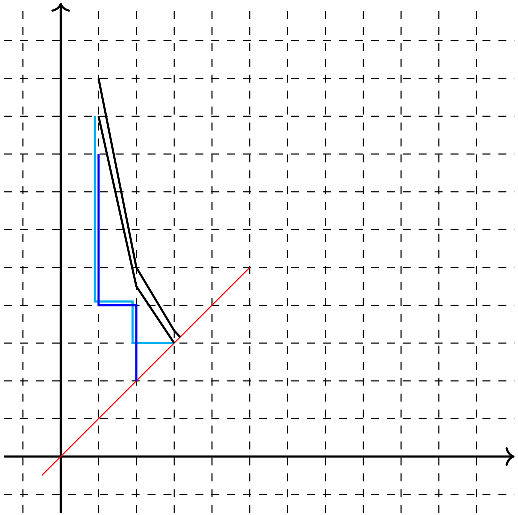
Mots de Christoffel d'hyperboles et primalité

D. Vella-Chemla

17.02.2017

Mots de Christoffel des hyperboles de 9 et 10



Mots de Christoffel des hyperboles de 11 et 12

n premier $\iff m_{n+1} = am_n$

3	a
4	aa
5	aab
6	$aaab$
7	$aaaba$
8	$aaaaba$
9	$aaaabaa$
10	$aaaaabab$
11	$aaaaabaab$
12	$aaaaaabaab$
13	$aaaaaabaaba$
14	$aaaaaaabaaba$
15	$aaaaaaabaaaba$
16	$aaaaaaaabaabaa$
17	$aaaaaaaabaaabab$
18	$aaaaaaaaabaaabab$
19	$aaaaaaaaabaaabaab$
20	$aaaaaaaaaabaaabaab$
21	$aaaaaaaaaabaaaababa$
22	$aaaaaaaaaaabaaabaaba$
23	$aaaaaaaaaaabaaaabaaba$

Changement de sens des inégalités, bifurcation des chemins

Passage du mot de 15 au mot de 16

	$a : (1+1)*15 \geqslant 16$
$a : (1+1)*14 \geqslant 15$	$a : (1+1)*14 \geqslant 16$
$a : (1+1)*13 \geqslant 15$	$a : (1+1)*13 \geqslant 16$
$a : (1+1)*12 \geqslant 15$	$a : (1+1)*12 \geqslant 16$
$a : (1+1)*11 \geqslant 15$	$a : (1+1)*11 \geqslant 16$
$a : (1+1)*10 \geqslant 15$	$a : (1+1)*10 \geqslant 16$
$a : (1+1)*9 \geqslant 15$	$a : (1+1)*9 \geqslant 16$
$a : (1+1)*8 \geqslant 15$	$a : (1+1)*8 \geqslant 16$
$b : (2+1)*8 < 15$	$b : (1+1)*7 < 16$
$a : (2+1)*7 \geqslant 15$	$a : (2+1)*7 \geqslant 16$
$a : (2+1)*6 \geqslant 15$	$a : (2+1)*6 \geqslant 16$
$a : (2+1)*5 \geqslant 15$ $\star$	$b : (2+1)*5 < 16$
$b : (3+1)*5 < 15$	$a : (3+1)*5 \geqslant 16$
$a : (3+1)*4 \geqslant 15$	$a : (3+1)*4 \geqslant 16$

Essai de formalisation

- $f'_n : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{B}$
- $f_n : \mathbb{N} \to \mathbb{B}$
- $f'_n((x,y)) = f_n(\varphi_n(x,y))$
- $\varphi_n : (x,y) \longmapsto x - y + n - 1$
- $f_n(\varphi_n(x,y)) \; = \; ((x+1)y \leqslant n)$
- n premier
$$\iff \forall k \in \mathbb{N}, \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor \leqslant k < n, f_n(\varphi_n^{-1}(k)) = f_{n+1}(\varphi_{n+1}^{-1}(k+1)).$$

Opérateurs associés aux deux lettres

- $a = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. a transforme $\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix} x \\ y-1 \\ 1 \end{pmatrix}$

- $b = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. b transforme $\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix} x+1 \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$

- En partant des points de départ $(1, p-1)$ et $(1, p)$ et en appliquant les opérateurs associés aux lettres des mots de p et $p+1$, il y a identité entre les points d'arrivée (point du plan au bout du chemin de Christoffel) lorsque p est premier.

Bibliographie

- [1] B.A. Trahtenbrot, *Algorithmes et machines à calculer*

- [2] J. Berstel, A. Lauve, C. Reutenauer, F. Saliola, *Combinatorics on Words : Christoffel Words and Repetitions in Words*, 2008.

- *"On est extrêmement familiers avec la non-commutativité parce que lorsqu'on écrit, avec des lettres, lorsqu'on écrit des mots, des phrases, etc., on doit bien sûr faire attention à l'ordre des lettres."*

(Alain Connes dans une courte interview au Collège de France, 24.04.2014)

Géométrie non-commutative