

1. Objet de l'expérience

L'objectif de cette expérience numérique n'est pas de rechercher un contre-exemple à la conjecture de Goldbach. Une vérification informatique de la conjecture a déjà été effectuée très loin, jusqu'à $4 \cdot 10^{18}$. Le présent calcul poursuit un objectif différent : étudier quantitativement la structure du *double crible* et, en particulier, la différence entre sa densité locale prédite et le nombre effectivement obtenu dans une fenêtre centrale finie.

Pour un entier pair N , nous considérons les entiers

$$\sqrt{N} < m \leq \frac{N}{2}$$

et demandons que, pour tout nombre premier $p \leq \sqrt{N}$,

$$p \nmid m \quad \text{et} \quad p \nmid (N - m).$$

Nous notons

$$S(N) = \# \left\{ m : \sqrt{N} < m \leq N/2, p \nmid m(N - m) \text{ pour tout } p \leq \sqrt{N} \right\}.$$

Pour $N > 4$, si un tel m existe, alors $m > \sqrt{N}$ et $N - m \geq N/2 > \sqrt{N}$. Aucun des deux nombres n'est divisible par un premier inférieur ou égal à sa racine carrée. Ils sont donc tous deux premiers. Ainsi, chaque valeur comptée par $S(N)$ fournit une décomposition de Goldbach

$$N = m + (N - m).$$

Le calcul numérique porte donc sur une quantité plus structurée que le simple nombre de décompositions de Goldbach : il mesure directement le nombre de points qui passent à travers les deux filtrations couplées $m \mapsto m$ et $m \mapsto N - m$.

2. Densité locale du double crible

Pour un premier $p \leq \sqrt{N}$, deux cas se présentent.

Si $p \nmid N$, les deux congruences interdites

$$m \equiv 0 \pmod{p}, \quad m \equiv N \pmod{p}$$

sont distinctes. Elles éliminent donc deux classes parmi les p classes modulo p .

Si $p \mid N$, ces deux classes coïncident, puisque $N \equiv 0 \pmod{p}$. Une seule classe est alors éliminée.

La densité locale correspondante est donc

$$L(N) = \prod_{\substack{p \leq \sqrt{N} \\ p \nmid N}} \left(1 - \frac{2}{p}\right) \prod_{\substack{p \leq \sqrt{N} \\ p \mid N}} \left(1 - \frac{1}{p}\right).$$

La quantité de comparaison utilisée dans le programme est

$$T(N) = \frac{N}{2} L(N).$$

On définit alors la *divergence relative*

$$Q(N) = \frac{S(N)}{T(N)}.$$

Ainsi :

- $Q(N) = 1$: le nombre observé coïncide avec la prédiction locale,
- $Q(N) < 1$: le nombre observé est inférieur à cette prédiction,
- $Q(N) > 1$: le nombre observé est supérieur à cette prédiction.

Il est important de souligner que $Q(N)$ n'est pas une quantité qui doit nécessairement être supérieure ou égale à 1. La densité $L(N)$ est une densité locale ; elle ne constitue pas, à elle seule, une borne inférieure pour le nombre de points dans un intervalle fini.

3. Résultats numériques

La version 4 a été exécutée jusqu'à

$$N_{\max} = 100\,000.$$

Tous les nombres pairs pertinents ont été parcourus. Le tableau suivant donne, pour chaque tranche complète, les extrêmes et les moyennes observés.

Tranche	$Q_{\min}$	$N(Q_{\min})$	Q_{moy}	$Q_{\max}$	$S_{\min}$	$N(S_{\min})$	S_{moy}	$S_{\min}/S_{\text{moy}}$	$1 - Q_{\min}$
10-99	0.41176471	68	0.92359545	1.53846154	1	10	2.9111	0.34351145	0.58823529
100-999	0.67543860	152	1.02787470	1.38434004	3	104	15.5933	0.19238991	0.32456140
1000-9999	0.72346567	1412	1.01477683	1.27911799	14	1052	88.4244	0.15832726	0.27653433
10000-99999	0.86882333	26054	0.97909497	1.15902031	88	10544	545.3828	0.16135456	0.13117667

Les nombres de valeurs N pour lesquelles $S(N) = 1$ sont respectivement 8, 0, 0, 0 dans ces quatre tranches. Aucune valeur N étudiée ne donne $S(N) = 0$.

4. Première observation : le minimum de $Q(N)$ remonte

Le phénomène numérique le plus net est l'évolution de la plus petite valeur observée de Q lorsque l'on passe d'une décade à la suivante :

$$0.41176471, \quad 0.67543860, \quad 0.72346567, \quad 0.86882333.$$

Le déficit maximal correspondant,

$$D(X) = 1 - Q_{\min},$$

vaut

$$0.58823529, \quad 0.32456140, \quad 0.27653433, \quad 0.13117667.$$

Dans les données calculées, le déficit maximal par rapport à la prédiction locale devient donc sensiblement plus petit lorsque N augmente.

Cette observation est intéressante pour le double crible, mais elle doit être formulée avec précision : quatre tranches ne permettent pas d'établir une loi asymptotique. Elles indiquent seulement une tendance numérique sur l'intervalle étudié.

En particulier, il serait abusif de conclure dès maintenant qu'il existe une constante $c > 0$ telle que

$$Q(N) \geq c$$

pour tout N . Le calcul jusqu'à 100 000 fournit seulement une borne empirique sur cet intervalle.

5. Deuxième observation : le minimum de $S(N)$ augmente

Une autre évolution est particulièrement frappante :

tranche	$S_{\min}$
10-99	1
100-999	3
1000-9999	14
10000-99999	88.

Le minimum du nombre de valeurs m qui passent à travers le double crible augmente donc fortement d'une décade (tranche) ¹ à l'autre.

On observe également que les valeurs $S(N) = 1$ disparaissent après la première tranche étudiée :

10-99	8
100-999	0
1000-9999	0
10000-99999	0.

Aucune valeur $S(N) = 0$ n'est apparue dans le calcul.

Cette dernière constatation est compatible avec Goldbach sur l'intervalle calculé, mais ce n'est pas elle qui constitue le résultat conceptuellement intéressant de cette expérience. Ce qui est étudié ici, c'est la façon dont le double crible remplit la fenêtre centrale, et non la simple existence d'un premier point.

1. Ce ne sont pas des décades, passons.

6. Troisième observation : le minimum absolu n'est pas le bon indicateur à lui seul

Le rapport

$$\frac{S_{\min}}{S_{\text{moy}}}$$

permet de comparer la profondeur du minimum à l'échelle moyenne de la tranche.

Les valeurs obtenues sont

$$0.34351145, \quad 0.19238991, \quad 0.15832726, \quad 0.16135456.$$

Ce rapport diminue fortement entre les premières tranches, puis se stabilise dans les deux dernières autour de 0.16.

Cela montre qu'il faut distinguer deux phénomènes :

1. le minimum absolu $S_{\min}$ augmente fortement ;
2. le minimum relatif à la moyenne ne diminue pas indéfiniment dans les données disponibles.

Cette distinction est importante. Une croissance de $S_{\min}$ ne suffit pas à démontrer que les fluctuations relatives deviennent négligeables.

7. Le cas de la dernière tranche

Dans la tranche

$$10000 \leq N \leq 99999,$$

on trouve

$$Q_{\min} = 0.86882333$$

pour

$$N = 26054,$$

tandis que

$$Q_{\max} = 1.15902031$$

est atteint pour

$$N = 13756.$$

La moyenne est

$$Q_{\text{moy}} = 0.97909497.$$

Ainsi, sur cette tranche, la réalisation effective du double crible est globalement assez proche de sa prédiction locale, mais avec des fluctuations encore visibles.

Le minimum de S vaut

$$S_{\min} = 88,$$

atteint pour

$$N = 10544,$$

alors que

$$S_{\text{moy}} = 545.3828.$$

Le point important est donc que, même lorsque $S(N)$ est exceptionnellement petit relativement à la moyenne de sa tranche, il reste ici très largement positif.

8. Quelques valeurs individuelles

Les valeurs affichées pendant le calcul donnent notamment

N	$S(N)$	$Q(N)$
10000	125	0.97918792
20000	225	1.02934172
30000	590	0.97046444
40000	379	0.99650014
50000	440	0.94282171
60000	1074	1.00100337
70000	706	0.96232214
80000	643	0.94759612
90000	1454	0.96571491
100000	800	0.97514998

Ces valeurs montrent clairement que $Q(N)$ ne converge pas monotoniquement (de façon monotone)² vers 1. Il oscille autour de la prédiction locale. La question pertinente n'est donc pas de chercher une monotonie de $Q(N)$, mais de comprendre la taille de ses fluctuations.

9. Ce que le calcul établit réellement

Le calcul effectué jusqu'à 100 000 permet d'affirmer les faits numériques suivants :

1. Pour chaque nombre pair N étudié, on a calculé exactement le nombre $S(N)$ dans la fenêtre centrale considérée.
2. Aucune valeur $S(N) = 0$ n'a été observée jusqu'à 100 000.
3. Dans la tranche 10000–99999,

$$88 \leq S(N)$$

pour tous les N pairs de la tranche.

4. Dans cette même tranche,

$$0.86882333 \leq Q(N) \leq 1.15902031.$$

5. La moyenne de $Q(N)$ dans cette tranche est

$$0.97909497.$$

2. [monotoniquement](#) : c'est monotone, mais de façon tonique. La vie est parfois bien monotonique.

6. Le déficit maximal observé par rapport à la prédiction locale est donc d'environ 13.12%.

Ces affirmations sont des résultats de calcul sur l'intervalle considéré. Elles ne constituent pas encore des théorèmes asymptotiques.

10. Pourquoi cette expérience est pertinente pour le double crible

Le point conceptuel de l'expérience est que le produit

$$L(N) = \prod_{\substack{p \leq \sqrt{N} \\ p \nmid N}} \left(1 - \frac{2}{p}\right) \prod_{\substack{p \leq \sqrt{N} \\ p \mid N}} \left(1 - \frac{1}{p}\right)$$

est une information purement locale : pour chaque premier p , on connaît les classes interdites pour m .

La quantité $S(N)$, elle, est une information globale sur une fenêtre finie : elle compte les valeurs m qui réalisent simultanément toutes ces contraintes.

La divergence

$$E(N) = S(N) - T(N)$$

mesure précisément l'écart entre ces deux niveaux de description.

Le résultat numérique suggère que, dans les tranches étudiées, cet écart relatif reste contrôlé et que son pire déficit observé devient plus petit avec N . C'est cette relation entre contraintes locales et réalisation globale qui mérite d'être étudiée mathématiquement.

11. Limite fondamentale de l'interprétation

Il faut cependant éviter un glissement logique.

Le fait que

$$Q(N) > 0$$

sur un grand intervalle calculé ne fournit pas automatiquement une borne uniforme

$$Q(N) \geq c > 0$$

pour tout N .

De même, le fait que

$$S(N) \geq 88$$

pour $10000 \leq N < 100000$ ne donne pas une borne analogue pour tous les nombres pairs.

Le véritable problème théorique serait donc de transformer la structure observée numériquement en une estimation de divergence suffisamment forte pour garantir

$$S(N) > 0.$$

Autrement dit, il faudrait contrôler

$$E(N) = S(N) - T(N)$$

de manière uniforme, ou obtenir directement une borne inférieure pour $S(N)$.

12. Une piste théorique indiquée par le calcul

La difficulté centrale n'est pas le calcul de la densité locale. Celui-ci est élémentaire : modulo chaque premier p , on sait exactement quelles classes de m sont interdites.

La difficulté est de passer de cette densité locale à une information sur une fenêtre de longueur seulement de l'ordre de N alors que le système complet des congruences possède une période

$$M = \prod_{p \leq \sqrt{N}} p,$$

énorme devant N .

Il faut donc contrôler la divergence entre la distribution périodique des classes autorisées et leur apparition dans la fenêtre centrale.

Dans le cas présent, cette divergence n'est pas celle d'un crible unidimensionnel quelconque : les deux conditions sont couplées par

$$m + (N - m) = N.$$

C'est précisément cette contrainte additive qui distingue le double crible de la simple multiplication indépendante de deux densités.

La question mathématique qui ressort de l'expérience peut donc être formulée ainsi :

La structure couplée $m \mapsto (N - m)$ permet-elle d'obtenir une estimation de divergence sensiblement meilleure que celle fournie par une estimation générique du crible ?

C'est cette question, et non la recherche numérique d'un contre-exemple à Goldbach, qui constitue le véritable objet de la présente expérience.

13. Conclusion

Les calculs jusqu'à 100 000 font apparaître trois phénomènes :

$$Q_{\min} : 0.4118 \longrightarrow 0.6754 \longrightarrow 0.7235 \longrightarrow 0.8688$$

$$S_{\min} : 1 \longrightarrow 3 \longrightarrow 14 \longrightarrow 88$$

et, dans la dernière tranche complète,

$$0.8688 \leq Q(N) \leq 1.1590, \quad S(N) \geq 88.$$

La première quantité indique que le pire déficit observé par rapport à la densité locale diminue fortement sur les tranches calculées. La seconde montre que le nombre minimal de valeurs m qui passent à travers le double crible augmente fortement avec N .

Le calcul ne démontre pas encore que ces tendances se poursuivent pour tout N . En revanche, il fournit une observation numérique suffisamment précise pour orienter la recherche : il faut chercher une estimation de la *divergence du double crible couplé*, et non simplement multiplier des densités locales.