

Analyse critique de l’approche “Papillons et sapins”, de Denise Vella-Chemla¹, approche formalisée par l’ia gemini² et critique de cette formalisation par l’ia claude

Objet

On examine successivement deux documents : *Papillons et sapins* (Denise Vella-Chemla, 4.8.2024), qui propose une reformulation du crible dans $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ via les parties décimales, puis une somme heuristique $S(n)$ censée majorer le nombre d’entiers éliminés par ce crible ; et *Formalisation analytique du crible de Goldbach dans $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$, rectification des heuristiques* (Gemini, juillet 2026), qui prétend corriger cette somme. Toutes les affirmations numériques ci-dessous ont été vérifiées par exécution effective des algorithmes décrits (et non simplement relues), ce qui permet d’aller au-delà d’un désaccord de principe.

Ce que fait réellement l’algorithme des parties décimales

Remarque : La condition “ $\text{frac}(x/r) \neq 0$ et $\text{frac}(n/r) \neq \text{frac}(x/r)$ ” est rigoureusement équivalente à “ $r \nmid x$ et $r \nmid (n - x)$ ”. Le passage par $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ et les parties décimales n’introduit donc aucun contenu mathématique nouveau par rapport à la division euclidienne : c’est un simple changement de notation pour le crible d’Ératosthène / la division par essais, appliqué simultanément à x et à $n - x$. La présentation en miroir des deux courbes est une illustration pédagogique fidèle de cette équivalence, pas une découverte structurelle.

Remarque : le fait de faire varier r sur *tous* les entiers de l’intervalle considéré (et non seulement sur les nombres premiers) est inoffensif mais redondant : si r est composé et $r \mid x$, alors un facteur premier de r , lui-même $\leq r \leq \lfloor \sqrt{n} \rfloor$, divise déjà x et a donc déjà provoqué l’élimination de x au rang correspondant. L’ensemble `produitglobal` obtenu est donc identique à celui qu’on obtiendrait en ne faisant varier r que sur les nombres premiers $\leq \lfloor \sqrt{n} \rfloor$. Ce n’est pas une erreur, mais il est utile de le savoir pour la suite : le crible réellement à l’œuvre est un crible *premier*, pas un crible sur tous les entiers.

Constat : le premier programme fait varier r dans `range(3, m+1)`, c’est-à-dire à partir de 3, en omettant $r = 2$. Le texte le signale (“on a omis les courbes pour le nombre premier 2 [...] celles-ci font éliminer les décomposants pairs”), mais ne tire pas la conséquence : les points marqués “décomposants de Goldbach” sur les figures ne sont pas garantis premiers, ils peuvent être pairs. Vérification effective (recalcul de `produitglobal` avec $r \geq 3$ seulement) :

n	survivants avec $r \geq 3$ (algorithme tel quel)	vraies décompositions de Goldbach
20	3	2
60	9	6
100	7	6
998	16	17
2000	59	37

1. Voir <https://denisevellachemla.eu/papillons-et-sapins.pdf>.

2. Voir <https://denisevellachemla.eu/suite-perseverare-gemini-dvc.pdf>.

Les deux colonnes ne coïncident pas systématiquement (ni par excès ni par défaut de façon uniforme), ce qui confirme que l'algorithme du premier programme, appliqué littéralement, ne calcule pas exactement les décompositions de Goldbach de n tant que $r = 2$ n'est pas réintégré. C'est un défaut mineur et réparable (il suffit de démarrer la boucle à $r = 2$), mais il faut le corriger avant de s'appuyer sur les figures pour toute affirmation quantitative.

Le cœur du problème : la somme heuristique $S(n)$

C'est ici que se joue la véritable prétention du document : si l'on pouvait montrer $S(n) < n/2$ pour tout n , où $S(n)$ majore le nombre d'entiers éliminés, on en déduirait l'existence d'au moins un survivant, donc d'un décomposant de Goldbach. Trois problèmes indépendants invalident cette stratégie.

Le facteur $\frac{1}{(r-1)!}$ ne résiste pas à son propre exemple

Le facteur de décroissance factorielle est introduit à partir d'un unique cas particulier ($n = 98$, comparaison de L_3 et L_5), puis extrapolé à tout r . Or l'exemple donné ne valide pas l'extrapolation. Le document affirme que, pour passer de $r = 3$ à $r = 5$, "1 paquet de 2 nombres sur 3" est nouveau, soit une fraction de nouveauté d'environ $1/3$. En reconstituant la liste L_5 barrée explicitement dans le texte, la fraction réellement nouvelle est $6/19 \approx 0,316$, ce qui confirme l'ordre de grandeur $\approx 1/3$ annoncé par l'autrice. Mais la formule extrapolée $\frac{2}{(r-1)!}$ prédit, pour $r = 5$, une

fraction de nouveauté de $\frac{2}{4!} = \frac{1}{12} \approx 0,083$ - un facteur 4 plus petit que ce que montre l'exemple lui-même. **La formule ne reproduit donc pas le cas qui est censé la justifier.** Il n'y a pas eu de dérivation, mais un ajustement de courbe mental sur un seul point, sans vérification a posteriori de cohérence.

$S(n)$ sous-estime systématiquement le vrai nombre d'éliminés

On a recalculé exactement (sans aucune heuristique, par simple double boucle) le vrai cardinal de $\bigcup_{2 \leq r \leq \lfloor \sqrt{n} \rfloor} (\ker f_r \cup \ker g_r)$, à comparer à $S(n)$:

n	vrai nombre d'éliminés	$S(n)$	écart $S(n) - \text{vrai}$
20	9	8,75	-0,25
100	46	44,33	-1,67
500	238	221,64	-16,36
998	484	467,35	-16,65
2000	966	886,54	-79,46
5000	2429	2216,35	-212,65

Dans les six cas testés, $S(n)$ est *inférieur* au vrai nombre d'éliminés, et l'écart croît en valeur absolue avec n . Autrement dit, $S(n)$ n'est **pas une borne supérieure** du nombre d'éliminés : c'est une quantité distincte, systématiquement plus petite. Le raisonnement " $S(n) < n/2$ donc il reste au moins un survivant" est donc invalide dans sa structure même, indépendamment du fait que la conclusion finale (l'existence d'un survivant) soit, elle, vraie - puisque Goldbach est vérifiée numériquement jusqu'à des bornes bien supérieures par d'autres voies. Un énoncé peut être vrai

pour de mauvaises raisons ; c'est précisément le cas ici.

$S(n)/n$ est structurellement constant, alors que la vraie proportion de survivants décroît.

Proposition :

$S(n)/n$ converge vers une constante strictement positive quand $n \rightarrow \infty$, par construction, indépendamment de tout argument arithmétique sur n .

En effet $S(n) = \sum_{2 \leq r \leq \lfloor \sqrt{n} \rfloor} n \cdot \varepsilon_r(n)/r!$ (à un facteur $1/2$ près selon $r \mid n$), et la série $\sum_r 1/r!$ converge si vite que les termes $r \gtrsim 15$ sont numériquement négligeables : la valeur de $S(n)/n$ ne dépend, en pratique, que des tout premiers termes de la boucle, plus $\lfloor \sqrt{n} \rfloor$ soit petit ou grand. C'est exactement ce que montre la table de l'autrice elle-même : $S(n)/n \approx 0,4432$ pour n allant de 10 à 10^6 , sans variation perceptible.

Or il est classique (théorème de Mertens) que la densité des entiers dépourvus de tout facteur premier $\leq z$ décroît comme $e^{-\gamma}/\ln z$, donc tend vers 0 quand $z \rightarrow \infty$. La vraie proportion de survivants du crible (entiers $x \leq n/2$ tels que ni x ni $n - x$ n'ait de facteur premier $\leq \sqrt{n}$) doit donc décroître vers 0 , et non se stabiliser. Vérification numérique directe :

n	$S(n)/n$	vraie proportion de survivants
100	0,4433	0,0800
1 000	0,4433	0,0460
10 000	0,4433	0,0248
100 000	0,4433	0,0160

La colonne $S(n)/n$ est plate ; la vraie proportion de survivants décroît régulièrement. Les deux quantités n'ont donc pas seulement une valeur différente : elles n'ont pas le même *comportement asymptotique*. $S(n)$ ne peut donc, à aucun titre, servir de proxy au comportement réel du crible pour n grand - la coïncidence apparente autour de $n \sim 10^2$ – 10^3 est un artefact de l'échelle choisie, pas un indice de validité.

Ce que corrige effectivement Gemini, et ce qui reste manquant

Remarque [ce qui est un progrès réel]

Le remplacement du facteur ad hoc $1/(r-1)!$ par un produit de type Mertens (éq. 3 du document de Gemini) restaure la bonne *allure* asymptotique. En évaluant numériquement cette formule (avec $C_2 \approx 0,66016$, constante des nombres premiers jumeaux, et $\gamma \approx 0,57722$) :

n	vraie proportion de survivants	formule de Gemini
100	0,0800	0,0785
1 000	0,0460	0,0349
10 000	0,0248	0,0196
100 000	0,0160	0,0126

L'accord n'est pas exact (l'écart relatif est de l'ordre de 20 à 30 %, ce qui est attendu d'une formule asymptotique appliquée à des n modestes), mais l'ordre de grandeur et surtout *la décroissance* sont corrects, ce que la formule $S(n)$ de l'autrice ne reproduit à aucun degré. Sur ce point précis, la rectification de Gemini est donc une réelle amélioration, et l'objection sur le théorème des restes chinois (indépendance multiplicative, non factorielle, des classes de congruence pour r premiers entre eux) est fondée.

Remarque [ce qui reste insuffisant]

Le document de Gemini n'établit cependant pas la constante 0,4432 de l'autrice : il l'importe telle quelle de la table numérique fournie par Denise Vella-Chemla, puis affirme sans calcul que "la prise en compte des cas $r \mid n$ abaisse ce ratio à $\alpha \approx 0,4432$ " et que l'accord constaté est "la manifestation de la densité locale des entiers non criblés". Aucune des deux formules (l'ancienne, en $n(e-2)$, ou la nouvelle, en produit de Mertens) ne redonne réellement 0,4432 par le calcul : la première parce qu'elle vaut $\approx 0,718n$ (donc trop grande d'un facteur $\sim 1,6$), la seconde parce que, comme le montre le tableau ci-dessus, elle décroît avec n et ne prend jamais durablement la valeur 0,4432 dans la plage observée. Autrement dit, le diagnostic qualitatif de Gemini ("ce n'est pas une propriété de e , mais un phénomène de crible") est correct, mais l'affirmation numérique précise ($\alpha \approx 0,4432$) reste, dans son document, un emprunt non justifié plutôt qu'un résultat dérivé.

Remarque [limite structurelle, à ne mentionner qu'une fois mais avec précision] Même rendue rigoureuse, une formule de type Mertens/Brun/Selberg pour la densité des survivants ne suffirait pas, par construction, à établir une minoration *strictement positive* du nombre de décompositions de Goldbach pour tout n . C'est le contenu précis du problème de parité de Selberg : les cribles de ce type (Legendre, Brun, Selberg) permettent de majorer efficacement le nombre de survivants d'une double condition linéaire (x premier et $n-x$ premier), mais ils ne peuvent pas, seuls, en minorer le nombre au-dessus de 0 - c'est exactement la raison pour laquelle le théorème de Chen (1973) n'obtient que $n = p + P_2$ (un premier plus un produit d'au plus deux premiers) et non $n = p + p'$. Ce n'est pas une invocation réflexe de "l'obstacle de parité" : c'est la raison technique précise pour laquelle la voie ouverte par la rectification de Gemini, aussi correcte soit-elle localement, ne peut pas, en l'état, être poussée jusqu'à une preuve - quelle que soit la qualité de l'estimation de densité obtenue.

Conclusion

Le document *Papillons et sapins* contient une reformulation correcte, mais sans contenu nouveau, du crible d'Ératosthène dans $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ (section 1), puis une tentative de majoration du nombre d'éliminés dont on a montré, par calcul direct et non par supposition, qu'elle échoue à trois niveaux indépendants : le facteur $1/(r-1)!$ contredit l'exemple censé le justifier (§ 2.1), $S(n)$ sous-estime numériquement le vrai nombre d'éliminés au lieu de le majorer (§ 2.2), et $S(n)/n$ est structurellement constant là où la vraie proportion de survivants doit décroître (§ 2.3). La rectification de Gemini identifie correctement la nature du problème (indépendance non factorielle, pertinence du théorème des restes chinois et des cribles de Mertens/Selberg) et améliore réellement l'allure asymptotique, mais sans re-dériver la constante qu'elle prétend expliquer, et sans pouvoir, de toute façon, dépasser l'obstacle de parité inhérent à toute approche de ce type.