

Un entretien avec Jean-Pierre Serre

Javier Fresán

Jean-Pierre Serre aura cent ans le 15 septembre 2026. À cette occasion, une conférence en son honneur se tiendra à l'Institut Henri Poincaré. Lorsqu'il me propose de réaliser ce qu'il appelle "mon premier entretien de centenaire", mes pensées se tournent vers la conversation de Bertrand Pivot avec Marguerite Yourcenar à son domicile dans le Maine. "J'avais préparé cet entretien avec le plus grand soin, se souvient Pivot, parce que je savais qu'il y avait un risque de ne pas être à la hauteur. Certains écrivains sont indulgents envers les journalistes et acceptent volontiers des questions peu convaincantes, mais je savais que Marguerite Yourcenar, bien que très gentille et accueillante, n'était pas de ceux-là. Je ne pouvais pas me permettre de la décevoir." La première partie de l'entretien a lieu le 19 avril 2026, à Saint-Sulpice, où Serre vit désormais. Le lac Léman est à trois minutes à pied. Dans le train depuis Paris, j'écris chacune de mes questions sur une fiche séparée. Nous parlons sans interruption pendant près de cinq heures. Il fait souvent des gestes avec les mains comme un méridional. Vers la fin de l'entretien, il choisit la question suivante au hasard en désignant l'une des fiches.

Je retourne à Saint-Sulpice la semaine du 6 juillet. Je suis là lorsqu'il reçoit des exemplaires du "cinquième et dernier volume" de ses œuvres complètes, contenant la plupart de ses écrits de 1998 à 2025. Dans l'esprit de Bourbaki, nous passons ensemble en revue ses réponses, en les lisant à voix haute ligne par ligne, en élaguant les adverbes et les adjectifs, et en "remplaçant les faux théorèmes par d'autres".

Débuts

JAVIER FRESÁN : Quand avez-vous réalisé que vous étiez un mathématicien ?

JEAN-PIERRE SERRE : J'ai réalisé que les mathématiques étaient ce qui m'intéressait vraiment quand j'avais environ seize ans. Je m'intéressais aussi à la chimie à l'époque, mais j'y ai renoncé. Quant à devenir un mathématicien professionnel, il m'a fallu un certain temps pour comprendre que l'on pouvait gagner sa vie comme tel. À cette époque, on pouvait passer directement de l'École Normale Supérieure au CNRS sans avoir rien prouvé, simplement sur la foi de son potentiel.

Eh bien, j'avais été classé premier à l'agrégation, mais c'était purement pédagogique.

JAVIER FRESAN : Classé premier malgré votre mésaventure à l'oral...

JEAN-PIERRE SERRE : Ma première leçon portait sur les droites sur les quadriques, un sujet que je connaissais bien.

Je l'avais même révisée à moitié endormi la veille, donc tout s'est parfaitement passé. La deuxième leçon portait sur les nombres premiers. J'ai commencé en disant : "Un nombre premier est...", et j'ai remarqué que les examinateurs semblaient perplexes, mais à l'époque ils n'étaient pas autorisés à m'interrompre. Quand j'ai eu terminé, j'ai soudain pensé : "Attends un peu, comment ai-je défini les nombres premiers ?" J'avais réussi à donner la seule définition incorrecte que l'on puisse

imaginer : “Un nombre est premier s’il n’est divisible ni par 1 ni par lui-même!”

JAVIER FRESAN : Il faut le faire !

JEAN-PIERRE SERRE : J’ai une autre histoire à propos de l’agrégation. L’épreuve écrite était un problème d’analyse, basé sur un article de Marcel Riesz. J’ai passé environ une heure à essayer de passer d’une équation à la suivante.

Riesz avait probablement écrit “par un changement de variables”, et donné la formule, mais l’examineur (Jean Favard) a pensé que ce serait trop facile pour les candidats ; il n’a donné aucune indication sur la façon de changer les variables.

Après l’examen, je suis revenu à l’École Normale. Je suis monté au premier étage et j’ai passé une salle où des membres de Bourbaki discutaient d’intégration. Je suis arrivé juste au moment où ils décidaient de remplacer le langage des $\ast$ -algèbres par celui des mesures de Radon (mesures de Radon : formes linéaires sur l’espace des fonctions continues).

Cela m’a vraiment intéressé, et c’est pourquoi j’ai commencé par la suite à assister aux réunions de Bourbaki.

Bourbaki

JAVIER FRESAN : Fut-ce votre premier contact avec Bourbaki ?

JEAN-PIERRE SERRE : Je ne sais comment, mais j’ai découvert que la prochaine réunion avait lieu à Nancy en octobre 1948. À l’époque, je vivais à Auxerre, parce que ma femme y enseignait. Sans le dire à personne sauf à elle, j’ai pris le train pour Paris, puis un autre train pour Nancy.

J’ai réservé une chambre dans un hôtel, et le lendemain je me suis rendu au département de mathématiques. Il y avait un grand amphithéâtre où se tenait la réunion de Bourbaki. Je me suis d’abord assis au fond, puis je me suis rapproché de plus en plus, et finalement j’ai commencé à participer aux discussions. Cela ne semblait déranger personne.

JAVIER FRESAN : Qui était là ?

JEAN-PIERRE SERRE : Probablement Cartan, Chevalley, Delsarte, Dieudonné... mais ce dont je me souviens le plus, c’est de quelque chose que j’ai dit. Ils discutaient des chapitres sur la théorie des corps (Algèbre V), et Chevalley voulait supprimer la théorie de Galois parce qu’elle est trop technique. Je suis intervenu et j’ai déclaré : “La théorie de Galois est inutile.” Ironiquement, je l’ai ensuite tellement utilisée pour le reste de ma vie ! Les membres de Bourbaki ne m’en ont pas tenu rigueur, et ils m’ont invité à la réunion suivante.

Finalement, il y a eu un compromis avec Chevalley, qui a dit : “Si nous incluons la théorie de Galois dans ce chapitre, alors nous devrions aussi faire les algèbres de Lie.” Bourbaki a accepté, et c’est ainsi que le premier rapport sur les algèbres de Lie par Chevalley a été rédigé.

Plus tard, lorsque Bourbaki m'a invité à le rejoindre, on m'a demandé d'écrire quelque chose sur les corps ordonnés parce que j'avais publié une courte note sur le sujet. C'est ainsi que j'ai commencé dans Bourbaki.

JAVIER FRESAN : En lisant cette première note sur les corps ordonnés, on a l'impression que votre style était déjà pleinement formé.

JEAN-PIERRE SERRE : C'était le style Bourbaki. Ai-je appris à écrire en l'imitant, ou cela venait-il simplement naturellement ? Je ne sais pas.

JAVIER FRESAN : Quels textes avez-vous écrits pour Bourbaki ?

JEAN-PIERRE SERRE : À la fin de chaque réunion, Dieudonné assignait des tâches à chacun, et pendant deux ans la mienne a été de terminer ma thèse.

Un texte auquel j'ai consacré beaucoup de temps a été le fascicule de résultats sur les variétés différentiables. C'était difficile, parce qu'il ne donne que des énoncés sans démonstrations, il faut donc reconstituer les preuves dans sa tête au fur et à mesure. Mais à l'époque j'étais assez jeune pour être confiant, et je ne pense pas avoir laissé passer quoi que ce soit d'incorrect.

J'y ai inclus beaucoup de choses qui n'étaient pas dans la littérature, par exemple sur les feuilletages invariants par Frobenius sur les variétés analytiques en caractéristique p .

J'ai aussi écrit une centaine de pages d'exercices (réduits à environ quarante par la composition en petits caractères) pour l'un des volumes sur les algèbres de Lie.

J'y ai pris plaisir. Par exemple, j'ai inventé des exercices sur les groupes de Coxeter hyperboliques, que j'avais appris dans les cours de Koszul au Tata Institute, et aussi sur les invariants de Dickson.

En algèbre commutative, j'ai eu une certaine influence sur le programme. Les anciens projets commençaient par les "spécialisations", et j'ai dit : "Non, nous commencerons par les modules plats." Nous avons conservé la théorie des valuations. Grothendieck, qui était alors membre de Bourbaki, pensait que les valuations étaient inutiles, mais nous les avons conservées quand même.

Grothendieck

JAVIER FRESAN : Grothendieck avait une relation compliquée avec Bourbaki.

JEAN-PIERRE SERRE : Il n'était pas fait pour la collaboration.

JAVIER FRESAN : J'ai l'impression que vous ne voulez pas trop parler de Grothendieck, est-ce que je me trompe ?

JEAN-PIERRE SERRE : J'ai des sentiments mitigés.

Peu de choses parmi ce que Grothendieck a fait m'ont vraiment surpris. Ses premiers articles sur les espaces nucléaires sont très originaux. C'est une théorie que j'ai vendue à Bott, et il a pu l'utiliser dans l'un de ses premiers articles. J'ai été surpris par son théorème de Riemann–Roch, parce que nous n'avions jamais vu d'énoncés de ce type sur une base générale. La topologie étale ne m'a pas surpris, parce que je l'avais trouvée en dimension un. Sa notion générale d'espace ? Je voyais bien qu'il est commode de parler le langage des espaces pour des choses qui ne sont pas des espaces, mais j'étais déjà jusqu'au cou dans les définitions.

Pour moi, les Éléments de Géométrie Algébrique étaient une démonstration d'une grande puissance intellectuelle, non d'imagination. L'œuvre est plus originale que celle de Bourbaki, mais l'idée de base est encore inspirée par Bourbaki ; il y a une raison pour laquelle cela s'appelle Éléments. À part cela, au lieu d'une entreprise collective, c'était le travail d'une seule personne. Il disait lui-même : “Une fois cela fait, nous pourrions vraiment faire de la géométrie algébrique.” Ces fondements sont extraordinairement utiles ; on pourrait difficilement travailler sans eux.

À cette époque, je ne considérais plus la géométrie algébrique comme un sujet de recherche pour moi, mais simplement comme un outil de travail. J'étais attiré par la théorie des nombres. On ne peut pas résister aux formes modulaires.

JAVIER FRESAN : Grothendieck vous a dit que les formes modulaires étaient des absurdités à cause des conditions de croissance artificielles à l'infini, n'est-ce pas ?

JEAN-PIERRE SERRE : Il ne pouvait pas apprécier les belles choses qui n'étaient pas directement liées à ce qu'il faisait – exactement le contraire de l'attitude de Weil.

J'ai essayé plusieurs fois de l'intéresser aux formes modulaires et, plus généralement, au programme de Langlands, mais c'était sans espoir.

Il était incapable de comprendre ce genre de choses.

Influences

JAVIER FRESAN : Qu'est-ce qui vous a le plus influencé quand vous étiez jeune ?

JEAN-PIERRE SERRE : L'un des premiers livres sérieux que j'ai lus a été les deux volumes de Moderne Algebra de van der Waerden. J'avais un oncle en Amérique qui est devenu millionnaire grâce au pétrole au Venezuela. Sa fille, qui avait mon âge, a réussi à m'envoyer de New York des livres qui étaient introuvables en France en 1947 : la Théorie des opérations linéaires de Banach, la Theory of Lie Groups de Chevalley, et le Moderne Algebra de van der Waerden.

Un mathématicien polonais écrivant en français ; un mathématicien français écrivant en anglais ; un mathématicien néerlandais écrivant en allemand.

Ce fut une excellente leçon : je ne devais pas avoir peur des langues étrangères.

JAVIER FRESAN : Êtes-vous un héritier de l'école allemande ?

JEAN-PIERRE SERRE : Oui, dans un sens. Principalement à travers mes aînés. Weil, Chevalley et Dieudonné étaient allés en Allemagne pour apprendre les mathématiques, parce qu'en France le sujet principal, voire presque unique, à l'époque était les fonctions d'une variable complexe.

J'ai ensuite lu beaucoup de mathématiques allemandes. Étudiant, j'ai appris davantage dans le Moderne Algebra que dans Bourbaki. À cette époque, seule la première version d'Algèbre : Chapitre I existait. Les deux livres de Seifert et Threlfall ont aussi été importants pour moi : le Lehrbuch der Topologie, qui couvrait les bases mais contenait aussi des éléments encore difficiles à trouver aujourd'hui, et leur volume sur la théorie de Morse, Variationsrechnung im Grossen.

L'Idealtheorie de Krull m'a un peu moins influencé parce que j'étais déjà en train de développer l'algèbre commutative par moi-même. Il était clair que Krull comprenait l'importance de la localisation.

JAVIER FRESAN : Avez-vous appris la théorie des corps de classes en lisant Artin ?

JEAN-PIERRE SERRE : Je l'ai d'abord apprise de Weil, assis à un café près de la rue d'Ulm.

En moins d'une heure, il m'a expliqué les théorèmes de la théorie des corps de classes en termes cohomologiques. C'est quelques années plus tard que j'ai lu le séminaire Artin–Tate. J'ai même pu en suivre une partie lorsque j'étais en visite à Princeton en janvier 1952.

À cette époque, mon esprit était comme une éponge. On m'expliquait des mathématiques, et cela entraînait simplement. J'avais un désir immense d'apprendre.

JAVIER FRESAN : Et Frobenius ?

JEAN-PIERRE SERRE : J'ai fini par éditer ses œuvres complètes. Ce fut un défi car il n'existait même pas de liste complète de ses publications. J'ai correspondu avec Siegel, qui avait été un étudiant de Frobenius.

J'ai dû parcourir les grandes revues de son époque, volume par volume, pour voir s'il y avait publié.

Mais je connaissais déjà les résultats de Frobenius d'après les manuels standards.

Par exemple, j'ai appris la théorie des caractères dans L'Intégration dans les groupes topologiques de Weil. Il développe la théorie des groupes compacts si clairement que lorsqu'on se spécialise aux groupes finis, tout fonctionne parfaitement. C'est le genre de sujet où l'on bénéficie de tout refaire soi-même.

J'aime aussi beaucoup les articles de Schur, mais je ne les ai lus que récemment, au cours des dix ou vingt dernières années.

Théorie des groupes

JAVIER FRESAN : Votre livre le plus récent porte sur les groupes finis, un sujet avec lequel vous avez joué pendant la majeure partie de votre vie mathématique.

JEAN-PIERRE SERRE : Je me suis offert un plaisir de vieil homme.

Je suis attiré par les belles choses concrètes. Par exemple, j'ai écrit tout un chapitre sur les "petits groupes", où j'explique avec démonstrations des faits tels que l'isomorphisme $PSL_2(9) \simeq A_6$. Croire est plus facile que prouver. Les gens disent généralement : "Prenez deux éléments ; ils engendrent les mêmes sous-groupes. . ." Mais ma morale bourbakiste est que j'utilise le moins possible de matrices explicites. J'ai aussi pris plaisir à trouver une preuve du fait bien connu que, à isomorphisme près, il existe un unique groupe simple d'ordre 168.

JAVIER FRESAN : Est-ce votre livre préféré ?

JEAN-PIERRE SERRE : Non. Mon préféré reste *Lectures on $NX(p)$* . L'écrire a été un délice. La plupart des énoncés concernent des schémas de type fini sur $\mathbb{Z}$, sans hypothèses supplémentaires. Et puis, parce que je devais expliquer la notation du titre, ce fut la seule fois où je n'ai pas eu de mal à trouver la première ligne de l'introduction : "Le titre de ces leçons nécessite une explication. . ."

JAVIER FRESAN : Il est rare de prouver un théorème intéressant sur tous les groupes, et pourtant vous avez réussi à en prouver un.

JEAN-PIERRE SERRE : C'est ce qu'a écrit Humphreys dans sa recension de mon article dédié à Borel. Le résultat principal est que, en caractéristique p , le produit tensoriel $V_1 \otimes V_2$ de représentations semi-simples d'un groupe est semi-simple, tant que la somme des dimensions de V_1 et V_2 est au plus $p + 1$.

En préparant mon cours au Collège de France sur les points de torsion des variétés abéliennes, j'avais vu des résultats dans cette direction dans le travail de Nori, mais sans borne précise. Parfois je me pose des questions parce que je ne peux pas résister à l'envie de savoir. J'ai dû faire quelques calculs et voir que $p + 1$ est une borne plausible. Elle est optimale pour SL_2 , et Harish-Chandra avait la philosophie que si l'on comprend SL_2 , alors on comprend tous les groupes semi-simples. Un point de vue optimiste.

Un jour, Broué m'a dit qu'il allait à une conférence en Angleterre, et qu'il ne savait pas de quoi parler. Je lui ai dit : "Tu devrais mentionner cette conjecture." Je n'ai aucune idée de pourquoi. Quand il est parti, j'ai pensé : "Mais pourquoi ne pas la prouver moi-même ?" Une étrange expérience. . . C'est un joli théorème. J'en suis content.

Heureux de faire des mathématiques

JAVIER FRESAN : Vous donnez toujours l'impression d'être heureux de faire des mathématiques.

JEAN-PIERRE SERRE : Oh oui !

JAVIER FRESAN : Y a-t-il eu des moments difficiles où vous avez pensé que vous n’y arriveriez pas ?

JEAN-PIERRE SERRE : J’ai été malheureux pendant mes deux premières années au CNRS parce que je ne trouvais rien. Mon père, qui m’a toujours soutenu, est mort avant que j’aie la chance de faire mes preuves. J’ai publié cette note sur les corps ordonnés. J’ai aussi publié quelque chose qui présentait peu d’intérêt dans une revue hongroise.

Il y a eu un moment difficile quand j’avais un peu plus de trente ans. J’avais fait un road trip dans l’ouest des États-Unis avec ma femme et ma fille. J’ai passé un mois à déterminer quelles routes prendre et à chercher des hôtels, et à mon retour à l’IAS, où j’étais en visite, je n’ai pas pu travailler pendant un autre mois entier. C’était triste d’arrêter de faire des mathématiques à l’âge de trente ans.

Je ne me souviens pas avoir été malheureux après cela. Montrer que la représentation de Galois attachée à une courbe elliptique a une grande image m’a pris environ dix ans, mais je faisais d’autres choses entre-temps, et je n’étais pas malheureux parce que je travaillais sur des cas particuliers.

JAVIER FRESAN : Un autre article difficile à écrire a été celui sur les représentations modulaires de $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$.

JEAN-PIERRE SERRE : Il a paru en 1987, mais j’avais déjà mentionné une forme moins précise de la conjecture dans une lettre à Tate de 1973.

Le cas du niveau 1 était clair et correspondait parfaitement aux exemples. Formuler une conjecture précise dans le cas général, grâce en particulier aux calculs numériques de Mestre, a pris longtemps.

Il fallait comprendre la ramification des formes modulaires avec “un niveau désagréable et un mauvais caractère”, un sujet sur lequel j’ai beaucoup appris de Fontaine.

J’ai ensuite réalisé qu’il y a certains cas où la “forme précise” de la conjecture est incorrecte. Le problème est lié à la notion de formes modulaires modulo p . J’avais choisi de les voir comme des réductions modulo p des formes modulaires usuelles, un cadre que je connaissais et qui pouvait être expliqué facilement. Pourtant, à un niveau plus profond, je savais qu’elles devaient être définies purement en caractéristique p , à la Katz.

JAVIER FRESAN : Cela n’a pas diminué votre amour pour les formes modulaires.

JEAN-PIERRE SERRE : J’ai toujours aimé jouer dans le “jardin des délices modulaires”, comme l’appelait Godement. Il y a tant de points de vue différents sur les formes modulaires que l’un d’eux est forcément susceptible de vous donner quelque chose d’intéressant. C’est un terrain de jeu parfait pour les optimistes.

JAVIER FRESAN : Avez-vous déjà attaqué des problèmes ouverts bien connus ?

JEAN-PIERRE SERRE : Borel m'a expliqué que si je vais travailler sur un problème ouvert, un de ceux sur lesquels d'autres se sont déjà battus, il faut que je sente que j'ai quelque chose que les autres auraient pu manquer. C'est pourquoi je n'ai jamais essayé de prouver l'hypothèse de Riemann.

Il y a des gens dont l'esprit est assez fort pour se concentrer sur un seul problème pendant une longue période. Le mien n'est pas comme ça. Il aime jouer.

Groupes d'homotopie des sphères

JAVIER FRESAN : Cartan était votre directeur, mais il ne vous a pas donné de sujet de thèse. Comment l'avez-vous trouvé ?

JEAN-PIERRE SERRE : Cartan n'était mon directeur que de nom. J'ai beaucoup travaillé pour son séminaire, à la fois pour apprendre et pour rédiger. Au début, je m'intéressais à la théorie des représentations en dimension infinie, mais je ne trouvais rien à y faire. Dans le séminaire, j'ai découvert les groupes d'homotopie et les espaces d'Eilenberg–MacLane.

Il y a une dualité frappante entre ces deux sujets. Dans un cas, disons les sphères, l'homologie est connue et c'est l'homotopie que l'on cherche à déterminer. Pour les espaces d'Eilenberg–MacLane, tous les groupes d'homotopie sauf un sont triviaux, et l'on veut calculer la cohomologie. Ce sont deux faces différentes du même sujet.

Chaque fois que l'on progresse d'un côté, on ne peut s'empêcher de progresser de l'autre.

JAVIER FRESAN : Cette observation a-t-elle été votre point de départ ?

JEAN-PIERRE SERRE : J'ai lu une note de quelques lignes dans laquelle quelqu'un calculait la cohomologie de l'espace d'Eilenberg–MacLane $K(\mathbb{Z}, 2)$ en l'identifiant à l'espace projectif infini $\mathbb{P}^\infty(\mathbb{C})$.

Puisque $\mathbb{P}^\infty(\mathbb{C})$ est le quotient S^∞/S^1 , et que S^∞ est contractile, on obtient un fibré dont l'espace total est contractile, de base $K(\mathbb{Z}, 2)$, et de fibre $K(\mathbb{Z}, 1)$. Cela suggérait que, pour un groupe abélien A arbitraire et un entier n , il existe une fibration $E \rightarrow B$ dont l'espace E est contractile et la base $B = K(A, n+1)$, ce qui implique que sa fibre F est un espace $K(A, n)$.

Avec tout l'enthousiasme de la jeunesse, je me suis convaincu que je pouvais construire une telle fibration en considérant l'espace E des chemins sur B . Plus généralement (comme je l'ai remarqué plus tard), on peut partir de n'importe quel espace connexe X , au lieu de $K(A, n+1)$, et définir $E = EX$ comme l'espace des chemins, partant d'un point de base donné x de X (c'est-à-dire les applications continues $f[0, 1] \rightarrow X$ avec $f(0) = x$, et définir une application de projection $pEX \rightarrow X$ par $p(f) = f(1)$).

La fibre de x est l'espace des lacets ΩX de X . En appliquant cette construction à $X = K(A, n+1)$, on obtient ce que l'on voulait.

JAVIER FRESAN : Fut-ce la découverte soudaine dans le compartiment du train ?

JEAN-PIERRE SERRE : Oui. J'étais dans le train de nuit revenant de vacances. J'ai réveillé ma femme et j'ai dit : "Ça y est, j'ai trouvé !" J'avais trouvé la fibration $E \rightarrow EX$ que je voulais, sauf qu'aucune des définitions d'un espace fibré dans la littérature de l'époque n'avait été conçue pour cela. Mais j'étais certain que cela fonctionnerait.

En supposant aussi pouvoir utiliser la suite spectrale de Leray, j'ai effectué de nombreux calculs pour les espaces d'Eilenberg–MacLane et les sphères. Pour les espaces d'Eilenberg–MacLane à coefficients dans $\mathbb{Q}$, j'ai prouvé que la cohomologie est une algèbre polynomiale. Dualement, cela suggérerait que les groupes d'homotopie des sphères sont finis¹. À l'époque, on ne savait même pas qu'ils sont de type fini. Beaucoup de concepts ont émergé durant cette période.

JAVIER FRESAN : J'imagine que vous avez dû surmonter des difficultés techniques.

JEAN-PIERRE SERRE : La principale était de montrer que la suite spectrale de Leray s'applique à "mes" espaces fibrés, et surtout aux fibrations d'espaces de lacets. J'ai été sauvé par Cartan et Koszul. Lors d'une réunion de Bourbaki (vers octobre 1950), ils m'ont demandé où j'en étais avec ma thèse. Koszul m'a suggéré d'utiliser des cubes au lieu de simplexes pour construire une filtration. Il y avait quelques lemmes ennuyeux. Je les ai travaillés mentalement pendant trois jours, allongé sur un canapé.

Au bout de trois jours, je les voyais assez clairement pour écrire une preuve. Je pouvais alors écrire ma thèse : au rythme d'une page par jour, sept jours sur sept, cela m'a pris trois mois, et je l'ai soutenue en mai 1951. Elle a paru (en français) dans les *Annals* à la fin de l'année. Eilenberg m'avait donné un bon conseil, comme d'habitude : "N'essaie pas d'aller aussi loin que possible. Ce que tu as est déjà très nouveau."

JAVIER FRESAN : Avez-vous continué à essayer de calculer davantage de groupes d'homotopie ?

JEAN-PIERRE SERRE : Pendant un certain temps. Un jour, juste après ma thèse, je suis allé voir Cartan et Eilenberg et je leur ai dit que j'avais prouvé que les groupes d'homotopie des sphères sont effectivement calculables. Ils se sont simplement moqués de moi ! J'ai donc décidé de travailler sur autre chose, et puis un peu plus tard quelqu'un a publié ce résultat dans les *Annals*. C'est la seule fois où Cartan s'est moqué de moi.

J'ai continué à calculer la cohomologie des espaces d'Eilenberg–MacLane à coefficients dans $\mathbb{Z}/2$, et de là j'ai pu prouver que pour tout $n \geq 2$, il existe une infinité d'entiers i tels que le groupe d'homotopie $\pi^i(S^n)$, lorsqu'il est fini, ait un ordre pair.

JAVIER FRESAN : Donc, en particulier, il est non nul !

JEAN-PIERRE SERRE : Mon intérêt pour ce genre d'énoncé a été suscité par une conversation avec

1. À l'exception de $\pi^n(S^n) = \mathbb{Z}$ et $\pi^{2n+1}(S^n)$ pour n pair, qui est une somme directe de $\mathbb{Z}$ et d'un groupe fini.

Chevalley. Revenant des États-Unis, il m’a montré les groupes $\pi^i(S^3)$ pour de petites valeurs de i , qu’il avait appris dans un cours de J. C. Moore. Je lui ai dit que je les connaissais déjà ; je voulais savoir comment la suite continue. Il a répondu : “La continuation est nulle.”

Mes petites cellules grises se sont indignées. “Quoi ? Ce n’est simplement pas possible !” [“C’est pas Dieu possible !”] J’ai donc prouvé ce théorème par indignation, une technique efficace. La preuve m’a fait utiliser pour la première fois des arguments de théorie analytique des nombres.

Cartan

JAVIER FRESAN : Comment étaient vos relations avec Cartan ?

JEAN-PIERRE SERRE : Il y a une vidéo dans laquelle la fille de Broué me demande : “Qu’est-ce que Cartan pour vous ?” Je regarde Cartan et je dis : “C’est un peu difficile à expliquer.” Il est d’accord : “Oui, c’est un peu difficile à expliquer.” Après cela, nous rions tous les deux et je dis : “À l’École Normale, et à la Sorbonne, j’avais des professeurs qui n’étaient pas très bons, et puis Cartan est arrivé, et c’était autre chose !” Dans le deuxième volume de mes œuvres complètes, j’ai inclus une photographie de nous deux riant comme de vieux complices.

Nous étions comme une famille : il était clair que j’étais une sorte de fils. Après sa mort, j’ai dit devant la famille de Cartan qu’“il était sévère avec les erreurs, mais pas avec les gens qui les commettaient”, et ils ont tous sursauté parce que, d’après leur expérience, ce n’était pas vrai.

Je n’ai aucun souvenir que Cartan m’ait demandé de réviser l’un des textes que j’ai écrits pour son séminaire, alors que d’autres ont dû produire deux ou trois versions successives. Il a toujours accepté les miens immédiatement. Il semble que j’avais le style qu’il voulait.

Un jour, il m’a dit : “Tu vois, Serre, à mon époque, on faisait son service militaire, on écrivait sa thèse, on se mariait et on avait des enfants. Et toi, tu as tout fait dans l’ordre inverse !” Ce n’était pas tout à fait vrai, parce que ma fille a été conçue après mon mariage, mais le reste était en effet dans l’ordre inverse²

Questions et conjectures

JAVIER FRESAN : Comment distinguez-vous une question d’une conjecture ?

JEAN-PIERRE SERRE : En principe, c’est facile. Une conjecture signifie que vous pensez que la réponse est oui. Une question signifie que vous n’êtes pas prêt à vous engager. Par exemple, cela m’agaçait que les gens appellent conjecture – ce qui est devenu plus tard un théorème – le fait que les modules projectifs de type fini sur $k[x_1, \dots, x_n]$ sont libres, parce que dans FAC il était écrit assez explicitement : “On ne sait pas si. . .” En fait, personne d’autre n’avait même posé la question. Pourtant, cela m’ennuyait aussi d’écrire “Je ne sais pas si. . .”. C’est ce que j’aurais dû écrire.

2. Et, parce que j’avais un enfant, j’ai évité de faire mon service militaire.

À un moment, quelqu'un a publié un article dans les *Annals* intitulé "Contre-exemple à une conjecture de Serre", une conjecture que je n'avais jamais faite. Là encore, j'avais écrit "On ne sait pas si...".

Plus tard, avec Ekedahl, nous avons écrit une courte note assez amusante sur les jacobiniennes qui se décomposent en produit de courbes elliptiques.

Nous avons développé toute une série d'exemples, certains de genre assez grand, mais nous ne voulions pas faire de conjectures. Nous avons donc posé deux questions : on peut se demander s'il existe de tels exemples pour tout genre g , ou si, au contraire... Je n'en ai absolument aucune idée. On ne peut pas raisonnablement faire des conjectures sur des choses comme ça.

JAVIER FRESAN : Vous m'avez dit que vous avez fait vos Conjectures I et II sur la cohomologie galoisienne des groupes algébriques "avec l'ignorance d'un débutant, mais le goût des affirmations audacieuses".

JEAN-PIERRE SERRE : J'étais très ignorant des groupes algébriques à l'époque, mais tout cela me semblait si beau. En tant qu'ancien topologue, je savais que $\pi^{n+1}(BG)$ est isomorphe à $\pi^n(G)$, donc j'étais satisfait de l'idée d'associer la dimension cohomologique 1 aux groupes connexes ($\pi^0(G) = 0$) et la dimension cohomologique 2 aux groupes simplement connexes ($\pi^1(G) = 0$). Je me souviens que Kneser était sceptique au sujet de la Conjecture II parce qu'il savait qu'elle était déjà difficile pour les groupes classiques sur les corps de nombres totalement imaginaires. Je ne savais pas vraiment ce qui avait déjà été fait et je n'avais pas de contre-exemples évidents. Je pense que je n'aurais pas fait une telle conjecture plus tard. J'ai simplement eu de la chance.

JAVIER FRESAN : Pensez-vous toujours que la Conjecture II est vraie ?

JEAN-PIERRE SERRE : Difficile à dire. Je pense probablement que je ne pense rien. En général, quand j'avance une conjecture, j'arrête d'y penser. Je considère que j'ai fait mon travail, et ensuite les gens peuvent s'amuser avec. Je ne vais pas commencer à résoudre mes propres conjectures... À quoi cela me ferait-il ressembler ?

JAVIER FRESAN : Y a-t-il une de vos conjectures où vous regrettez de ne pas avoir été plus audacieux ?

JEAN-PIERRE SERRE : J'essaie toujours de faire les conjectures les plus audacieuses, et parfois elles l'étaient trop. Voici un exemple. Dans GAGA j'avais remarqué que quelque chose était vrai pour SL_n et les groupes symplectiques.

Qu'ont-ils en commun ? Ils sont semi-simples ! J'ai donc fait une conjecture, et Grothendieck a bientôt prouvé qu'au contraire, elle était vraie essentiellement seulement dans ces deux cas. La conjecture était aussi fausse que possible.

JAVIER FRESAN : Cela vous dérange-t-il quand l'une de vos conjectures est fausse ?

JEAN-PIERRE SERRE : Non. Il y a des gens qui prennent les choses à cœur, mais pas moi.

Je suis ravi quand une question est résolue ; ce qui compte est de savoir.

Je suis choqué par les gens qui pensent que ce serait une catastrophe si l'hypothèse de Hodge était fausse. Ce serait un grand progrès ! L'important est de savoir.

Cela m'irrite aussi quand les mathématiciens écrivent "malheureusement". Ou qu'ils "espèrent". C'est absurde. Quand on leur dit que leur espoir est faux, deviennent-ils désespérés ?

Ce n'est pas que les choses me laissent indifférent, mais les contre-exemples apportent beaucoup d'informations nouvelles (pensez, par exemple, aux constructions de Milnor–Kervaire de sphères avec des structures différentiables non standard – ou sans aucune structure de ce type).

Contre-exemples

JAVIER FRESAN : Quel est votre contre-exemple préféré ?

JEAN-PIERRE SERRE : J'aime mon exemple d'une variété projective lisse sur un corps k de caractéristique p qui ne peut pas être relevée en caractéristique zéro. C'était un contre-exemple à l'idée de Weil selon laquelle on pourrait toujours relever. Lui et Zariski pensaient en avoir une preuve en utilisant le fait que les coordonnées de Chow sont entières.

Quand je l'ai dit à Weil, il est sorti de ses gonds. Il m'a écrit :

"Vous avez prouvé l'hypothèse de Riemann." C'était sa façon de dire que mon argument était faux, car d'une affirmation fausse, tout s'ensuit. Finalement, il a accepté.

La théorie des groupes finis a été très utile : il est tout simplement ridicule de penser qu'une représentation modulo p se relève en caractéristique zéro !

J'ai donc construit mes exemples en partant d'une représentation qui ne se relève pas et en essayant de trouver une variété qui, en un certain sens, l'englobe.

Je n'étais pas complètement satisfait de ce contre-exemple.

Je voulais un exemple qui ne soit pas relevable du tout, c'est-à-dire que si la variété se relève sur un anneau local A , alors $pA = 0$. J'ai été heureux de construire un tel exemple il y a quelques années, dans une lettre à Illusie qui figure dans le cinquième volume de mes œuvres complètes. Une chose curieuse est que je dois supposer que k est plus grand que $??p$.

JAVIER FRESAN : Ce "cinquième et dernier volume", comme vous l'appellez dans la préface, vient de paraître. Qu'y avez-vous mis ?

JEAN-PIERRE SERRE : Mes articles préférés dans ce volume sont :

- (1) l'article sur les sous-groupes finis de $G(k)$, où je généralise les bornes de Minkowski sur l'ordre des sous-groupes finis de $GL^n(\mathbb{Q})$ à des groupes réductifs arbitraires G sur des corps arbitraires k ;
- (2) l'article sur les bases normales auto-duales des extensions de Galois en caractéristique 2, avec la caractéristique surprenante que l'existence d'une telle base ne dépend que du groupe de Galois ;
- (3) le séminaire Bourbaki sur la complète réductibilité, un sujet que j'ai beaucoup aimé en raison de la simplicité de ses énoncés une fois traduits dans le langage des immeubles de Tits ;
- (4) les notes d'une série de conférences sur les invariants cohomologiques (UCLA, 2001), écrites avec l'aide de Skip Garibaldi.

Il y a d'autres sujets que j'ai aimé aborder. Par exemple, Comment utiliser les corps finis pour des problèmes concernant les corps infinis. Le reste est peut-être moins intéressant, mais Weil m'a dit un jour que les Œuvres complètes devraient inclure tout ce que l'auteur a écrit³. On ne sait jamais ce qui peut intéresser un futur lecteur. Je regrette de ne pas avoir toujours suivi son conseil. J'ai laissé de côté la plupart de mes articles en collaboration avec Borel dans les premiers volumes, et maintenant on a l'impression que je n'ai jamais travaillé sur les groupes semi-simples !

Collaboration

JAVIER FRESAN : Avez-vous aimé collaborer ?

JEAN-PIERRE SERRE : Je préfère écrire seul, mais j'ai beaucoup appris en collaborant, surtout avec Armand Borel. Pour notre premier article ensemble, sur les sous-groupes des groupes de Lie compacts, nous avons travaillé à la manière de Bourbaki : l'un de nous écrivait un brouillon, et l'autre le réécrivait entièrement. Mais plus tard, nous sommes devenus paresseux et avons utilisé la dangereuse⁴ méthode consistant à écrire chacun une section et à les recoller.

Avec Hochschild, j'ai utilisé une autre méthode bourbakiste : lire notre article à voix haute ligne par ligne. Pourtant, nous avons encore laissé passer une erreur dans l'un des théorèmes.

JAVIER FRESAN : Et à part écrire ?

JEAN-PIERRE SERRE : J'aime discuter de mathématiques, mais je n'ai pas beaucoup de souvenirs d'avoir prouvé quelque chose avec d'autres personnes. Voici une exception. Je me souviens avoir travaillé avec Borel le dimanche 25 juin 1950. Nous étions dans la chambre d'hôtel du Quartier latin où ma femme et moi vivions à l'époque. Elle est revenue au moment où nous finissions d'écrire une note contenant la preuve que l'on ne peut pas fibrer $\mathbb{R}^n$ par des fibres compactes non réduites à un point, et nous a dit que la guerre de Corée avait commencé. Nous avons répondu : "Ah bon ?", et nous avons simplement continué notre travail. Ce fut ma formation aux suites spectrales. Nous avons trouvé le théorème un dimanche, le père de Cartan l'a apporté à l'Académie des sciences le lundi, et le mercredi nous avions les épreuves.

3. J'ai gardé son conseil à l'esprit lorsque j'ai édité les œuvres de Frobenius, Cartan, Steinberg et Tate.

4. Comme le dit le proverbe, "en collaboration, les théorèmes s'additionnent et les erreurs se multiplient".

JAVIER FRESAN : Quelques années plus tard, vous avez aussi prouvé un théorème avec Cartan lors d'une réunion de Bourbaki.

JEAN-PIERRE SERRE : Il s'agissait de la finitude des groupes de cohomologie d'une variété analytique compacte à coefficients dans un faisceau cohérent. J'en avais besoin pour ce que je voulais faire avec l'espace projectif. Cartan et moi avons réduit la preuve à un énoncé sur les perturbations d'opérateurs compacts sur un espace de Fréchet. C'était clairement du domaine de Schwartz.

Nous lui avons dit : "Prouve-le." Schwartz l'a prouvé. Nous lui avons dit : "Publie-le ; nous en avons besoin." Schwartz a dit : "Non, mais je suis heureux si vous le publiez." Il l'a plus ou moins dicté, et Cartan et moi avons rédigé la note en son nom.

JAVIER FRESAN : Parmi vos contributions, avez-vous le sentiment que certaines étaient moins inévitables que d'autres, que les gens ne les auraient peut-être pas trouvées sans vous ?

JEAN-PIERRE SERRE : En mathématiques, il est difficile de ne pas penser que tout aurait fini par être fait. C'est plutôt la façon dont les choses arrivent qui est parfois surprenante. Avec les groupes d'homotopie des sphères, l'ingrédient surprenant a été la fibration de l'espace des lacets. Aucune surprise de ce genre dans FAC, ni dans GAGA⁵.

FAC et GAGA

JAVIER FRESAN : C'est précisément une situation où les articles n'ont pas été écrits dans l'ordre que l'on imagine, n'est-ce pas ?

JEAN-PIERRE SERRE : J'ai d'abord prouvé qu'un faisceau cohérent sur l'espace projectif complexe est donné par un module sur une algèbre de polynômes, et j'ai trouvé les arguments de GAGA. Mais ensuite j'ai pensé : "Sous cette forme, cela devrait fonctionner sur un corps arbitraire, à condition d'avoir défini les faisceaux cohérents." J'ai donc dû écrire FAC avant GAGA.

Tout était assez évident, sauf une difficulté concernant la cohomologie. Les définitions standard ne s'appliquaient pas, et j'ai dû définir la cohomologie à l'aide de recouvrements. Mais ensuite Igusa m'a écrit qu'il organisait un séminaire sur mon travail, et qu'il ne pouvait pas prouver la suite exacte de cohomologie associée à une suite exacte de faisceaux en degré > 1 . J'ai trouvé une issue, en utilisant la partie jusqu'au degré 1 pour traiter le cas des variétés affines, puis les recouvrements affines pour le cas projectif.

J'ai été malchanceux. Un an plus tard, Godement a trouvé la méthode consistant à plonger un faisceau dans un faisceau injectif, ce qui permet une définition où la suite exacte de cohomologie est évidente. C'est ainsi que Grothendieck l'a fait plus tard.

JAVIER FRESAN : D'où venait la motivation ?

5. J'ai moi-même inventé ces acronymes. Ils vont si bien ensemble !

JEAN-PIERRE SERRE : Je voulais connaître l'analogue des théorèmes A et B de Cartan sur l'espace projectif complexe. Il n'y a pas assez de fonctions holomorphes, mais les polynômes homogènes prennent leur place.

JAVIER FRESAN : Vous étiez en première ligne lorsque Cartan a prouvé les théorèmes A et B.

JEAN-PIERRE SERRE : De retour de Princeton, je suis arrivé au séminaire de Cartan au moment où il expliquait les deux problèmes de Cousin. Surprise.

Cartan nous dit que nous devons penser ces problèmes en termes de faisceaux (le sujet de l'année précédente), que ces faisceaux sont des faisceaux de modules sur le faisceau des anneaux locaux, et que ces modules sont cohérents (une notion nouvelle, inspirée par le travail d'Oka). Puis il nous dit que dans la prochaine leçon il prouvera que le H^1 d'un tel faisceau sur une variété de Stein est nul. Il nous dit aussi, à la fin de la leçon, que peut-être cela peut être généralisé au degré supérieur. J'ai bondi au tableau et j'ai dit à Cartan : "Oui, il faut absolument que vous fassiez le cas du degré supérieur." Bruhat était à mes côtés et m'a soutenu. Je ne me souviens pas de ce que Cartan m'a répondu, mais la semaine suivante il avait dûment prouvé ce qui est devenu le théorème B.

JAVIER FRESAN : Quitter la topologie a-t-il été une décision ?

JEAN-PIERRE SERRE : Je n'ai jamais vraiment changé de sujet ; il y a toujours eu une continuité.

J'ai gardé la topologie comme outil et j'ai souvent utilisé certaines de ses idées. Par exemple, une fois, j'essayais de prouver un théorème sur la cohomologie des groupes profinis. On part d'un groupe profini G et d'un sous-groupe ouvert H de dimension cohomologique p -finie, et la question est de savoir si le groupe plus grand G a la même dimension cohomologique p . Une condition nécessaire est que G ne contienne aucun élément d'ordre p . Est-ce suffisant ? J'essayais de construire un contre-exemple, mais à chaque fois je tombais sur quelque chose qui ne fonctionnait pas. Au bout d'un moment, j'ai réalisé que je rencontrais une question similaire à la non-existence de certaines applications entre la cohomologie des espaces topologiques. Je pouvais résoudre ce problème en utilisant les opérations de Steenrod, et à la fin l'énoncé a été prouvé. Ma femme m'a offert une demi-bouteille de champagne au dîner, ce jour-là.

JAVIER FRESAN : Oscillez-vous entre essayer de prouver quelque chose et essayer de construire des contre-exemples jusqu'à ce que l'un des deux l'emporte ?

JEAN-PIERRE SERRE : Oui, je fais souvent cela. C'est ainsi que procédait Nagata lorsqu'il attaquait des problèmes d'algèbre commutative, où il est difficile d'avoir de l'intuition : on essaie de construire des contre-exemples et on voit ce qui les empêche de fonctionner. De même, Carleson a passé deux ans à chercher une fonction dont la série de Fourier ne converge pas presque partout vers elle, avant de prouver qu'elles convergent. Après tout, prouver un théorème, c'est prouver qu'il n'existe pas de contre-exemples.

Weil

JAVIER FRESAN : J'ai l'impression que Weil n'est pas reconnu à sa juste valeur.

JEAN-PIERRE SERRE : Je suis d'accord. Notez que la phrase française “pas reconnu à sa juste valeur” est ambiguë. Elle dit seulement que deux choses sont différentes : il n'y a pas de signe d'inégalité.

JAVIER FRESAN : Quels sont vos souvenirs du cours de Weil de 1948 sur sa preuve de l'hypothèse de Riemann pour les courbes sur les corps finis ?

JEAN-PIERRE SERRE : À part les coniques, que je connaissais bien, je n'avais jamais entendu parler de géométrie algébrique. J'ai suivi le cours et pris des notes, mais je n'ai pas compris grand-chose. Mon cerveau l'a rangé dans un petit coin, et la fois suivante le sujet n'était plus complètement inconnu.

JAVIER FRESAN : Quel était son style d'enseignement ?

JEAN-PIERRE SERRE : Il n'écrivait pas de notes comme les mathématiciens le font habituellement, mais plutôt des fiches, dans un style littéraire. Sur une fiche, il pouvait n'y avoir qu'une formule, sans aucune preuve. Puis au tableau, il reconstituait la preuve, avec un succès variable.

Je me souviens qu'il a donné une fois une conférence lors d'un congrès au Japon où il est allé au tableau, a écrit $L(s, \chi)$, et rien d'autre, pendant une heure. Il a parlé sans fin des vertus des fonctions L . C'était l'opposé de ses écrits, où souvent il y a une page entière sans un seul saut de ligne.

La place naturelle de Weil à Paris aurait été au Collège de France. Parfois je rêve de ce que cela aurait été.

JAVIER FRESAN : Pourquoi ne l'ont-ils pas choisi ?

JEAN-PIERRE SERRE : C'était après la guerre, et ils ont choisi Leray. Leray avait été prisonnier de guerre, alors que Weil avait refusé de servir.

L'avenir des mathématiques

JAVIER FRESAN : Il fut un temps où vous lisiez et relisiez le texte de Weil *L'avenir des mathématiques*, de 1947.

JEAN-PIERRE SERRE : Oh oui ! Mais j'ai été choqué que mes amis de Harvard ne l'apprécient pas. Ils ne se rendaient pas compte à quelle date il avait été écrit et à quel point il était prophétique. Par exemple, la phrase sur l'étude de la tour d'extensions d'un corps obtenue en extrayant des racines de l'unité d'ordre “infiniment croissant”. C'est exactement ce que Iwasawa a fait dix ans plus tard ! Ce texte est une merveille. Aucun autre mathématicien n'a écrit quelque chose à ce niveau.

Je pense que ce que Tate n'aimait pas, c'est la phrase : “Car jusqu'à présent, quelque larges qu'aient pu être nos généralisations des résultats de Gauss, nous ne pouvons pas dire que nous les ayons

vraiment dépassés.”

Les fonctions L des représentations de groupes non abéliens doivent-elles être considérées comme une large généralisation des résultats de Gauss ? D’une certaine manière, je sens que l’affirmation de Weil de 1947 a cessé d’être vraie lorsque Langlands a annoncé son programme, dans une longue lettre à Weil en 1967 qui a circulé très rapidement.

Je ne peux pas croire que ce soit une coïncidence. Langlands n’avait peut-être pas lu L’avenir des mathématiques, mais il savait que Weil était la meilleure personne pour le comprendre. Si Langlands n’avait jamais existé et que Weil avait eu vingt ans de moins – il y a beaucoup de “si” ici – il aurait peut-être été celui qui aurait découvert le programme de Langlands. Construire des ponts entre des sujets que personne d’autre ne pouvait voir comme liés était son fort.

JAVIER FRESAN : À cet égard, il était l’opposé de Chevalley, n’est-ce pas ?

JEAN-PIERRE SERRE : Chevalley était partisan de travailler sur un seul, et un seul, sujet à la fois. Il m’a dit un jour : “Si l’on essaie de mettre deux choses différentes dans la même photographie, le résultat est flou.” Une belle comparaison, mais “comparaison n’est pas raison”.

Par exemple, il a travaillé à la fois sur les groupes linéaires algébriques et la théorie des nombres, mais jamais sur les points rationnels des groupes algébriques.

Il a aussi réussi à éliminer les méthodes analytiques de la théorie des corps de classes.

Comme je l’ai dit une fois⁶, “elles se sont bien vengées !”

Programme de Langlands

JAVIER FRESAN : Comment avez-vous réagi au programme de Langlands ?

JEAN-PIERRE SERRE : Je connaissais déjà les implications pour les courbes elliptiques sur les nombres rationnels (la conjecture de modularité). Ce qui m’a surpris, c’est la généralité même des idées de Langlands. Par exemple, le principe de fonctorialité, le fait de pouvoir transférer d’un groupe à un autre. J’ai été impressionné que cela puisse être fait.

C’est un programme, pas une collection de conjectures que l’on peut réfuter avec des contre-exemples. Et parce que c’est un programme, avec de nombreuses variantes possibles, il continue d’avancer. L’un de ses charmes est qu’il peut être décomposé en petits morceaux, et de temps en temps les gens réussissent à en prouver un. Par exemple, Wiles a prouvé un “petit morceau”, sur les courbes elliptiques sur $\mathbb{Q}$, et ce petit morceau a suffi pour résoudre Fermat.

Le développement du programme de Langlands est la chose la plus importante à laquelle j’ai assisté.

6. Dans ma conférence pour le bicentenaire de Galois, en pensant au programme de Langlands. La vidéo est disponible à l’adresse <https://www.youtube.com/watch?v=zd0iIVPB8Qo>.

JAVIER FRESAN : Langlands a écrit sa lettre à Weil en 1967, la même année où Weil a publié son article “... Funktionalgleichungen” et où Grothendieck a donné une série de conférences sur les motifs.

JEAN-PIERRE SERRE : 1967 a été une grande époque pour la théorie des nombres. J’ai donné une fois une conférence⁷ avec ce titre. Déjà à l’époque, je sentais que les idées de Weil et de Grothendieck faisaient partie du programme de Langlands.

Les motifs sont apparus dans une lettre que Grothendieck m’a envoyée en 1964, mais ils n’ont été rendus publics que trois ans plus tard, dans un séminaire qu’il a donné à l’IHÉS et qui n’a jamais été rédigé.

Les motifs ne m’ont pas surpris parce que je lui avais souvent expliqué que les invariants ℓ -adiques associés à un morphisme de variétés algébriques ne sont pas indépendants, mais sont liés par les actions des éléments de Frobenius. Grothendieck a poussé l’idée beaucoup plus loin. Avec son optimisme naturel, il a décidé que tous les morphismes entre motifs provenaient de cycles algébriques, ce qui n’est raisonnable qu’en supposant l’hypothèse de Hodge⁸.

Cohomologie étale

JAVIER FRESAN : Quelques années après que Weil a publié ses conjectures, vous avez fait une tentative pour construire une théorie cohomologique pour les variétés algébriques en caractéristique positive.

JEAN-PIERRE SERRE : Cela n’a pas marché. Nous avions déjà des cohomologies modulo p , mais nous ne voulions pas compter les points fixes modulo p . En tant qu’héritier de l’école allemande, j’ai défini des modules sur les vecteurs de Witt du corps de base à partir du faisceau structural. Dans mon optimisme, je pensais qu’ils seraient libres de type fini. Pour les courbes c’est vrai, et ils donnent la même réponse que les représentations ℓ -adiques, mais en dimension supérieure il y a des contre-exemples, déjà pour un produit de deux courbes elliptiques supersingulières.

Grothendieck parle de “l’article tentatif de Serre” dans sa conférence au ICM. Les gens m’ont demandé : “Cela ne vous a pas dérangé ?” Pas du tout : il avait raison.

JAVIER FRESAN : Comment la cohomologie étale a-t-elle été découverte ?

JEAN-PIERRE SERRE : Je connaissais l’article de Weil sur les espaces fibrés, que j’avais présenté au séminaire Bourbaki avant d’écrire FAC. Les espaces fibrés de Weil sont, par définition, localement triviaux pour la topologie de Zariski, et parfois cela fonctionne bien. Mais si H est un sous-groupe connexe de SL_n , le fibré principal H -principal $SL_n \rightarrow SL_n/H$ n’est en général pas Zariski localement trivial. Lorsque H est SO_n , Lang m’avait expliqué que l’existence d’une section rationnelle aurait des conséquences trop fortes pour les formes quadratiques. Ma motivation pour introduire

7. Au département de mathématiques de Harvard, le 28 avril 2017, sous le titre “Il y a 50 ans : une grande époque pour la théorie des nombres”. La vidéo est disponible à <https://www.youtube.com/watch?v=hs01RR99vPI>.

8. D’où les gens qui ne veulent pas supposer cette conjecture doivent utiliser une définition différente des motifs, par exemple celle d’Yves André.

une légère variante de ce qui est devenu la topologie étale était de rendre ces fibrés localement triviaux.

Je peux encore voir l'amphithéâtre Darboux où j'ai donné ma conférence au séminaire Chevalley en avril 1958. J'avais défini ce que je considérais comme le "vrai" H^1 , en lui donnant ce nom, et Grothendieck m'a immédiatement dit que cela allait donner une cohomologie de Weil en tous les degrés et prouver les conjectures de Weil.

JAVIER FRESAN : Qu'est-ce qui vous a empêché d'aller plus loin ?

JEAN-PIERRE SERRE : Je n'avais même pas fait l'effort parce que j'avais un mauvais instinct. J'étais un topologue, donc pour définir H^2 j'aurais dû regarder π^2 , et cela suffisait à me bloquer. Mais Grothendieck ne se souciait pas des groupes d'homotopie. Dans son esprit, tout pouvait s'exprimer en termes de ce qu'il appelait "topologie".

Preuve des conjectures de Weil

JAVIER FRESAN : Comment avez-vous appris la preuve de Deligne de 1974 des conjectures de Weil ?

JEAN-PIERRE SERRE : Je pense avoir déjà raconté cette histoire au moins une fois. J'étais dans une chambre d'hôpital sur le point de subir une opération. J'ai téléphoné à Deligne et je lui ai parlé des petites choses sur lesquelles je travaillais. Il m'a patiemment écouté, puis il a dit : "Tu sais, je pense avoir prouvé les conjectures de Weil." Il m'a expliqué l'idée, et j'ai vu qu'elle était correcte. Faire quelque chose d'aussi important à partir d'une idée aussi simple, cela n'arrive pas très souvent ! Le lendemain, les Raynaud sont venus me rendre visite à l'hôpital, et je leur ai raconté le principe de base de la preuve.

JAVIER FRESAN : Plus tard, vous l'avez même expliqué au roi de Suède...

JEAN-PIERRE SERRE : Lorsque Deligne a reçu le prix Crafoord, j'ai été invité à prendre la parole lors de la cérémonie de remise, en présence du Roi et de la Reine de Suède. On m'avait donné comme consigne que mes remarques ne durent pas plus de cinq minutes, applaudissements inclus (?).

J'avais préparé une seule phrase. Avant de la dire, j'ai expliqué que Deligne méritait le prix parce qu'il avait prouvé un résultat très important et j'ai ajouté, avec un clin d'œil : "Donc je suppose que vous vous attendez à ce que j'explique la preuve." Les mathématiciens dans l'auditoire ont souri d'un air entendu : bien sûr, c'était impossible. Puis j'ai prononcé la phrase que j'avais préparée : "Je vais essayer." J'ai entendu le public retenir son souffle.

Je suis allé au tableau, j'ai dessiné une patate, et j'ai expliqué que beaucoup de gens avaient essayé de la couper en tranches, mais que cela n'avait jamais marché, jusqu'à ce que Deligne réalise qu'il ne pouvait pas y avoir de tranche méchante, parce que cela conduirait à une contradiction.

JAVIER FRESAN : Vous avez aussi prononcé la laudatio lorsqu'il a reçu un doctorat honoris causa

à Paris en 1995.

JEAN-PIERRE SERRE : Là, j'ai choisi le style d'un conte de fées et j'ai parlé du jardin magique, que tout le monde pouvait admirer de loin, mais dont la porte était fermée à clé. Et c'est Deligne qui avait trouvé la clé et ouvert la porte pour que nous puissions tous entrer.

Nettoyer ?

JAVIER FRESAN : Dans les toilettes françaises, il y a un panneau : “Veuillez laisser cet endroit aussi propre que vous l’avez trouvé en entrant.” Vous avez écrit un jour à Tate que vous ressentiez la même chose à propos des mathématiques. Y a-t-il des parties de votre travail que vous n’avez pas laissées propres ?

JEAN-PIERRE SERRE : Il y a au moins deux sujets que j’ai laissés “sales”.

Le premier est le problème des signes dans mon théorème de dualité pour la cohomologie cohérente sur une variété projective lisse X de dimension n . La preuve a été effectuée en deux étapes, séparées par au moins un an. J’ai d’abord prouvé, par récurrence sur la dimension, que $H^n(X, \omega)$ est de dimension un et qu’il est la cible d’un accouplement non dégénéré.

Cela suffit pour de nombreuses applications, mais pas pour toutes. Par exemple, cela n’implique pas que les automorphismes de X agissent trivialement sur $H^n(X, \omega)$.

Il m’a fallu environ un an pour prouver que $H^n(X, \omega)$ a effectivement un élément canonique. Bien sûr, cet élément devait être indépendant du plongement projectif choisi. Le point principal concerne les signes⁹.

Malheureusement, je n’ai pas publié ma preuve, parce que je pensais qu’elle découlerait des résultats plus généraux de Grothendieck, et maintenant je ne me souviens plus de la méthode.

Le deuxième exemple est celui des propriétés des groupes de Galois associés aux variétés abéliennes sur un corps de nombres. J’ai donné deux cours au Collège de France en 1984–1985 et 1985–1986.

Il y a des notes manuscrites des leçons disponibles sur Numdam, et des lettres à Ribet, Bertrand et Vignéras expliquant avec preuves les résultats principaux, mais un compte rendu détaillé manque, probablement parce que ces résultats sont eux-mêmes incomplets.

Publication

JAVIER FRESAN : Avez-vous déjà eu un article rejeté ?

JEAN-PIERRE SERRE : Une seule fois. Mon article sur la distribution d’Euler–Poincaré d’un groupe profini a été rejeté par Inventiones. Avec le recul, je suis d’accord qu’il ne méritait probablement

9. Un exemple typique : le résidu de la 2-forme $dx dy/y$ en $y = 0$ est-il égal à dx ou à $-dx$?

pas d'être publié dans une si bonne revue.

JAVIER FRESAN : Et combien de fois avez-vous reçu un rapport de referee ?

JEAN-PIERRE SERRE : Deux ou trois fois. Il n'y avait pas de rapports de referee pour FAC, GAGA, etc. En 1952, mon article avec Hochschild sur la cohomologie des extensions d'algèbres de Lie a été arbitré par Chevalley. Il a suggéré que nous utilisions des produits extérieurs, et j'ai refusé au motif que tout fonctionne aussi pour les algèbres de Lie de dimension infinie. Je pense que la fois suivante était en 1984, lorsque j'ai soumis mon article sur l'invariant de Witt de la forme $\text{Tr}(x^2)$ aux Commentarii, et Kervaire a trouvé que les arguments à la fin étaient trop brefs et devaient être développés.

Lorsque j'ai dédié mon article "Galois est grand" à Weil, il m'a remercié pour "cette messe célébrée en mon honneur" et a fait des suggestions substantielles. Je les ai toutes examinées, mais elles auraient nécessité de modifier l'ordre soigneusement choisi dans lequel le matériel était présenté. Je n'ai donc rien changé.

Collège de France

JAVIER FRESAN : Où avez-vous le plus aimé faire des mathématiques ?

JEAN-PIERRE SERRE : Je fais des mathématiques à la maison, pas dans un bureau.

Quant à l'enseignement, les endroits que je préfère sont Harvard et le Collège de France. J'ai aussi aimé l'atmosphère à l'Institute for Advanced Study de Princeton et à l'IHÉS.

JAVIER FRESAN : Vous donniez souvent le même cours à Harvard et au Collège.

JEAN-PIERRE SERRE : Tate m'écrivait : "Veux-tu venir cette année ?" et il était entendu que je donnerais un cours. Je choisisais généralement quelque chose dont j'allais parler plus tard au Collège en plus de détails ; cela servait d'entraînement. Je choisisais le sujet complètement librement, bien sûr. C'étaient les deux des auditorios merveilleux.

Seule la première année au Collège a été difficile parce que j'avais un petit auditoire, et cet auditoire était Grothendieck, Cartan et Cartier, et ils me posaient des tonnes de questions pendant le cours. En rentrant chez moi, j'étais épuisé.

JAVIER FRESAN : Vous êtes resté au Collège de France pendant presque quarante ans. Y a-t-il eu des moments où cela a été un fardeau de devoir donner un cours sur de nouvelles recherches chaque année ?

JEAN-PIERRE SERRE : Ce n'a jamais été un fardeau parce que je pouvais prendre des années sabbatiques de temps en temps, et je le faisais quand c'était nécessaire. En 1993, sur le chemin du retour après avoir grimpé des rochers dans la forêt de Fontainebleau, j'ai réalisé que je n'avais pas de sujet pour l'année suivante, alors j'ai simplement décidé : "Je vais prendre ma retraite." J'ai dit

à ma femme en rentrant, puis j'ai informé le Collège. J'ai terminé mon cours en disant : "C'est mon dernier cours : pas seulement de l'année, mais le tout dernier." Quand je raconte cette histoire, j'aime ajouter : "et ils se sont tous jetés par terre de désespoir."

Domage : personne ne l'a fait.

JAVIER FRESAN : Avez-vous déjà interagi avec d'autres professeurs ?

JEAN-PIERRE SERRE : Oui, avec Jacques Tits. Pas avec les autres. Je suis allé écouter l'une des leçons de Foucault parce qu'il était un vieil ami de l'École Normale Supérieure. La salle était comble ; il y avait beaucoup de personnages marginaux assis par terre – cela lui seyait très bien – et il lisait un texte. J'ai donc demandé à Foucault : "Pourquoi fais-tu cela ?" Et il a répondu quelque chose qui m'a choqué : "La façon dont je dis les choses est plus importante que ce que je dis." Il ne voulait pas que les gens fassent des histoires sur le fait qu'il utilise un terme plutôt qu'un autre. J'ai pensé que c'était un mauvais signe.

Vieillesse

JAVIER FRESAN : Dans Souvenirs d'apprentissage, Weil rappelle que les vieillards en Inde, lorsqu'ils mangent des piments, ne peuvent plus ressentir l'intensité du goût dont ils se souviennent dans leur jeunesse. Y a-t-il des domaines des mathématiques pour lesquels vous avez perdu le goût que vous aviez quand vous étiez jeune ?

JEAN-PIERRE SERRE : Je n'en vois aucun. C'est plutôt dans l'autre sens.

Vieillir m'a fait apprécier des sujets dont j'étais ignorant (ou même que je n'aimais pas) quand j'étais débutant. Un bon exemple est la théorie analytique des nombres, que j'aime maintenant beaucoup – en particulier en raison de son intersection croissante avec d'autres sujets comme les groupes de Lie. J'aime aussi la combinatoire.

En dehors des mathématiques

JAVIER FRESAN : Terminons en parlant d'autre chose. En dehors des mathématiques, qu'est-ce qui vous intéresse le plus ?

JEAN-PIERRE SERRE : Qu'est-ce que j'aime le plus ? Les livres, les films, le sport me viennent à l'esprit :

(1) *Livres*. Tellement ! Voici quelques noms de livres et d'auteurs que j'aime le plus :

Les livres de Jean Giono de l'après-guerre (Les récits de la demi-brigade, etc.).

Cet irrésistible écrivain juif, Isaac Bashevis Singer.

Ada de Nabokov est une merveille. Il a même joué un petit rôle dans l'Union mathématique inter-

nationale. J'étais vice-président, et l'autre vice-président était Faddeev. Lorsque la question s'est posée de choisir le prochain président, je ne voulais pas du poste, alors j'ai fait campagne pour Faddeev. C'était la première fois qu'un Russe était choisi, et c'était pendant la période communiste. Et pourquoi Faddeev et moi nous entendions-nous si bien ? Parce que nous aimions tous les deux Ada, et cela a créé un lien.

J'aime aussi les Japonais : Ishiguro, Murakami. . .

J'ai lu Proust lors de ma première visite au Japon pour la conférence Tokyo–Nikko en 1955. Je suis resté là-bas pendant presque un mois, dans un environnement où les seules langues parlées étaient le japonais et l'anglais. J'avais apporté un volume de l'édition de la Pléiade, et le soir, pour me détendre, je lisais des passages.

J'aime le troisième volume, *Le Temps retrouvé*. J'aime moins les deux premiers. “Longtemps, je me suis couché de bonne heure.” Il est splendide de commencer un livre de mille pages par une phrase aussi courte.

Bourbaki se moquait parfois de moi parce que j'avais tendance à commencer un texte par la courte phrase : “Soit n un entier positif.”

De Thomas Mann, j'aime Joseph et ses frères et *Der Erwählte*. Il y a aussi Lotte à Weimar, qui m'amuse parce qu'il y a un chapitre dans lequel Thomas Mann se met dans l'esprit de Goethe, à moitié endormi. C'est une chose audacieuse à faire pour un écrivain allemand, aussi scandaleuse que si je vous racontais une histoire en disant : “Je vais me mettre dans l'esprit de Weil.”

Parmi les livres plus récents, *Le bâtard de Nazareth* d'Arditi.

(2) *Films* (“le septième art”). J'aime particulièrement ceux du Studio Ghibli (*Le Château ambulant*, *Kiki la petite sorcière*. . .), des frères Coen (*O Brother, Where Art Thou?*, *Fargo*, *No Country for Old Men*), de Tarantino (*Pulp Fiction*, *Django Unchained*), de Woody Allen (*Mighty Aphrodite*), d'Altman (*McCabe Mrs. Miller*), de Pabst (*Die Dreigroschenoper*), d'Hitchcock (*Mais qui a tué Harry?*) . . .

(3) *Sports*. Mes préférés étaient le tennis de table et l'escalade. J'ai arrêté le premier vers 70 ans ; j'ai continué l'escalade (rochers de Fontainebleau, et aussi la falaise d'entraînement de Chamonix “*Les Gaillands*”) jusqu'à environ 95 ans ; j'ai dû arrêter parce que les muscles avaient tout simplement disparu. Mais j'aime toujours aller à Fontainebleau avec des amis ou en famille, et revoir les rochers que je grimpais autrefois.

Javier Fresán est professeur de mathématiques à Sorbonne Université. Ses domaines de recherche sont la théorie des nombres et la géométrie algébrique, avec un accent sur les périodes, les motifs, les sommes exponentielles et l'arithmétique des séries entières holomorphes.