Pour F, nous savons par la Proposition 3.10 de [14] que:

$$H^*(F; \mathbb{Q}) = \Lambda(u, v) \otimes \mathbb{Q}[\alpha],$$

où $\Lambda(u, v)$ est l'algèbre extérieure engendrée par les cocycles de groupe normalisés $u, v \in H^1(F; \mathbf{Z})$ donnés par:

$$\forall f \in F, \quad u(f) = \frac{\log f'_d(0)}{\log 2}, \qquad v(f) = \frac{\log f'_g(0)}{\log 2}.$$

Les cocycles cycliques τ_u et τ_v sont des 1-traces, et la Proposition 5.5 peut s'appliquer au cocycle uv. Il nous reste donc à traiter les cocycles $u\alpha^n$, $v\alpha^n$ et $uv\alpha^n$, pour tout $n \geq 1$.

Fixons donc $n \geq 1$, et regardons le cocycle $u\alpha^n$.

Remarquons d'abord que le groupe F fixe le point $0 \in S^1$ et que nous avons donc une mesure F-invariante sur le cercle très simple, donnée par:

$$\forall f \in B(S^1), \quad m_0(f) = f(0).$$

Il est alors clair que la formule:

$$\forall f^0, f^1 \in B_c(S^1 \rtimes \Gamma), \quad \tau(f^0, f^1) = \sum_{g \in F} f^0_{g^{-1}}(0) f^1_g(0) u(g) = \frac{1}{\log(2)} m_0((f^0 \delta^1(f^1))_e),$$

δ^1 étant définie comme dans le Théorème 6.8, définit bien un 1-cocycle cyclique sur $B_c(S^1 \rtimes \Gamma)$ et tel que

$$\tau_u = j^* \tau.$$

Fixons maintenant $f^1, a^1, \ldots, f^{2n+1}, a^{2n+1} \in B_c(T^{n+1} \rtimes F^{n+1})$. Vues les démonstrations des Théorèmes 6.3 et 6.8, l'expression

$$\widehat{\tau \# \tau_{(n)}}(f^1 da^1 \ldots f^{2n+1} da^{2n+1})$$

peut s'écrire comme une somme de $(2n+1)!$ intégrales, par rapport à une mesure sur T^{n+1} de la forme $m_0 \wedge m \wedge \cdots \wedge m$, avec:

$$\forall f \in B(T^{n+1}), \quad (m_0 \wedge m \wedge \cdots \wedge m)(f) = \frac{1}{2^n} \sum_{x_i \in X} \frac{f(0, x_1, \ldots, x_n)}{3^{\deg(x_1) + \cdots + \deg(x_n)}}$$

d'une fonction du type:

$$\left(\prod_{i=1}^{2n+1} \mu(i_1, \ldots, i_{n+1})(f^i \delta^{j,k}(a^i)) \right)_{e \otimes \cdots \otimes e}$$

où $(i_1, \ldots, i_{n+1}) \in \{0, 1\}^{n+1}$, $j \in \{1, 2\}$ et $k \in \{1, \ldots, n+1\}$, les fonctions $\delta^{j,k}$ étant définies de la façon suivante:

$$\begin{aligned} &\delta^{1,k} \left(\sum a_{g_1 \otimes \cdots \otimes g_n}(t_1, \ldots, t_n) U_{g_1 \otimes \cdots \otimes g_n} \right) \\ &\quad = \sum a_{g_1 \otimes \cdots \otimes g_n}(t_1, \ldots, t_n) U_{g_1 \otimes \cdots \otimes g_n} l(g_k)(t_k), \\ &\delta^{2,k} \left(\sum a_{g_1 \otimes \cdots \otimes g_n}(t_1, \ldots, t_n) U_{g_1 \otimes \cdots \otimes g_n} \right) \\ &\quad = \sum a_{g_1 \otimes \cdots \otimes g_n}(t_1, \ldots, t_n) U_{g_1 \otimes \cdots \otimes g_n} \Delta(g_k)(t_k), \end{aligned}$$

l et Δ étant comme dans le Théorème 6.8.

Nous en déduisons que, pour $a^1, \ldots, a^{2n+1} \in B_c(T^{n+1} \rtimes F^{n+1})$ fixés, il existe une constante $K(a^1, \ldots, a^{2n+1})$, telle que $\forall f^1, \ldots, f^{2n+1} \in B_c(T^{n+1} \rtimes F^{n+1})$,

$$|\widehat{\tau \# \tau_{(n)}}(f^1 da^1 \ldots f^{2n+1} da^{2n+1})| \leq K(a^1, \ldots, a^{2n+1}) \prod_{i=1}^{2n+1} \|f^i\|_{\mathcal{B}_{n+1}}$$

et que $\tau\#\tau_{(n)}$ est donc une $2n + 1$-trace sur $\mathcal{B}_{n+1}$. La paire $(F, u\alpha^n)$ vérifie donc la conjecture de Novikov pour tout $n \geq 1$.

La même méthode peut s'appliquer à $v\alpha^n$ et à $uv\alpha^n$ pour tout $n \geq 1$, ce qui achève la démonstration du Théorème 1.4. $\square$

Remarque 6.9. Le groupe de Thompson V [5] a une cohomologie rationnelle triviale, c'est pourquoi nous n'en parlons pas dans cet article.

Acknowledgments

The first author has been supported by the 21st century COE program at Keio University and by the Japan Society for the Promotion of Science RPD fellowship.

References

[1] J. Barge, E. Ghys, Cocycles d'Euler et de Maslov, Math. Ann. 294 (1992) 235–265.
[2] J.B. Bost, Principe d'Oka, K-théorie et systèmes dynamiques non commutatifs, Invent. Math. 101 (1990) 261–333.
[3] R. Bott, On some formulas for the characteristic classes of group actions, Springer Lecture Notes 652 (1978) 25–61.
[4] D. Burghelea, The cyclic homology of the group rings, Comment. Math. Helv. 60 (1985) 354–365.
[5] J.W. Cannon, W.J. Floyd, W.R. Parry, Introductory notes on Richard Thompson's groups, L'Enseign. Math. 42 (1996) 215–256.
[6] A. Connes, Non-commutative differential geometry. Part II: De Rham homology and non commutative algebra, Publ. Math. IHES 62 (1985) 257–360.
[7] A. Connes, Cyclic cohomology and the transverse fundamental class of a foliation, in: H. Araki, G. Effros (Eds.), Geometric Methods in Operator Algebras, 1986, pp. 52–144.
[8] A. Connes, Noncommutative Geometry, Academic Press, 1994.
[9] A. Connes, M. Gromov, H. Moscovici, Conjecture de Novikov et fibrés presque plats, C.R. Acad. Sci. Paris 310 (Série 1) (1990) 273–277.
[10] A. Connes, H. Moscovici, Cyclic cohomology, the Novikov conjecture and hyperbolic groups, Topology 29 (3) (1990) 345–388.
[11] S. Eilenberg, S. MacLane, Cohomology theory in abstract groups I, Ann. of Math. 48 (1) (1947) 51–78.
[12] D. Farley, Proper isometric actions of Thompson's groups on Hilbert space, Int. Math. Res. Not. 45 (2003) 2409–2414.
[13] E. Ghys, Groups acting on the circle, L'Enseign. Math. 47 (2001) 329–407.
[14] E. Ghys, V. Sergiescu, Sur un groupe remarquable de difféomorphismes du cercle, Comment. Math. Helv. 62 (1987) 185–239.
[15] C. Godbillon, J. Vey, Un invariant des feuilletages de codimension un, C.R. Acad. Sci. Paris 273 (1971) 92–95.
[16] B. Hanke, T. Schick, The strong Novikov conjecture for low degree cohomology, Geom. Dedicata 135 (2008) 119–127.
[17] M. Herman, Sur la conjugaison différentiable des difféomorphismes du cercle à des rotations, Publ. Math. IHES 49 (1978) 5–234.
[18] M. Hilsum, G. Skandalis, Invariance par homotopie de la signature à coefficients dans un fibré presque plat, J. Reine Angew. Math. 423 (1992) 73–99.
[19] S. Hurder, A. Katok, Differentiability, rigidity and Godbillon–Vey classes for Anosov flows, Publ. Math. IHES 72 (1990) 2–61.
[20] G.G. Kasparov, Equivariant KK-theory and the Novikov conjecture, Inv. Math. 91 (1988) 147–201.
[21] V. Mathai, The Novikov conjecture for low degree cohomology classes, Geom. Dedicata 99 (2003) 1–15.

[22] S.P. Novikov, Analogues hermitiens de la K-théorie, Actes I.C.M. 2 (1970) 39–45.
[23] C. Oikonomides, The Godbillon–Vey cyclic cocycle for PL-foliations, J. Funct. Anal. 234 (1) (2006) 127–151.
[24] W. Rudin, Real and Complex Analysis, Mc Graw-Hill Inc, 1966.
[25] L. Schwartz, Analyse II, Chap. III: Calcul Différentiel, Herman, Paris, 1993.
[26] G. Skandalis, Approche de la conjecture de Novikov par la cohomologie cyclique, Sém. Bourbaki, exposé, Astérisque 201-203 (739) (1991) 299–320.
[27] T. Tsuboi, Area functionals and Godbillon–Vey cocycles, Ann. Inst. Fourier 42 (1992) 421–447.
[28] T. Tsuboi, A characterization of the Godbillon–Vey invariant, Sugaku Expositions 8 (1995) 165–182.