Sur la preuve et le progrès en mathématiques

William P. Thurston

26 octobre 1993

Cet essai sur la nature de la preuve et du progrès en mathématiques a été inspiré par l'article de Jaffe et Quinn, "Theoretical Mathematics : Toward a cultural synthesis of mathematics and theoretical physics" ("Mathématiques théoriques : vers une synthèse culturelle des mathématiques et de la physique théorique"). Leur article soulève des questions intéressantes auxquelles les mathématiciens devraient accorder plus d'attention, mais il perpétue également certaines croyances et attitudes largement répandues qui doivent être remises en question et examinées.

L'article contenait un paragraphe décrivant une partie de mon travail d'une manière qui diffère de mon expérience, et qui diffère également des observations des personnes du secteur avec lesquelles j'en ai discuté pour vérifier la réalité.

Après réflexion, il m'a semblé que les écrits de Jaffe et Quinn illustraient le phénomène selon lequel on voit ce que l'on est enclin à voir. Leur interprétation de mon travail résultait d'une projection de la sociologie des mathématiques sur une échelle unidimensionnelle (spéculation contre rigueur) qui ignore de nombreux phénomènes fondamentaux.

Des réactions à l'article de Jaffe et Quinn ont été sollicitées auprès de plusieurs mathématiciens, et je m'attends à ce qu'il suscite de nombreuses analyses et critiques spécifiques. C'est pourquoi, dans cet essai, je privilégierai les aspects positifs plutôt que les aspects négatifs. Je décrirai ma conception du processus mathématique, en ne faisant référence qu'occasionnellement à Jaffe et Quinn à titre de comparaison.

Pour tenter de déconstruire les présupposés, il est important de commencer par les bonnes questions :

1. Qu'accomplissent les mathématiciens ?

Cette question recèle de nombreux problèmes que j'ai essayé de formuler de manière à ne pas présupposer la nature de la réponse.

Il ne serait pas judicieux de commencer, par exemple, par la question

> Comment les mathématiciens démontrent-ils les théorèmes ?

Cette question soulève un sujet intéressant, mais commencer par là reviendrait à projeter deux hypothèses implicites :

1. qu'il existe une théorie et une pratique mathématiques uniformes, objectives et solidement établies de la preuve, et

Référence : Bulletin de la société américaine de mathématiques, Volume 30, Numéro 2, Avril 1994, pages 161-177.
Article arxiv : https://arxiv.org/pdf/math/9404236.
Traduction aidée des outils google : Denise Vella-Chemla, janvier 2026.

2. que les progrès réalisés par les mathématiciens consistent à démontrer des théorèmes.

Il est judicieux d'examiner ces hypothèses plutôt que de les accepter comme évidentes et de partir de là.

La question n'est même pas

> Comment les mathématiciens progressent-ils en mathématiques ?

En fait, pour formuler la question de manière plus explicite (et orientée), je préfère :

> Comment les mathématiciens font-ils progresser la compréhension humaine des mathématiques ?

Cette question met en lumière un point fondamental et omniprésent qui est que ce que nous faisons, c'est trouver des moyens pour que les gens comprennent et réfléchissent aux mathématiques.

Le développement rapide de l'informatique a contribué à mettre en évidence ce point, car les ordinateurs et les êtres humains sont très différents. Par exemple, lorsque Appel et Haken ont achevé une démonstration du théorème du coloriage d'une carte par 4 couleurs à l'aide d'un calcul massif automatique, cela a suscité une vive controverse. J'interprète cette controverse comme ayant peu à voir avec les doutes que l'on pouvait avoir quant à la véracité du théorème ou à la validité de la démonstration. Elle reflétait plutôt un désir persistant de compréhension humaine de la démonstration, au-delà de la simple connaissance de la vérité du théorème.

Au niveau plus quotidien, il est courant que les personnes qui commencent à utiliser des ordinateurs effectuent des calculs à grande échelle pour des choses qu'elles auraient pu faire manuellement à plus petite échelle. Ces personnes pourraient imprimer un tableau des 10 000 premiers nombres premiers, pour finalement se rendre compte que ce résultat ne correspond pas à leurs attentes. Ce genre d'expérience leur fait réaliser que ce qu'elles désirent vraiment, ce n'est généralement pas un ensemble de réponses, mais plutôt comprendre les phénomènes.

Il peut sembler presque circulaire d'affirmer que les mathématiciens font progresser la compréhension humaine des mathématiques. Je ne tenterai pas de résoudre ce problème en discutant de ce que sont les mathématiques, car cela nous mènerait très loin. Les mathématiciens ont généralement le sentiment de savoir ce que sont les mathématiques, mais peinent à en donner une définition directe et satisfaisante. Il est intéressant d'essayer. Pour moi, la théorie des motifs formels est ce qui s'en rapproche le plus, mais l'aborder en détail nécessiterait un essai entier.

La difficulté qu'on a à donner une bonne définition directe des mathématiques pourrait-elle être essentielle, indiquant que les mathématiques ont une qualité récursive essentielle ? Dans cette optique, on pourrait dire que les mathématiques sont le plus petit sujet satisfaisant ce qui suit :

- Les mathématiques comprennent les nombres naturels et la géométrie plane et solide.
- Les mathématiques sont ce que les mathématiciens étudient.

- Les mathématiciens sont les êtres humains qui font progresser la compréhension humaine des mathématiques.

Autrement dit, à mesure que les mathématiques progressent, nous les intégrons à notre façon de penser. À mesure que notre pensée se sophistique, nous générons de nouveaux concepts et de nouvelles structures mathématiques : l'objet des mathématiques évolue pour refléter notre façon de penser.

Si notre démarche consiste à construire de meilleures façons de penser, alors les dimensions psychologiques et sociales sont essentielles à un bon modèle de progrès mathématique. Ces dimensions sont absentes du modèle dominant. En résumé, le modèle dominant soutient que...

D. Les mathématiciens partent de quelques structures mathématiques de base et d'un ensemble d'axiomes donné à propos de ces structures, que

T. Il existe diverses questions importantes auxquelles il faut répondre concernant ces structures qui peuvent être énoncées sous forme de propositions mathématiques formelles, et

P. La tâche du mathématicien est de rechercher un cheminement déductif des axiomes à l'assertion de propositions ou à leur démenti.

On pourrait appeler cela le modèle définition-théorème-preuve (DTP) des mathématiques.

Une difficulté majeure du modèle DTP réside dans son incapacité à expliquer l'origine des questions. Jaffe et Quinn évoquent la spéculation (qu'ils qualifient, à tort, de “mathématiques théoriques”) comme un élément supplémentaire important. La spéculation consiste à formuler des conjectures, à soulever des questions et à élaborer des hypothèses et des raisonnements heuristiques pertinents sur ce qui est probablement vrai.

Le modèle DTP de Jaffe et Quinn ne parvient toujours pas à résoudre certains problèmes fondamentaux. Nous ne cherchons pas à atteindre un quota de production de définitions abstraites, de théorèmes et de démonstrations. Notre succès se mesure à notre capacité à permettre aux gens de comprendre et de penser plus clairement et plus efficacement aux mathématiques.

Nous devons donc nous poser la question suivante :

2. Comment les gens comprennent-ils les mathématiques ?

C'est une question très difficile. La compréhension est une affaire individuelle et intérieure, difficile à appréhender pleinement, à comprendre et souvent à communiquer. Nous ne pouvons ici qu'effleurer le sujet.

Les individus ont des manières très différentes d'appréhender certains concepts mathématiques. Pour illustrer cela, prenons un exemple que les mathématiciens praticiens comprennent de multiples façons, mais qui pose souvent problème à nos élèves : la dérivée d'une fonction. On peut la concevoir comme :

1. Infinitésimale : le rapport de la variation infinitésimale de la valeur d'une fonction appliquée à une entrée à la variation infinitésimale de cette entrée.

2. Symbolique : la dérivée de x^n est nx^{n-1}, la dérivée de $\sin x$ est $\cos x$, la dérivée de $f \circ g$ est $f' \circ g * g'$, etc.
3. Logique : $f'(x) = d$ si et seulement si pour tout ε, il existe un δ tel que lorsque $0 < |\Delta x| < \delta$,

$$\left|\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} - d\right| < \delta.$$

4. Géométrique : la dérivée est la pente d'une droite tangente au graphique de la fonction, si le graphique possède une tangente.
5. Taux : la vitesse instantanée de $f(t)$, lorsque t est le temps.
6. Approximation : La dérivée d'une fonction est la meilleure approximation linéaire de cette fonction près d'un point.
7. Microscopique : La dérivée d'une fonction est la limite de ce que l'on obtient en l'observant sous un microscope de puissance de plus en plus élevée.

Il s'agit d'une liste de différentes manières d'envisager ou de concevoir la dérivée, plutôt que d'une liste de différentes définitions logiques. À moins de déployer des efforts considérables pour préserver le ton et la saveur des intuitions humaines originales, les différences commencent à s'estomper dès que les concepts mentaux sont traduits en définitions précises, formelles et explicites.

Je me souviens avoir assimilé chacun de ces concepts comme quelque chose de nouveau et d'intéressant, et avoir consacré beaucoup de temps et d'efforts à les comprendre et à les mettre en pratique, en les reliant aux autres. Je me souviens aussi d'être revenu plus tard à ces différents concepts, enrichis d'une compréhension plus profonde.

La liste continue ; il n'y a aucune raison qu'elle s'arrête un jour. Un exemple plus bas dans la liste peut aider à illustrer ce point. On peut croire tout savoir sur un sujet donné, mais de nouvelles perspectives sont toujours à portée de main. De plus, ce qui est clair pour l'un peut être intimidant pour l'autre :

37. La dérivée d'une fonction réelle f sur un domaine D est la section du Lagrangien du fibré cotangent $T^*(D)$ qui donne la forme de connexion pour l'unique connexion plate sur le $\mathbf{R}$-fibré trivial $D \times \mathbf{R}$ pour laquelle le graphe de f est parallèle.

Ces différences ne sont pas qu'une simple curiosité. La pensée et la compréhension humaines ne fonctionnent pas de manière linéaire, comme un ordinateur doté d'une seule unité centrale de traitement. Notre cerveau et notre esprit semblent organisés en une multitude de structures distinctes et puissantes Ces structures collaborent de manière souple, "communiquant" entre elles à des niveaux élevés plutôt qu'à des niveaux d'organisation inférieurs. Voici quelques grandes divisions importantes pour la pensée mathématique :

1. Le langage humain. Nous possédons des capacités spécialisées et performantes pour parler et comprendre le langage humain, qui sont également liées à la lecture et à l'écriture. Notre aptitude linguistique est un outil essentiel pour penser, et pas seulement pour communiquer. Un exemple simple est la formule du second degré, que l'on retient peut-être comme une petite comptine : "x est égal à moins b plus ou moins racine carrée de b carré moins $4ac$ tout ça sur $2a$". Le langage mathématique des symboles est très lié à notre capacité langagière humaine L'ensemble des symboles mathématiques dont disposent la plupart des étudiants en calcul

différentiel et intégral ne comporte qu'un seul verbe, "=". C'est pourquoi les étudiants l'utilisent lorsqu'ils ont besoin d'un verbe. Presque tous ceux qui ont enseigné le calcul différentiel et intégral aux États-Unis ont vu des étudiants écrire instinctivement $x^3 = 3x^2$.

2. La vision, au sens spatial ou au sens kinesthésique (du mouvement). Les êtres humains possèdent des capacités très développées pour recevoir des informations visuellement ou kinesthésiquement, et pour penser grâce à leur sens spatial. En revanche, ils ne possèdent pas une grande aptitude innée à la vision inverse, c'est-à-dire à transformer une compréhension spatiale interne en une image bidimensionnelle. Par conséquent, les mathématiciens ont généralement moins de figures, et de moindre qualité, dans leurs articles et leurs livres que dans leurs mémoires.
   Un phénomène intéressant dans la pensée spatiale est l'importance de l'échelle. On peut penser à de petits objets que l'on tient dans ses mains, à des structures plus grandes, à taille humaine, que l'on scrute du regard, ou encore à des structures spatiales qui nous entourent et dans lesquelles on se déplace. Nous avons tendance à penser plus efficacement avec des images spatiales à plus grande échelle : c'est comme si notre cerveau prenait les choses plus grandes plus au sérieux et pouvait leur consacrer plus de ressources.

3. Logique et déduction. Nous possédons des modes de raisonnement et d'association innés qui nous permettent d'effectuer des déductions logiques : cause et effet (liés à l'implication), contradiction ou négation, etc.
   Il semble que les mathématiciens ne s'appuient généralement pas sur les règles formelles de la déduction lorsqu'ils raisonnent. Ils conservent plutôt en mémoire une bonne partie de la structure logique d'une démonstration, la décomposant en résultats intermédiaires afin de ne pas avoir à gérer une trop grande quantité de logique simultanément. En fait, il est fréquent que d'excellents mathématiciens ignorent même l'usage formel standard des quantificateurs (pour tout et il existe). et pourtant, tous les mathématiciens effectuent assurément le raisonnement qu'ils impliquent.
   Il est intéressant de constater que, bien que "ou", "et" et "implique" aient un usage formel identique, nous considérons "ou" et "et" comme des conjonctions et "implique" comme un verbe.

4. Intuition, association, métaphore. Les êtres humains possèdent une capacité étonnante à percevoir quelque chose sans savoir d'où cela vient (intuition) ; à sentir qu'un phénomène, une situation ou un objet ressemble à autre chose (association) ; et à construire et tester des liens et des comparaisons, en gardant deux choses à l'esprit simultanément (métaphore). Ces compétences sont très importantes pour les mathématiques. Personnellement, je m'efforce d' écouter mes intuitions et mes associations d'idées, et de les transformer en métaphores et en liens. Cela implique une sorte de calme et de concentration simultanés de mon esprit. Les mots, la logique et les images détaillées qui s'entrechoquent peuvent inhiber les intuitions et les associations d'idées.

5. Réponse au stimulus. Ce principe est souvent mis en avant dans les écoles par exemple, si vous voyez 3927×253, Vous écrivez un nombre au-dessus de l'autre et tracez une ligne en dessous, etc. Ceci est également important pour les mathématiques de recherche en voyant le diagramme d'un nœud, je pourrais rédiger une présentation du groupe fondamental de son complément par une procédure dont le principe est similaire à celui de l'algorithme de multiplication.

6. Processus et temps. Nous avons une facilité à penser en termes de processus ou de séquences d'actions, ce qui peut souvent s'avérer très utile dans le raisonnement mathématique. On peut concevoir une fonction comme une action, un processus, qui fait passer du domaine à son image.
   Ceci est particulièrement précieux lors de la composition de fonctions. Cette fonctionnalité s'avère également utile pour se souvenir des démonstrations : on retient souvent une démonstration comme un processus en plusieurs étapes. En topologie, la notion d'homotopie est généralement perçue comme un processus qui prend du temps.
   Mathématiquement, le temps n'est pas différent d'une dimension spatiale supplémentaire, mais comme les humains interagissent avec lui d'une manière tout à fait différente, il est psychologiquement très différent.

3. Comment la compréhension mathématique est-elle communiquée ?

La transmission de la compréhension d'une personne à une autre ne se fait pas automatiquement. C'est un processus difficile et complexe. Par conséquent, pour analyser la compréhension humaine des mathématiques, il est important de considérer qui comprend quoi et quand.

Les mathématiciens ont développé des habitudes de communication souvent inefficaces. Partout, les organisateurs de colloques exhortent les intervenants à expliquer les choses en termes élémentaires. Pourtant, la plupart des participants à un colloque moyen n'en retirent que peu d'intérêt. Peut-être se perdent-ils dès les cinq premières minutes, et pourtant restent-ils assis en silence pendant les 55 minutes restantes. Ou peut-être se désintéressent-ils rapidement parce que l'orateur se lance dans des détails techniques sans donner aucune raison de les approfondir. À la fin de l'exposé, les quelques mathématiciens proches du domaine de l'orateur posent une ou deux questions pour éviter tout embarras.

Ce schéma est similaire à ce qui se produit souvent dans les salles de classe, où nous nous contentons de réciter machinalement ce que nous pensons que les élèves "devraient" apprendre, tandis que ces derniers tentent de se confronter aux questions plus fondamentales de l'apprentissage de notre langue et de deviner nos modèles mentaux. Les livres compensent ce manque en fournissant des exemples de résolution pour chaque type de problème de devoirs. Les professeurs compensent en donnant des devoirs et des examens beaucoup plus faciles que la matière traitée du cours, puis en les notant selon une échelle qui exige peu de compétences de compréhension. Nous supposons que le problème vient des étudiants plutôt que de la communication : que les étudiants n'ont tout simplement pas les capacités requises, ou qu'ils s'en fichent tout simplement.

Ce phénomène étonne les observateurs extérieurs, mais au sein de la communauté mathématique, on le balaie d'un revers de main.

Une grande partie de la difficulté tient au langage et à la culture des mathématiques qui sont divisées en sous-domaines. Les concepts de base utilisés quotidiennement dans un sous-domaine sont souvent étrangers à un autre. Les mathématiciens renoncent à essayer de comprendre les concepts de base, même ceux des sous-domaines voisins, à moins d'y avoir été initiés durant leurs études supérieures.

En revanche, la communication est très efficace au sein des sous-domaines des mathématiques. Dans un même sous-domaine, les chercheurs développent un corpus de connaissances et de techniques communes. Grâce à des échanges informels, ils apprennent à comprendre et à s'inspirer mutuellement de leurs raisonnements, ce qui permet d'expliquer les idées clairement et aisément.

Les connaissances mathématiques peuvent se transmettre à une vitesse étonnante au sein d'un sous-domaine. Lorsqu'un théorème important est démontré, il arrive souvent (mais pas toujours) que la solution puisse être communiquée en quelques minutes d'une personne à l'autre au sein de ce sous-domaine. La même démonstration pourrait être communiquée et généralement comprise en une heure de discussion aux membres du sous-domaine. Elle pourrait faire l'objet d'un article de 15 à 20 pages, qui pourrait être lu et compris en quelques heures, voire quelques jours, par les membres du sous-domaine.

Pourquoi observe-t-on une telle expansion entre la discussion informelle, l'exposé et la publication d'un article ? En tête-à-tête, les gens utilisent de larges canaux de communication qui dépassent largement le cadre du langage mathématique formel. Ils utilisent des gestes, ils dessinent des images et des schémas, ils produisent des effets sonores et utilisent le langage corporel. La communication est plus susceptible d'être bidirectionnelle, permettant ainsi aux individus de se concentrer sur ce qui requiert le plus d'attention. Grâce à ces canaux de communication, ils sont bien mieux placés pour transmettre la situation, non seulement grâce à leurs capacités logiques et linguistiques, mais aussi grâce à leurs autres facultés mentales.

Lors des discussions, les gens sont plus inhibés et plus formels. Le public des mathématiciens a souvent du mal à poser les questions que la plupart des gens se posent, et les orateurs ont souvent un plan préétabli irréaliste qui les empêche de répondre aux questions, même lorsqu'on leur en pose.

Dans les articles, le langage reste plus formel. Les auteurs traduisent leurs idées en symboles et en logique, et les lecteurs tentent de les retraduire.

Pourquoi existe-t-il un tel décalage entre la communication au sein d'un sous-domaine et la communication générale ? en dehors des sous-domaines, sans parler de la communication en dehors des mathématiques ?

Les mathématiques possèdent en quelque sorte un langage commun : un langage de symboles, de définitions techniques, de calculs et de logique. Ce langage permet de transmettre efficacement certains modes de pensée mathématique, mais pas tous. Les mathématiciens apprennent à traduire presque inconsciemment certaines choses d'un mode mental à l'autre, de sorte que certaines affirmations deviennent rapidement claires. Chaque mathématicien aborde les articles scientifiques différemment, mais lorsque je lis un article dans un domaine que je maîtrise, je me concentre sur les idées sous-jacentes. Il m'arrive de parcourir plusieurs paragraphes ou suites d'équations et de me dire : Ah oui, ils utilisent beaucoup de formalisme pour étayer telle ou telle idée." Quand l'idée est claire, la formalisation est généralement superflue et inutile : j'ai souvent l'impression que je pourrais la formuler moi-même plus facilement que de déchiffrer ce que les auteurs ont réellement écrit. C'est comme acheter un grille-pain neuf avec un manuel de seize pages. Si vous savez déjà comment fonctionnent les grille-pain et si celui-ci ressemble à ceux que vous avez déjà utilisés, vous le brancherez peut-être directement pour voir s'il marche, plutôt que de lire d'abord tous les détails du manuel.

Les personnes familières avec les méthodes de travail d'un sous-domaine reconnaissent divers schémas d'énoncés ou de formules comme des expressions idiomatiques ou des circonlocutions pour désigner certains concepts ou images mentales. Mais pour ceux qui ne sont pas encore familiarisés avec le sujet, ces mêmes schémas ne sont guère éclairants ; ils sont même souvent trompeurs. La langue n'est vivante que pour ceux qui l'utilisent.

Je voudrais faire une remarque importante ici : certains mathématiciens maîtrisent les modes de pensée de plusieurs sous-domaines, parfois même d'un grand nombre d'entre eux. Certains mathématiciens apprennent le jargon de plusieurs sous-domaines durant leurs études supérieures, d'autres assimilent rapidement le langage et la culture mathématiques qui leur sont étrangers, et d'autres encore travaillent dans des centres de recherche en mathématiques où ils sont exposés à de nombreux sous-domaines. Ceux qui maîtrisent plusieurs sous-domaines peuvent souvent exercer une influence très positive, en servant de ponts et en aidant différents groupes de mathématiciens à apprendre les uns des autres. Cependant, les personnes possédant des connaissances dans de nombreux domaines peuvent aussi avoir un effet négatif, en intimidant les autres et en contribuant à valider et à maintenir un système de communication généralement déficient. Par exemple, ce phénomène se produit souvent lors de colloques, où une ou deux personnes très érudites, assises au premier rang, peuvent servir de guide de la pensée de l'orateur pour l'auditoire.

Un autre effet découle des grandes différences entre notre façon de penser les mathématiques et la façon dont nous les écrivons. Un groupe de mathématiciens qui interagissent peut maintenir vivante une collection d'idées mathématiques pendant des années, même si la version écrite de leurs travaux diffère de leur pensée réelle, privilégiant davantage le langage, les symboles, la logique et le formalisme.

Mais à mesure que de nouvelles générations de mathématiciens découvrent le sujet, ils ont tendance à interpréter ce qu'ils lisent et entendent plus littéralement, de sorte que le formalisme et les mécanismes plus faciles à consigner et à communiquer tendent à progressivement supplanter les autres modes de pensée.

Deux contrepoids à cette tendance empêchent les mathématiques de s'enliser entièrement dans le formalisme. Premièrement, les jeunes générations de mathématiciens découvrent et redécouvrent sans cesse de nouvelles intuitions, réintroduisant ainsi diverses formes de pensée humaine dans les mathématiques.

Deuxièmement, les mathématiciens inventent parfois des noms et trouvent des définitions unificatrices qui remplacent les circonlocutions techniques et offrent de bonnes clés pour appréhender les concepts.

Des termes comme “groupe” pour remplacer "un système de substitutions satisfaisant...",

et "variété" pour remplacer...

> "Nous ne pouvons pas donner de coordonnées pour paramétrer simultanément toutes les solutions de nos équations, mais au voisinage de toute solution particulière, nous pouvons introduire des coordonnées $(f_1(u_1, u_2, u_3), f_2(u_1, u_2, u_3), f_3(u_1, u_2, u_3), f_4(u_1, u_2, u_3), f_5(u_1, u_2, u_3))$ où au moins un des dix déterminants... [et là, dix déterminants 3×3 de matrices de dérivées partielles]... est non nul."

peuvent ou peuvent ne pas avoir représenté des avancées dans la compréhension des experts, mais elles facilitent grandement la communication de ces connaissances.

Nous, les mathématiciens, devons déployer des efforts bien plus importants pour communiquer les idées mathématiques. Pour ce faire, nous devons accorder une bien plus grande importance à la communication, non seulement de nos définitions, théorèmes et démonstrations, mais aussi de nos raisonnements. Nous devons reconnaître la valeur des différentes manières d'appréhender une même structure mathématique.

Il nous faut consacrer davantage d'énergie à la compréhension et à l'explication des fondements mentaux des mathématiques, et par conséquent moins d'énergie aux résultats les plus récents. Cela implique de développer un langage mathématique efficace pour transmettre des concepts à ceux qui ne les maîtrisent pas encore.

Une partie de cette communication se fait par le biais des preuves.

4. Qu'est-ce qu'une preuve ?

Lorsque j'ai commencé mes études supérieures à Berkeley, j'avais du mal à imaginer comment je pourrais prouver un théorème mathématique nouveau et intéressant. Je ne comprenais pas vraiment ce qu'était une "preuve".

En assistant à des séminaires, en lisant des articles et en discutant avec d'autres doctorants, j'ai progressivement compris. Dans chaque domaine, certains théorèmes et certaines techniques sont généralement connus et acceptés. Lorsqu'on rédige un article, on s'y réfère sans démonstration. On consulte d'autres articles du domaine et on observe quels faits ils citent sans démonstration, ainsi que les références de leur bibliographie. On s'inspire ainsi des autres pour appréhender les démonstrations. Vous pouvez alors citer le même théorème et les mêmes références. Il n'est pas nécessaire de lire l'intégralité des articles ou des ouvrages figurant dans votre bibliographie. Nombre de notions communément admises ne sont en réalité étayées par aucune source écrite connue. Dès lors que les spécialistes du domaine sont convaincus de la validité d'une idée, il n'est pas nécessaire qu'elle soit formalisée par écrit.

Au début, j'étais très sceptique quant à cette méthode. Je doutais de la véracité d'une idée. Mais j'ai constaté que je pouvais interroger des personnes, et qu'elles pouvaient me fournir des explications et des preuves, ou bien me renvoyer vers d'autres personnes ou des sources écrites qui contenaient ces explications et preuves. Il existait des théorèmes publiés dont on savait généralement qu'ils étaient faux, ou dont les démonstrations étaient généralement reconnues comme incomplètes. Les connaissances et la compréhension mathématiques étaient ancrées dans les esprits et dans le tissu social de la communauté de personnes qui réfléchissaient à un sujet particulier. Ces connaissances étaient étayées par des documents écrits, mais ces documents n'étaient pas vraiment élémentaires.

Je pense que ce schéma varie considérablement d'un domaine à l'autre. Je m'intéressais aux branches géométriques des mathématiques, où il est souvent difficile de disposer d'un document reflétant fidèlement la pensée réelle. Dans les domaines plus algébriques ou symboliques, ce n'est pas nécessairement le cas, et j'ai l'impression que, dans certains domaines, les documents sont bien plus représentatifs de la vie du domaine. Mais dans tout domaine, il existe une forte norme sociale de validité et de vérité. La démonstration du denier théorème de Fermat par Andrew Wiles en est une bonne illustration, dans un domaine très algébrique. Les experts ont rapidement admis que sa démonstration était fondamentalement correcte sur la base d'idées générales, bien avant que les détails puissent être vérifiés. Cette démonstration fera l'objet d'un examen et d'une vérification beaucoup plus poussés que la plupart des démonstrations mathématiques ; mais quel que soit le déroulement du processus de vérification, il contribue à illustrer comment les mathématiques évoluent par des processus psychologiques et sociaux plutôt organiques.

En mathématiques, le flux d'idées et le jugement social sont bien plus fiables que les documents formels. On a généralement du mal à vérifier la rigueur formelle des démonstrations, mais on est très doué pour déceler leurs faiblesses ou leurs erreurs potentielles.

Pour éviter tout malentendu, je tiens à souligner deux choses que je ne dis pas. Premièrement, je ne suis pas partisan de tout affaiblissement de nos normes de preuve au sein de la communauté mathématique, je m'efforce de décrire le fonctionnement réel du processus. Des démonstrations rigoureuses, capables de résister à l'examen critique, sont essentielles. Je pense que, dans l'ensemble, le processus de démonstration fonctionne assez bien au sein de la communauté mathématique. Le changement que je préconiserais serait que les mathématiciens accordent plus d'importance à la rigueur de leurs démonstrations, en les rendant aussi claires et simples que possible afin que toute faiblesse soit facilement repérable. Par ailleurs, je ne critique ni l'étude mathématique des démonstrations formelles, ni ceux qui s'efforcent de rendre les raisonnements mathématiques plus explicites et plus formels. Ce sont là deux activités utiles qui apportent de nouvelles perspectives aux mathématiques.

J'ai consacré une part importante de ma carrière à explorer des questions mathématiques par ordinateur. Compte tenu de cette expérience, j'ai été surpris de lire *l'affirmation de Jaffe et Quinn selon laquelle les mathématiques sont extrêmement lentes et ardues, et qu'elles sont sans doute l'activité humaine la plus rigoureuse. Le niveau d'exactitude et d'exhaustivité requis pour qu'un programme informatique fonctionne est bien supérieur au niveau d'exigence des démonstrations valides au sein de la communauté mathématique. Néanmoins, les grands programmes informatiques, même lorsqu'ils ont été écrits et testés avec le plus grand soin, semblent toujours comporter des erreurs.* [1]

1. Note de la traductrice : Je me suis permis de mettre ces mots en italique car Thurston parle vrai et met ici le doigt sur le nœud de l'incompréhsion (voire du mépris) des mathématiciens de l'informatique comme science, plutôt

Je pense que les mathématiques comptent parmi les activités humaines les plus enrichissantes intellectuellement. Parce que nous exigeons une pensée claire et convaincante et que nous accordons une grande importance à l'écoute et à la compréhension mutuelle, nous n'entamons pas de débats interminables ni de refontes mathématiques sans fin. Nous sommes ouverts à la discussion et prêts à être convaincus par autrui. Intellectuellement, les mathématiques évoluent très rapidement. Des pans entiers du paysage mathématique se transforment et se métamorphosent de façon étonnante au cours d'une seule carrière.

Quand on considère la difficulté d'écrire un programme informatique qui approche même la portée intellectuelle d'un bon article mathématique, et le temps et les efforts considérables qu'il faut y consacrer pour le rendre presque formellement correct, il est absurde d'affirmer que les mathématiques telles que nous les pratiquons sont proches de la correction formelle.

Les mathématiques, telles que nous les pratiquons, sont beaucoup plus complètes et précises formellement que les autres sciences, mais elles sont beaucoup moins complètes et précises formellement quant à leur contenu que les programmes informatiques. La différence ne tient pas seulement à la quantité d'efforts : la nature de ces efforts est qualitativement différente. Dans les grands programmes informatiques, une part considérable des efforts doit être consacrée à une myriade de problèmes de compatibilité : s'assurer que toutes les définitions sont cohérentes, développer des structures de données "efficaces" qui présentent une généralité utile mais non encombrante, décider de la généralité "appropriée" des fonctions, etc. La proportion d'énergie consacrée à la partie opérationnelle d'un grand programme, par opposition à la partie administrative, est étonnamment faible. En raison des problèmes de compatibilité qui dégénèrent presque inévitablement parce que les définitions "correctes" changent à mesure que l'on ajoute de la généralité et des fonctionnalités, les programmes informatiques doivent généralement être réécrits fréquemment, souvent à partir de zéro.

Un effort très similaire devrait être déployé en mathématiques pour les rendre formellement correctes et complètes. Ce n'est pas tant la correction formelle qui est prohibitivement difficile à petite échelle, mais plutôt la multitude de formalisations possibles à petite échelle qui se traduisent par un nombre considérable de choix interdépendants à grande échelle. Rendre ces choix compatibles est extrêmement complexe ; cela impliquerait certainement de réécrire intégralement tous les articles mathématiques anciens dont nous dépendons de résultats sûrs. Il est également très difficile de trouver des définitions formelles de qualité, valables dans les divers contextes d'utilisation par les mathématiciens et qui anticipent les développements futurs des mathématiques. Si nous poursuivions notre coopération, nous consacrerions une grande partie de notre temps aux commissions internationales de normalisation afin d'établir des définitions uniformes et de résoudre d'importantes controverses.

Les mathématiciens peuvent combler les lacunes, corriger les erreurs et fournir des détails supplémentaires et une analyse plus approfondie lorsqu'ils y sont invités ou incités. Notre système est particulièrement performant pour produire des théorèmes fiables et solidement étayés. Simplement, la fiabilité ne provient pas principalement de la vérification formelle des arguments formels par les

que comme technologie.

mathématiciens ; elle provient de la réflexion attentive et critique des mathématiciens sur les idées mathématiques.

Au niveau le plus fondamental, les fondements des mathématiques sont beaucoup plus fragiles que les mathématiques que nous pratiquons. La plupart des mathématiciens adhèrent à des principes fondamentaux qui relèvent de la fiction polie. Par exemple, il est admis qu'il est impossible de construire ou même de définir un ordre cohérent des nombres réels. Il existe de nombreux indices (mais aucune preuve formelle) suggérant que nous pouvons nous permettre ces fictions polies sans être démasqués, mais cela ne les rend pas pour autant justes. Les théoriciens des ensembles construisent de nombreux "univers mathématiques" alternatifs et mutuellement contradictoires, de sorte que si l'un est cohérent, les autres le sont aussi. Dès lors, il est très difficile d'affirmer avec certitude que l'un ou l'autre soit le bon choix ou le choix naturel. Le théorème d'incomplétude de Gödel implique qu'il ne peut exister de système formel à la fois cohérent et suffisamment puissant pour servir de base à toutes les mathématiques que nous pratiquons.

Contrairement aux humains, les ordinateurs excellent dans l'exécution de processus formels. Des personnes travaillent activement à un projet visant à formaliser informatiquement certaines parties des mathématiques, avec des déductions formelles rigoureusement correctes. Je pense qu'il s'agit d'un projet ambitieux mais très enrichissant, et je suis convaincu que nous en tirerons de nombreux enseignements. Ce processus contribuera à simplifier et à clarifier certains concepts. En mathématiques, d'ici quelques années, je pense que nous disposerons de programmes informatiques interactifs capables d'aider à compiler des pans importants de mathématiques formellement complètes et correctes (basées sur quelques hypothèses peut-être fragiles, mais au moins explicites), et qu'ils deviendront partie intégrante de l'environnement de travail standard du mathématicien.

Il convient toutefois de reconnaître que ce sont les démonstrations compréhensibles et vérifiables par l'humain que nous produisons réellement qui importent le plus, et qu'elles diffèrent sensiblement des démonstrations formelles. À l'heure actuelle, les démonstrations formelles sont hors de portée et, pour la plupart, superflues : nous disposons de méthodes humaines efficaces pour vérifier la validité mathématique.

5. Qu'est-ce qui motive les gens à faire des mathématiques ?

Il y a une véritable joie à faire des mathématiques, à apprendre des modes de pensée qui expliquent, organisent et simplifient. On peut ressentir cette joie en découvrant de nouvelles mathématiques, en en redécouvrant d'anciennes, en apprenant une façon de penser auprès d'une personne ou d'un texte, ou en trouvant une nouvelle façon d'expliquer ou d'envisager une structure mathématique connue.

Cette motivation intrinsèque pourrait nous laisser croire que nous faisons des mathématiques uniquement pour elles-mêmes. Or, c'est faux : le contexte social est primordial. Nous sommes inspirés par les autres, nous recherchons leur reconnaissance et nous aimons les aider à résoudre leurs problèmes mathématiques. Nos goûts évoluent en fonction des autres. L'interaction sociale se manifeste par des rencontres en face à face, mais aussi par des échanges écrits et électroniques, des prépublications et des articles de revues scientifiques. L'un des effets de ce système mathématique très social est la tendance des mathématiciens à suivre les modes. Pour produire de nouveaux théorèmes mathématiques, cela n'est probablement pas très efficace : il serait sans doute préférable que les mathématiciens couvrent le champ intellectuel de manière beaucoup plus équilibrée. Mais la plupart des mathématiciens n'aiment pas la solitude et ont du mal à rester enthousiastes à propos d'un sujet, même s'ils font personnellement des progrès, à moins d'avoir des collègues qui partagent leur enthousiasme.

Outre notre motivation intrinsèque et notre motivation sociale informelle à faire des mathématiques, nous sommes également motivés par des considérations économiques et de statut. Les mathématiciens, comme les autres universitaires, sont souvent amenés à juger et à être jugés. En commençant par les notes, et en poursuivant avec les lettres de recommandation, les décisions d'embauche, les décisions de promotion, les rapports des référents, les invitations à prendre la parole, les prix... nous sommes impliqués dans de nombreux systèmes d'évaluation, au sein d'un système extrêmement compétitif.

Jaffe et Quinn analysent la motivation à faire des mathématiques en termes d'une monnaie commune à laquelle croient de nombreux mathématiciens : la reconnaissance des théorèmes.

Je pense que notre forte emphase collective sur les crédits théoriques a un effet négatif sur le progrès mathématique. Si notre objectif est de faire progresser la compréhension humaine des mathématiques, nous aurions tout intérêt à reconnaître et à valoriser un éventail d'activités bien plus large. Ceux qui découvrent comment démontrer des théorèmes le font au sein d'une communauté mathématique ; ils n'agissent pas seuls. Ils s'appuient sur une compréhension des mathématiques qu'ils acquièrent auprès d'autres mathématiciens. Une fois un théorème démontré, la communauté mathématique compte sur le réseau social pour diffuser les idées auprès de ceux qui pourraient les exploiter davantage ; le support imprimé est bien trop obscur et lourd.

Même si l'on adopte le point de vue restrictif selon lequel nous produisons des théorèmes, l'équipe reste importante. Le football peut servir de métaphore. Il peut n'y avoir qu'un ou deux buts lors d'un match de football, marqués par une ou deux personnes. Cela ne signifie pas pour autant que les efforts de tous les autres sont vains. On ne juge pas les joueurs d'une équipe de football uniquement sur leur capacité à marquer des buts individuellement ; on juge l'équipe sur son fonctionnement en tant qu'équipe.

En mathématiques, il arrive souvent qu'un groupe de mathématiciens progresse grâce à un ensemble d'idées. Sur le chemin de ces avancées se dessinent des théorèmes qui seront presque inévitablement démontrés par l'un ou l'autre d'entre eux. Parfois, ce groupe de mathématiciens peut même anticiper la nature de ces théorèmes. Il est beaucoup plus difficile de prédire qui démontrera effectivement le théorème, même si quelques personnes se distinguent généralement par des atouts particuliers. Cependant, leur capacité à démontrer ces théorèmes repose sur les efforts collectifs de l'équipe. L'équipe a également pour mission d'assimiler et d'utiliser les théorèmes une fois démontrés. Même si une seule personne parvenait à démontrer tous les théorèmes du parcours à elle seule, ses efforts seraient vains si personne d'autre ne les apprenait.

Il existe un phénomène intéressant concernant les personnes “pointues”. Il arrive régulièrement qu'une personne qui se trouvait au milieu d'un groupe démontre un théorème qui est largement reconnu comme étant important. Leur statut au sein de la communauté, leur position hiérarchique s'élève immédiatement et de façon spectaculaire. Dans ce cas, ils deviennent généralement beaucoup plus productifs comme centres d'idées et source de théorèmes. Pourquoi ? Premièrement, on observe une forte augmentation de l'estime de soi, et une augmentation concomitante de la productivité. Deuxièmement, lorsque leur statut s'élève, les individus se trouvent davantage au centre du réseau d'idées, les autres les prennent davantage au sérieux. Enfin, et c'est peut-être le plus important, une percée mathématique représente généralement une nouvelle façon de penser, et les façons de penser efficaces peuvent généralement être appliquées dans plus d'une situation.

Ce phénomène me convainc que l'ensemble de la communauté mathématique gagnerait en productivité si nous prenions conscience de la véritable valeur de notre travail. Jaffe et Quinn proposent un système de rôles reconnus, divisés en "spéculation" et "démonstration". Une telle division ne fait que perpétuer le mythe selon lequel nos progrès se mesurent en unités de théorèmes standards déduits. C'est un peu comme l'erreur de celui qui imprime les 10 000 premiers nombres premiers. Ce que nous produisons, c'est la compréhension humaine. Nous disposons de multiples façons de comprendre et de nombreux processus contribuent à notre compréhension. Nous serons plus satisfaits, plus productifs et plus heureux si nous prenons conscience de cela et si nous nous y intéressons.

6. Quelques expériences personnelles

Puisque cet essai est né d'une réflexion sur le décalage entre mes expériences et la description de celles de Jaffe et Quinn, j'aborderai deux expériences personnelles, dont celle à laquelle ils ont fait allusion.

Je ressens une certaine gêne à écrire cela, car j'ai des regrets concernant certains aspects de ma carrière : si je devais recommencer, fort de ma compréhension actuelle de moi-même et du processus mathématique, j'aimerais faire beaucoup de choses différemment. J'espère qu'en décrivant ces expériences avec la plus grande franchise, telles que je m'en souviens et les comprends, je pourrai aider d'autres personnes à mieux appréhender ce processus et à en tirer des enseignements à l'avance.

Je commencerai par aborder brièvement la théorie des feuilletages, qui fut mon premier sujet d'étude, dès mes études supérieures. (Il n'est pas nécessaire ici que vous sachiez ce qu'est un feuilletage).

À cette époque, les feuilletages étaient devenus un sujet d'étude majeur pour les topologues géométriques, les spécialistes des systèmes dynamiques et les géomètres différentiels. J'ai rapidement démontré quelques théorèmes remarquables. J'ai démontré un théorème de classification pour les feuilletages, donnant une condition nécessaire et suffisante pour qu'une variété admette un feuilletage. J'ai également démontré plusieurs autres théorèmes importants. J'ai rédigé des articles respectables et publié au moins les théorèmes les plus importants. Il était difficile de trouver le temps suffisant pour écrire en suivant le rythme des démonstrations que j'avais en tête, et j'ai accumulé un retard considérable.

Un phénomène intéressant s'est produit. En l'espace de deux ans environ, le domaine a commencé à se vider de façon spectaculaire. J'ai entendu dire par plusieurs mathématiciens qu'ils donnaient ou recevaient des conseils de ne pas étudier les feuilletages ; ils disaient que Thurston était en train de le vider. On m'a dit (non pas pour me plaindre, mais pour me complimenter) que je ruinais le domaine. Les étudiants de troisième cycle ont cessé d'étudier les feuilletages, et assez vite, je me suis moi aussi tourné vers d'autres centres d'intérêt.

Je ne pense pas que l'abandon ait eu lieu parce que le territoire était intellectuellement épuisé ; il y avait (et il y a encore) de nombreuses questions intéressantes qui restent et qui sont probablement abordables. Depuis lors, des développements intéressants ont été réalisés par les quelques personnes qui sont restées dans ce domaine ou qui y sont entrées, et d'importants développements ont également eu lieu dans des domaines connexes qui, je pense, auraient été beaucoup plus rapides si les mathématiciens avaient continué à poursuivre vigoureusement la théorie des feuilletages.

Aujourd'hui, je pense que peu de mathématiciens maîtrisent encore les connaissances sur les feuilletages telles qu'elles existaient à l'époque, même si certains aspects de la théorie des feuilletages, y compris les développements survenus depuis, sont toujours très actifs.

Je crois que deux facteurs écologiques ont joué un rôle bien plus important dans le ralentissement des discussions que toute forme d'épuisement des ressources intellectuelles qui a pu se produire.

Tout d'abord, les résultats que j'ai démontrés (ainsi que certains résultats importants d'autres chercheurs) ont été présentés dans un style mathématique classique et rigoureux. Ils dépendaient fortement de lecteurs possédant certaines connaissances et intuitions. La théorie des feuilletages était un sous-domaine récent et opportuniste, et les connaissances de base n'étaient pas standardisées. Je n'ai pas hésité à faire appel à toutes les notions mathématiques que j'avais apprises d'autres personnes. Les articles que j'ai écrits ne consacraient pas (elles ne le pouvaient pas) beaucoup de temps à expliquer le contexte culturel. Ils ont consigné des raisonnements et des conclusions de haut niveau auxquels j'étais souvent parvenu après beaucoup de réflexion et d'efforts. J'ai également distillé de précieuses bribes d'intuition cryptiques, telles que "l'invariant de Godbillon-Vey mesure l'oscillation hélicoïdale d'un feuilletage", qui sont restées mystérieuses pour la plupart des mathématiciens qui les ont lues. Cela a créé une barrière à l'entrée élevée, je pense que de nombreux étudiants diplômés et mathématiciens étaient découragés par la difficulté d'apprendre et de comprendre les démonstrations des théorèmes clés.

Deuxièmement, il faut se pencher sur les avantages que cela peut apporter aux autres acteurs de sous-domaine. Lorsque j'ai commencé à travailler sur les feuilletages, j'avais l'impression que les gens voulaient connaître les réponses. Je pensais qu'ils recherchaient un recueil de théorèmes puissants et démontrés, applicables à la résolution d'autres questions mathématiques. Mais ce n'est qu'une partie de l'histoire. Plus que des connaissances, les gens recherchent une compréhension personnelle. Et dans notre système basé sur les crédits, ils veulent et ont également besoin de crédits pour démontrer leurs théorèmes.

Je vais faire un bond de quelques années en avant, jusqu'au sujet auquel Jaffe et Quinn ont fait allusion, lorsque j'ai commencé à étudier les variétés tridimensionnelles et leur relation avec la géométrie hyperbolique. (Encore une fois, il importe peu que vous sachiez de quoi il s'agit). J'ai progressivement développé, au fil des années, une certaine intuition pour les variétés hyperboliques de dimension trois, avec un répertoire de constructions, d'exemples et de preuves. (Ce processus a débuté durant mes études de premier cycle et a été fortement encouragé par des applications aux feuilletages). Après un certain temps, j'ai conjecturé que toutes les variétés de dimension trois possèdent une certaine structure géométrique ; cette conjecture est finalement devenue la conjecture de géométrisation. Environ deux ou trois ans plus tard, j'ai démontré le théorème de géométrisation pour les variétés de Haken. C'était un théorème difficile, et j'y ai consacré énormément d'efforts. Une fois la démonstration achevée, j'ai consacré encore plus d'efforts à la vérifier, à rechercher les difficultés et à la confronter à des informations indépendantes.

Je voudrais préciser davantage ce que j'entends par "j'ai démontré ce théorème". Cela signifiait que j'avais un flux d'idées clair et complet, y compris les détails, qui résistait à un examen minutieux, aussi bien de ma part que de celle des autres. Les mathématiciens ont des styles de pensée très variés. Mon style ne consiste pas à formuler des généralités hâtives et imprudentes, qui ne sont que des pistes ou des inspirations : je construis des modèles mentaux clairs et je réfléchis en profondeur. Mes démonstrations se sont avérées tout à fait fiables. Je n'ai jamais eu de difficulté à étayer mes affirmations ni à fournir des détails sur ce que j'ai prouvé. Je suis capable de déceler les failles de mon propre raisonnement comme de celui des autres.

Cependant, la traduction de ma propre pensée en un discours communicable représente parfois un défi considérable. Mon parcours en mathématiques a été assez autodidacte et atypique : pendant plusieurs années, j'ai appris par moi-même, développant mes propres modèles mentaux pour appréhender les mathématiques. Cela m'a souvent été très utile, car il m'est facile par la suite d'intégrer les modèles mentaux standards partagés par les mathématiciens. Cela signifie que certains concepts que j'utilise librement et naturellement dans ma réflexion personnelle sont étrangers à la plupart des mathématiciens avec lesquels je discute. Mes modèles et structures mentaux personnels sont similaires, par leur nature, aux types de modèles partagés par des groupes de mathématiciens, mais il s'agit souvent de modèles différents. Au moment de la formulation de la conjecture de géométrisation, ma compréhension de la géométrie hyperbolique en était un bon exemple. Un autre exemple, parmi d'autres, est la compréhension des espaces topologiques finis, un sujet atypique qui peut éclairer de nombreuses questions, mais qu'il n'est généralement pas utile de développer dans un cas particulier, car il existe des circonlocutions standard qui l'évitent.

Ni la conjecture de géométrisation ni sa démonstration pour les variétés de Haken n'étaient dans les plans des mathématiciens de l'époque ; elles allaient à contre-courant des tendances en topologie des trente années précédentes et prirent tout le monde par surprise. Pour la plupart des topologues de l'époque, la géométrie hyperbolique était une branche obscure des mathématiques, même si d'autres groupes de mathématiciens, comme les géomètres différentiels, la comprenaient sous certains angles. Il fallut un certain temps aux topologues pour saisir la signification, l'utilité et la pertinence de la conjecture de géométrisation.

Parallèlement, j'ai commencé à rédiger des notes sur la géométrie et la topologie des 3-variétés, en lien avec le cours de troisième cycle que je dispensais. Je les ai distribuées à quelques personnes, et très vite, de nombreuses autres, du monde entier, m'en ont demandé des exemplaires. La liste de diffusion a atteint environ 1200 personnes auxquelles j'envoyais des messages tous les deux mois environ. J'ai essayé de communiquer mes véritables pensées dans ces notes. De nombreux séminaires ont été organisés à partir de celles-ci, et j'ai reçu beaucoup de retours. Dans l'ensemble, les commentaires étaient du genre : "Vos notes sont vraiment inspirantes et magnifiques, mais je dois vous dire que nous avons passé 3 semaines en séminaire à travailler sur les détails du §$n.n$. Plus d'explications seraient certainement utiles".

J'ai également donné de nombreuses conférences à des groupes de mathématiciens sur l'étude des 3-variétés du point de vue géométrique, et sur la démonstration de la conjecture de géométrisation pour les variétés de Haken. Au début, ce sujet était étranger à presque tout le monde. Il était difficile de communiquer ; les connaissances étaient limitées à mon propre raisonnement, et non partagées par la communauté mathématique. Plusieurs théories mathématiques ont alimenté cet ensemble d'idées : la topologie des variétés à trois dimensions, les groupes kleiniens, les systèmes dynamiques, la topologie géométrique, les sous-groupes discrets des groupes de Lie, les feuilletages, les espaces de Teichmüller, les difféomorphismes pseudo-Anosov, la théorie géométrique des groupes, ainsi que la géométrie hyperbolique.

Nous avons organisé un atelier d'été de l'AMS à Bowdoin en 1980, où de nombreux mathématiciens spécialisés dans les sous-domaines de la topologie de basse dimension, des systèmes dynamiques et des groupes kleiniens sont venus.

Ce fut une expérience intéressante d'échange culturel. Il est devenu évident à quel point les preuves dépendent du public. Nous démontrons les choses dans un contexte social et les adressons à un public spécifique. Je pourrais communiquer en deux minutes certaines parties de cette démonstration aux topologues, mais concernant les analystes, il fallait une heure de cours magistral avant qu'ils ne commencent à comprendre. De même, certaines notions qui pouvaient être expliquées en deux minutes aux analystes nécessitaient une heure de cours avant que les topologues ne les assimilent. Et il y avait de nombreuses autres parties de la démonstration qui, en résumé, auraient dû prendre deux minutes, mais qu'aucun membre du public à l'époque n'avait les capacités mentales nécessaires pour assimiler en moins d'une heure.

À cette époque, il n'y avait pratiquement aucune infrastructure ni aucun contexte pour ce théorème, si bien que le passage de la façon dont l'idée avait germé dans mon esprit à ce que je devais dire pour la faire comprendre, sans parler de l'énergie que le public devait consacrer à la comprendre, était très important.

Suite à mon expérience avec les feuilletages et sous la pression sociale, j'ai concentré mes efforts sur le développement et la présentation de l'infrastructure, tant dans mes écrits que dans mes échanges. J'ai expliqué les détails aux rares personnes intéressées. J'ai rédigé des articles exposant les éléments essentiels de la démonstration du théorème de géométrisation pour les variétés de Haken, mais ces articles n'ont suscité quasiment aucun retour. De même, peu de personnes ont approfondi les sections les plus complexes et les plus approfondies de mes notes avant bien plus tard.

Il en résulte qu'aujourd'hui, un bon nombre de mathématiciens possèdent ce qui faisait cruellement défaut au début : une compréhension pratique des concepts et de l'infrastructure propres à cette discipline. L'activité mathématique y a été et demeure très florissante. En me concentrant sur la mise en place de cette infrastructure, l'explication et la publication des définitions et des modes de pensée, mais en tardant à énoncer ou à publier les démonstrations de tous les "théorèmes" que je savais démontrer, j'ai laissé la porte ouverte à de nombreux autres chercheurs. Cela a permis à d'autres de découvrir et de publier d'autres démonstrations du théorème de géométrisation. Ces démonstrations ont contribué au développement de concepts mathématiques qui sont en eux-mêmes très intéressants et qui ont mené à des avancées ultérieures en mathématiques.

Ce que les mathématiciens attendaient et dont ils avaient le plus besoin me concernant, c'était d'apprendre ma façon de penser, et non pas en réalité ma démonstration de la conjecture de géométrisation pour les variétés de Haken. Il est peu probable que la démonstration de la conjecture de géométrisation générale consiste à pousser plus loin la même démonstration.

Un autre problème réside dans le fait que certaines personnes ont besoin ou souhaitent un résultat accepté et validé, non pas pour l'apprendre, mais pour pouvoir le citer et s'y fier.

Les mathématiciens ont en fait très rapidement accepté ma démonstration, et ont commencé à la citer et à l'utiliser en se basant sur la documentation existante, sur leur expérience et leur confiance en moi, et sur l'acceptation par les experts avec lesquels j'avais passé beaucoup de temps à communiquer la démonstration. Le théorème est désormais documenté, grâce à des sources publiées dont je suis l'auteur et d'autres, si bien que la plupart des gens se sentent en sécurité pour le citer ; les spécialistes du domaine n'ont certainement pas remis en question sa validité, ni exprimé le besoin de détails qui ne sont pas disponibles.

Toutes les démonstrations n'ont pas le même rôle dans l'échafaudage logique que nous construisons pour les mathématiques. Cette démonstration particulière n'a probablement qu'une valeur logique temporaire, bien qu'elle ait une grande valeur motivationnelle en contribuant à étayer une certaine vision de la structure des 3-variétés. La conjecture de géométrisation complète reste une conjecture. Cela a été démontré dans de nombreux cas et est corroboré par de nombreuses preuves informatiques, mais cela n'a pas encore été prouvé de manière générale. Je suis convaincu que la preuve générale sera découverte, j'espère d'ici quelques années. À ce moment-là, les preuves concernant des cas particuliers deviendront probablement obsolètes.

Par ailleurs, ceux qui souhaitent utiliser la technologie géométrique ont tout intérêt à partir de l'hypothèse "Soit M^3 une variété admettant une décomposition géométrique", car celle-ci est plus générale que "Soit M^3 une variété de Haken". Les personnes qui ne souhaitent pas utiliser cette technologie ou qui s'en méfient peuvent l'éviter. Même lorsqu'un théorème concernant les variétés de Haken peut être démontré par des techniques géométriques, il est très précieux de trouver des techniques purement topologiques pour le démontrer.

Dans cet épisode (qui se poursuit encore), je pense avoir réussi à éviter les deux pires scénarios possibles : soit ne pas révéler ma découverte et ma démonstration, en gardant le secret (peut-être dans l'espoir de prouver la conjecture de Poincaré), soit présenter une théorie incontestable et difficile à apprendre, sans praticiens pour la maintenir en vie et la faire grandir.

Je peux aisément énumérer les regrets que j'ai concernant ma carrière. Je n'ai pas publié autant que j'aurais dû. Outre le théorème de géométrisation des variétés de Haken, il existe un certain nombre de projets mathématiques que je n'ai pas présentés de manière satisfaisante, voire pas du tout, à la communauté mathématique. Lorsque je me suis davantage concentré sur le développement de l'infrastructure plutôt que sur les théorèmes fondamentaux de la théorie géométrique des 3-variétés, je me suis quelque peu désintéressé du sujet, qui a continué d'évoluer ; et je n'ai pas activement ni efficacement promu le domaine ni les carrières des brillants chercheurs qui y travaillent. (Mais un certain désengagement me semble un effet secondaire presque inévitable de l'encadrement d'étudiants de troisième cycle et d'autres personnes : pour véritablement confier des axes de recherche à d'autres, il est nécessaire de lâcher prise et de cesser de trop y penser).

D'un autre côté, j'ai été occupé et productif, dans de nombreuses activités différentes. Notre système ne dégage pas de temps supplémentaire pour que des personnes comme moi puissent se consacrer à l'écriture et à la recherche ; au contraire, il nous submerge de demandes et d'opportunités de travail additionnel, et mon premier réflexe a été d'accepter la plupart d'entre elles. J'ai investi beaucoup d'efforts dans des activités non créditées que j'apprécie autant que la démonstration de théorèmes : la politique mathématique, la révision de mes notes en vue d'un ouvrage de haute qualité, l'exploration de l'informatique en mathématiques, la didactique des mathématiques, le développement de nouveaux outils de communication mathématique par le biais du Centre de géométrie (comme notre première expérience, la vidéo "Not Knot"), la direction du MSRI, etc.

Je pense que ce que j'ai fait n'a pas optimisé mes "crédits". Je n'ai pas ressenti le besoin impérieux de courir après les crédits. En effet, j'ai commencé à être confronté à d'autres défis que la simple démonstration de nouveaux théorèmes.

Je pense que mes actions ont bien contribué à stimuler les mathématiques.