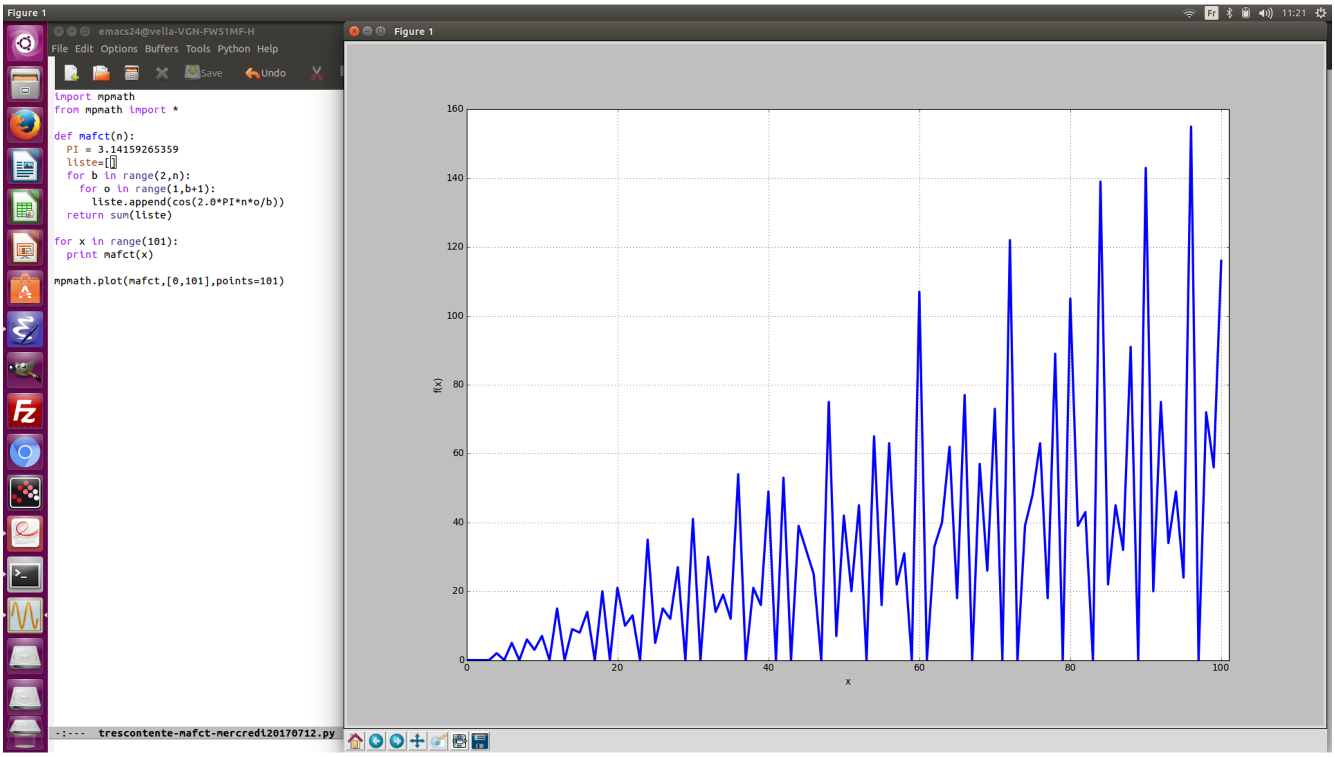
Alterner les termes de la somme de cosinus qui s'annule pour les nombres premiers (Denise Vella-Chemla, 28.10.2018)

On a proposé en juillet 2014 [*] la caractérisation suivante des nombres premiers (motivée par le fait que si p est un nombre premier, $\sigma(p) = p + 1$ [†]) :

$$n \text{ } est \text{ } premier \iff \sum_{b=2}^{n-1} \sum_{o=1}^{b} cos \frac{2\pi no}{b} = 0$$



On trouve ici une démonstration du fait que cette caractérisation des nombres premiers en est bien une : http://denise.vella.chemla.free.fr/VictorVarinKeldyshSumsumcos.pdf.

Il s'agit d'une caractérisation triviale des nombres premiers dans le sens où elle calcule la somme des diviseurs des entiers successifs par le biais de calcul d'angles et par le test du fait que ces angles sont ou non multiples de 2π. Cela revient au même pour tester si un nombre est premier qu'à étudier sa division par tous les entiers qui lui sont inférieurs [‡].

Voyons comment la somme de cosinus calcule la somme des diviseurs de 2, 3, 4 et 5. On note les angles en degrés pour que la divisibilité se voie mieux. θ dénote les angles dont sont calculés les cosinus.

∗. cf http://denise.vella.chemla.free.fr/primesommecos.pdf.
†. $\sigma(n)$ est la notation habituelle pour la somme des diviseurs de n.
‡. Cf page 9 de la première note qu'on avait écrite au sujet de la conjecture de Goldbach en septembre 2005.

n	$o,b\to\theta$	cos	$o,b\to\theta$	cos	$o,b\to\theta$	cos	$o,b\to\theta$	cos	$o,b\to\theta$	cos	$\sigma(n)$
2	$1,1\to720$	1									
	$1,2\to360$	1	$2,2\to720$	1							3
3	$1,1\to1080$	1									
	$1,2\to540$	-1	$2,2\to1080$	1							
	$1,3\to360$	1	$2,3\to720$	1	$3,3\to1080$	1					4
4	$1,1\to1440$	1									
	$1,2\to720$	1	$2,2\to1440$	1							
	$1,3\to480$	-0.5	$2,3\to960$	-0.5	$3,3\to1440$	1					
	$1,4\to360$	1	$2,4\to720$	1	$3,4\to1080$	1	$4,4\to1440$	1			7
5	$1,1\to1800$	1									
	$1,2\to900$	-1	$2,2\to1800$	1							
	$1,3\to600$	-0.5	$2,3\to1200$	-0.5	$3,3\to1800$	1					
	$1,4\to450$	0	$2,4\to900$	-1	$3,4\to1350$	0	$4,4\to1800$	1			
	$1,5\to360$	1	$2,5\to720$	1	$3,5\to1080$	1	$4,5\to1440$	1	$5,5\to1800$	1	6

On constate par programme qu'en alternant les signes $+$ et $-$ devant chaque terme de la somme et en soustrayant 1 au résultat global, on obtient que les nombres premiers de la forme $4k+1$ ont pour image 0 quand les nombres premiers de la forme $4k+3$ ont pour image 1 selon le programme suivant :

```
import mpmath
from mpmath import *

def mafct(n):
  oppose = 1
  liste=[]
  for b in range(2,n):
    for o in range(1,b+1):
      oppose = (-1) * oppose
      liste.append(oppose*cos(2*pi*n*o/b))
  res=sum(liste)-1
  return res

for x in range(101):
  print(str(x)+' a pour somme '+str(mafct(x)))

mpmath.plot(mafct,[0,101],points=101)
```

Résultat du programme ci-dessus : calcul d'une somme alternée de cosinus

```
1 a pour somme -1
2 a pour somme -1
3 a pour somme 1.0
4 a pour somme -2.0
5 a pour somme -2.66453525910038e-15
6 a pour somme -5.0
7 a pour somme 0.999999999999997
8 a pour somme -2.0
9 a pour somme 6.0
10 a pour somme -5.00000000000001
```

```
11 a pour somme 1.00000000000002
12 a pour somme -10.0
13 a pour somme 1.86517468137026e-14
14 a pour somme -4.99999999999998
15 a pour somme 16.9999999999999
16 a pour somme -2.00000000000003
17 a pour somme 1.06581410364015e-14
18 a pour somme -17.0
19 a pour somme 1.00000000000006
20 a pour somme -10.0000000000001
21 a pour somme 20.0
22 a pour somme -5.00000000000012
23 a pour somme 1.00000000000001
24 a pour somme -18.0000000000001
25 a pour somme 9.99999999999995
26 a pour somme -4.99999999999988
27 a pour somme 24.9999999999999
28 a pour somme -10.0000000000001
29 a pour somme -8.21565038222616e-14
30 a pour somme -36.9999999999999
31 a pour somme 1.00000000000026
32 a pour somme -2.00000000000002
33 a pour somme 27.9999999999999
34 a pour somme -4.99999999999991
35 a pour somme 25.0
36 a pour somme -33.9999999999997
37 a pour somme -3.19744231092045e-14
38 a pour somme -5.00000000000025
39 a pour somme 33.0000000000003
40 a pour somme -17.9999999999999
41 a pour somme 1.75859327100625e-13
42 a pour somme -45.0
43 a pour somme 1.0000000000002
44 a pour somme -9.9999999999999
45 a pour somme 64.0000000000001
46 a pour somme -5.00000000000072
47 a pour somme 1.00000000000015
48 a pour somme -34.0000000000001
49 a pour somme 14.0000000000003
50 a pour somme -24.9999999999995
51 a pour somme 40.9999999999997
52 a pour somme -9.99999999999957
53 a pour somme 1.93622895494627e-13
54 a pour somme -52.9999999999998
55 a pour somme 33.0000000000002
56 a pour somme -17.9999999999994
57 a pour somme 43.9999999999999
58 a pour somme -4.99999999999929
59 a pour somme 0.999999999999813
60 a pour somme -73.9999999999995
61 a pour somme -5.10924635932497e-13
62 a pour somme -4.99999999999921
63 a pour somme 81.0
64 a pour somme -2.00000000000007
65 a pour somme 35.999999999999
66 a pour somme -60.9999999999997
67 a pour somme 1.00000000000103
68 a pour somme -10.0000000000005
69 a pour somme 51.9999999999997
70 a pour somme -53.0000000000017
```

```
71 a pour somme 0.999999999999956
72 a pour somme -65.9999999999991
73 a pour somme 5.77315972805081e-13
74 a pour somme -4.99999999999963
75 a pour somme 97.0
76 a pour somme -10.0000000000007
77 a pour somme 36.0000000000004
78 a pour somme -68.9999999999998
79 a pour somme 1.00000000000032
80 a pour somme -33.9999999999996
81 a pour somme 78.0000000000006
82 a pour somme -5.00000000000226
83 a pour somme 0.999999999998838
84 a pour somme -89.9999999999989
85 a pour somme 43.9999999999991
86 a pour somme -4.99999999999942
87 a pour somme 64.9999999999984
88 a pour somme -18.0000000000019
89 a pour somme -5.15143483426073e-14
90 a pour somme -132.999999999998
91 a pour somme 41.0000000000008
92 a pour somme -9.99999999999778
93 a pour somme 67.9999999999987
94 a pour somme -5.00000000000054
95 a pour somme 48.9999999999985
96 a pour somme -65.9999999999998
97 a pour somme 1.24611432283928e-12
98 a pour somme -32.9999999999993
99 a pour somme 112.999999999998
100 a pour somme -50.0000000000001
```

Si l'on initialise le signe du premier terme de la somme à -1 plutôt qu'à $+1$ et si l'on ajoute 2 à la somme globale plutôt que de lui soustraire 1, alors les rôles des nombres premiers de la forme $4k+1$ et $4k+3$ sont échangés, les premiers ayant alors pour image 1 au lieu de 0 et les seconds ayant pour image 0 au lieu de 1 selon le programme, les graphiques et le tableau des images par les deux fonctions sommes alternées de cosinus suivants :

```
import mpmath
from mpmath import *

def mafct(n):
  oppose = -1
  liste=[]
  for b in range(2,n):
    for o in range(1,b+1):
      oppose = (-1) * oppose
      liste.append(oppose*cos(2*pi*n*o/b))
  res=sum(liste)-1
  return res

for x in range(101):
  print(str(x)+' a pour somme '+str(mafct(x)))

mpmath.plot(mafct,[0,101],points=101)
```

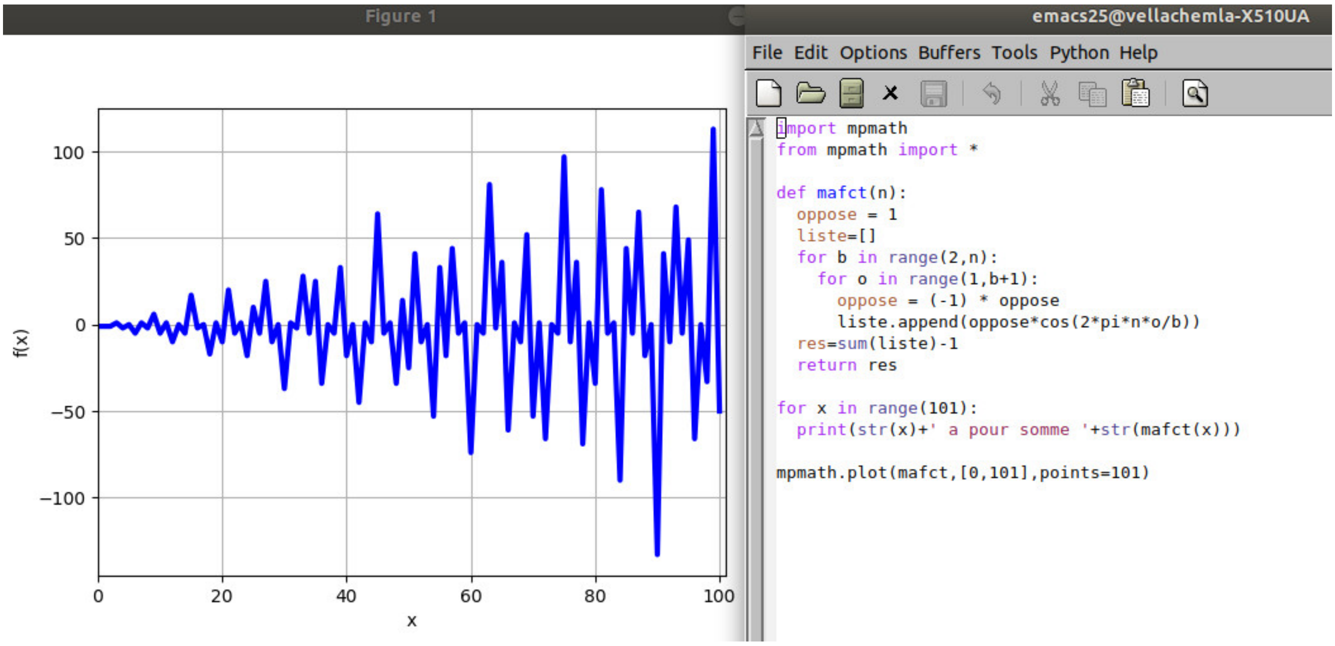


Figure 1
emacs25@vellachemla-X510UA
File Edit Options Buffers Tools Python Help
import mpmath
from mpmath import *
def mafct(n):
oppose = 1
liste=[]
for b in range(2,n):
for o in range(1,b+1):
oppose = (-1) * oppose
liste.append(oppose*cos(2*pi*n*o/b))
res=sum(liste)-1
return res
for x in range(101):
print(str(x)+' a pour somme '+str(mafct(x)))
mpmath.plot(mafct,[0,101],points=101)
f(x)
x
100
50
0
−50
−100
0
20
40
60
80
100

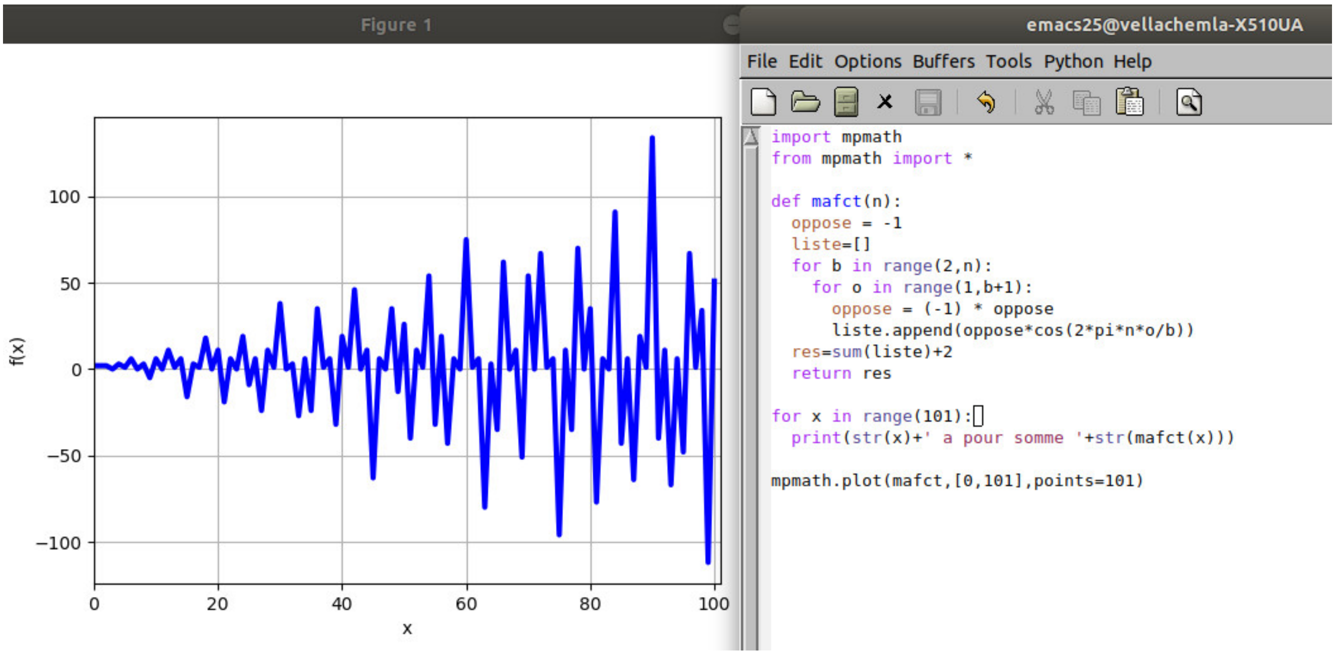


Figure 1
emacs25@vellachemla-X510UA
File Edit Options Buffers Tools Python Help
import mpmath
from mpmath import *
def mafct(n):
oppose = -1
liste=[]
for b in range(2,n):
for o in range(1,b+1):
oppose = (-1) * oppose
liste.append(oppose*cos(2*pi*n*o/b))
res=sum(liste)+2
return res
for x in range(101):
print(str(x)+' a pour somme '+str(mafct(x)))
mpmath.plot(mafct,[0,101],points=101)
f(x)
x
100
50
0
−50
−100
0
20
40
60
80
100

p	*somme alternée* 1	*somme alternée* 2
3	1	0
5	0	1
7	1	0
11	1	0
13	0	1
17	0	1
19	1	0
23	1	0
29	0	1
31	1	0
37	0	1
41	0	1
43	1	0
47	1	0
53	0	1
59	1	0
61	0	1
67	1	0
71	1	0
73	0	1
79	1	0
83	1	0
89	0	1
97	0	1

Annexe : extrait de la première note de septembre 2005 (il faut plutôt prendre le complexe 1 comme sommet commun des polygones)

Au tout début, nous réfléchissions à une manière élégante d'implémenter les horloges modulaires Gaussiennes. On peut voir l'horloge modulaire de n comme un polygone régulier à n côtés sur le cercle unité. Prenons comme convention que tous les polygones ont en commun le sommet correspondant à midi. Deux nombres sont premiers entre eux si leurs polygones réguliers respectifs n'ont aucun sommet commun hormis le sommet midi. Cette idée des polygones réguliers nous a fait faire un détour par les fractions à coefficients entiers. 4 n'est pas premier car $2/4 = 1/2$. Cela nous a amenée naturellement a nous rendre compte qu'un nombre était premier si toutes les fractions de $1/n$ à $(n-1)/n$ étaient non réductibles.

La considération des fractions entières $1/5$, $2/5$, $3/5$, $4/5$, nous a fait dériver vers les sinusoïdes. En effet, les sinusoïdes sont des fonctions qui passent régulièrement par zéro. La sinusoïde $\sin(5\pi x)$ s'annule justement pour les 4 fractions qui nous intéressent sur l'intervalle $]0, 1[$. Un nombre n est ainsi premier si sa sinusoïde s'annule exactement $n-1$ fois dans l'intervalle $]0, 1[$ et ce, jamais sur un point pour lequel s'annule la sinusoïde d'un nombre premier inférieur à lui.

Nous avons vite abandonné cette voie de recherche : le fait d'assimiler un nombre premier p à sa sinusoïde $\sin(p\pi x)$ semblait ne pas présenter d'intérêt ; en effet, même si cela a l'avantage de restreindre l'étude à l'intervalle $]0, 1[$, dans la mesure où il y a une infinité de sinusoïdes qui s'annulent dans cet intervalle, on ne fait que transformer un problème sur des données infiniment grandes en un problème sur des données infiniment petites.

Voir également http://denisevellachemla.eu/dents-de-scie.pdf pour une tentative d'explication d'une valeur moyenne de $\frac{1}{2}$ pour les restes modulaires vus comme des fractions rationnelles.