Analyse critique des prétendues démonstrations de la conjecture de Goldbach par l'IA Mistral

Analyse réalisée par gemini, à la demande de Denise Vella-Chemla

1er juillet 2026

1. Introduction

La conjecture de Goldbach (1742) résiste aux plus grands mathématiciens depuis près de trois siècles. Lorsqu'une Intelligence Artificielle prétend la démontrer en quelques pages de manière élémentaire, il y a invariablement un *bug* ou un *schisme* logique.

L'analyse des trois documents fournis montre que Mistral commet des erreurs classiques de manipulation des objets mathématiques : confusion entre majorations et minorations, hallucination de propriétés de fonctions (comme la croissance stricte de la fonction de comptage des nombres premiers), et conclusions topologiques abusives basées sur des concepts fractals inventés.

2. Analyse du Document 1 : L'approche élémentaire par l'absurde

Fichier analysé : `la-demonstration-de-mistral-de-CG-dvc.pdf`

2.1. Le mécanisme de la preuve de Mistral

L'IA définit l'ensemble $S_n = \{p \text{ premier impair} \mid 3 \leq p \leq n-2\}$. Elle suppose par l'absurde que n n'est pas la somme de deux nombres premiers, ce qui implique que pour tout $p \in S_n$, $n-p$ est composé.

Comme $n-p$ est impair et composé, Mistral affirme que $n-p \geq 9$, d'où elle déduit que $p \leq n-9$. Elle en conclut que $S_n \subseteq \{p \text{ premier} \mid 3 \leq p \leq n-9\}$, et donc que :

$$|S_n| \leq \pi(n-9) - 1 \implies \pi(n-2) \leq \pi(n-9) \quad \text{(Étape 5)} \tag{1}$$

2.2. Le Loup (L'erreur fondamentale)

À l'Étape 6, Mistral affirme textuellement : *"La fonction π est strictement croissante pour $x \geq 2$. Or, pour tout $n \geq 6$, $n-2 > n-9$, donc $\pi(n-2) > \pi(n-9)$, ce qui crée une contradiction."*

C'est mathématiquement FAUX. La fonction $\pi(x)$, qui compte les nombres premiers inférieurs ou égaux à x, est une fonction en escalier. Elle n'est absolument pas *strictement* croissante. Elle reste constante sur les intervalles ne contenant aucun nombre premier.
Si la conjecture de Goldbach était fausse pour un entier n, cela signifierait simplement qu'il n'y a **aucun nombre premier** dans l'intervalle $[n-8, n-2]$. Dans ce cas de figure, on aurait précisément :

$$\pi(n-2) = \pi(n-9) \tag{2}$$

L'inégalité $\pi(n-2) \leq \pi(n-9)$ obtenue par Mistral à l'étape 5 ne provoquerait alors **aucune contradiction**, elle se transformerait juste en une égalité. La preuve s'effondre totalement ici : Mistral n'a pas démontré Goldbach, elle a seulement redécouvert que si n n'a pas de décomposition, alors il n'y a pas de nombres premiers juste avant n.

3. Analyse du Document 2 : L'approche par le crible de Brun

Fichier analysé : `Mistral-preuve-6x-dvc.pdf`

3.1. Le mécanisme de la preuve de Mistral

L'IA remarque judicieusement que pour les nombres de la forme $n = 6x$, le crible de Goldbach n'élimine qu'une seule classe de congruence modulo 2 et modulo 3 (au lieu de deux), ce qui laisse théoriquement plus de candidats premiers potentiels. Elle utilise ensuite le crible de Brun pour affirmer que le nombre de décomposants est minoré par $C' \frac{n}{(\ln n)^2}$.

3.2. Le Loup (L'erreur fondamentale)

Le crible de Brun (et la théorie des cribles en général) souffre d'un obstacle majeur appelé le **problème de la parité** (*parity problem*).

1. Les formes standards du crible de Brun ne permettent pas d'obtenir une *minoration* stricte du nombre de couples de nombres premiers de la forme $(p, n-p)$ qui garantit leur existence pour tout n.
2. Le crible permet seulement d'obtenir une *majoration* (le nombre de couples ne dépasse pas $C \frac{n}{(\ln n)^2}$) ou des minorations pour des nombres *presque premiers* (par exemple, le théorème de Chen montre que tout grand entier pair est la somme d'un nombre premier et d'un nombre ayant au plus deux facteurs premiers).

Mistral s'octroie illégalement le droit d'utiliser une minoration exacte asymptotique comme une certitude absolue pour chaque entier à partir de 4×10^{18}. En mathématiques, un comportement asymptotique n'exclut pas l'existence d'exceptions locales si la minoration n'est pas effective et rigoureusement bornée pour *chaque* valeur discrète.

4. Analyse du Document 3 : L'approche fractale de la Castafiore

Fichier analysé : `Dimension-de-Hausdorff-ensemble-de-la-Castafiore-dvc.pdf`

4.1. Le mécanisme de la preuve de Mistral

Le texte utilise un jargon poético-scientifique ("Snurpf complexe", "Ensemble de la Castafiore"[1]) pour modéliser les trajectoires des nombres premiers dans le plan complexe. L'IA calcule numériquement par *box-counting* une dimension de Hausdorff de $0,814$. Elle affirme que puisque l'ensemble des trajectoires des nombres premiers $\mathcal{P}$ et celui des chemins admissibles $\mathcal{K}(n)$ ont la puissance du continu, leurs structures fractales s'entrecroisent nécessairement.

4.2. Le Loup (L'erreur fondamentale)

L'IA avoue elle-même sa propre faille au paragraphe 5.2 : selon le théorème classique d'intersection de Falconer, pour garantir que l'intersection de deux ensembles fractals dans un espace de dimension d soit non vide, la somme de leurs dimensions de Hausdorff doit être strictement supérieure à d.

Ici, l'espace ambiant est le plan complexe ($\mathbb{R}^2$, donc $d = 2$). Or :

$$\dim_H(\mathcal{P}) + \dim_H(\mathcal{K}(n)) \approx 0,814 + 0,814 = 1,628 < 2 \tag{3}$$

La somme des dimensions étant inférieure à 2, la théorie des fractales **ne garantit absolument pas** une intersection. Pour contourner cette impossibilité mathématique, Mistral bascule dans la pseudo-science en écrivant : *"leur intersection est non vide par densité"*, ce qui n'est pas un argument topologique valide. Une dimension de Hausdorff calculée par un programme informatique à partir d'échantillons finis ne constitue en aucun cas une preuve rigoureuse pour l'infini des entiers.

5. Conclusion sur votre piste (Le triplet 3, 5, 7)

Votre remarque concernant le fait que $(3, 5, 7)$ soit le seul triplet de nombres premiers consécutifs est parfaitement exacte. En effet, sur trois nombres impairs consécutifs $(2k + 1, 2k + 3, 2k + 5)$, il y en a toujours un qui est un multiple de 3. Si $k > 1$, ce multiple de 3 est nécessairement composé.
C'est cette intuition sur les contraintes de congruence modulo 3 qui a poussé Mistral à développer son second document (`Mistral-preuve-6x-dvc.pdf`) basé sur l'analyse des restes modulo 6 $(6k+2, 6k+4, 6k)$. Cependant, bien que l'étude des structures modulo 6 soit une excellente grille de lecture pour observer les décompositions de Goldbach (comme votre cas préféré $98 = 31 + 67 \equiv 2 \pmod 6$), la réduction des classes interdites ne suffit pas à elle seule à contourner le problème de la parité des cribles.

L'IA a produit des synthèses de cours de théorie des nombres très convaincantes visuellement, mais a masqué son incapacité à franchir les barrières historiques par des affirmations logiques fausses ou du jargon sans fondement.

1. Ah non ! Ça, c'est de moi, je le revendique !