

## 1. Résumé

Ce document synthétise et structure les intuitions et travaux mathématico-physiques visant à modéliser la primalité et la conjecture de Goldbach à travers le prisme de la mécanique quantique. Inspiré par le formalisme matriciel de Heisenberg et les visions géométriques d'Alain Connes, ce rapport explore le passage d'un déterminisme combinatoire rigide à un espace probabiliste et quantique (superpositions d'états, sphère de Bloch, opérateurs de transition) et éclaire sous un jour nouveau le parallélisme inhérent aux cribles arithmétiques.

## 2. Introduction : le besoin de non-déterminisme

L'analyse des tentatives successives de résolution de la conjecture de Goldbach montre un verrou récurrent : la rigidité du déterminisme combinatoire classique face à l'enchevêtrement des contraintes modulaires. Dès que l'on tente de fixer ou de résoudre une contrainte par rapport à un ensemble de modules (par exemple des primorielles ou des ensembles de nombres premiers successifs), une incertitude surgit inévitablement sur les modules adjacents. C'est l'illustration même d'un principe d'incertitude appliqué à l'arithmétique. Les travaux de Denise Vella-Chemla suggèrent à cet égard une analogie profonde entre la nature intrinsèque des nombres premiers et la physique quantique. En s'appuyant sur l'approche d'Alain Connes, l'introduction du formalisme matriciel de Heisenberg apparaît comme un recours conceptuel majeur pour lever ces incertitudes simultanées.

## 3. Modélisation par qubits et sphère de Bloch

Plutôt que de traiter la primalité comme une fonction binaire stricte  $\{0, 1\}$  piégée dans une logique booléenne classique, on introduit l'état d'un entier sous forme de qubit ou de superposition d'états sur la sphère de Bloch.

### 3.1. L'état de divisibilité polarisée

Pour un nombre premier  $p$  servant de module, la notion de polarisation modélise la distance d'un nombre à la divisibilité. L'état quantique associé est proposé sous la forme d'une superposition unitaire :

$$|\Psi_p\rangle = \frac{1}{\sqrt{p-1}} |0_p\rangle + \sqrt{\frac{p-2}{p-1}} |1_p\rangle \quad (1)$$

où  $|0_p\rangle$  représente l'état divisible (composé modulo  $p$ ) et  $|1_p\rangle$  l'état non-divisible (premier potentiel

modulo  $p$ ). La condition de normalisation unitaire est rigoureusement vérifiée :

$$\left(\frac{1}{\sqrt{p-1}}\right)^2 + \left(\sqrt{\frac{p-2}{p-1}}\right)^2 = \frac{1}{p-1} + \frac{p-2}{p-1} = 1 \quad (2)$$

Cette superposition permet de ne plus confiner la primalité à une barrière absolue, mais de la traiter comme une vibration ou une polarisation. Elle permet d'intriquer les divisibilités de  $x$  et de  $n-x$  par un module  $p$  lorsque la divisibilité de la cible  $n$  par  $p$  est connue.

### 3.2. Réduction de l'espace de Hilbert

Pour un entier  $n$ , afin de s'affranchir de la dimension infinie de l'espace de Hilbert sous-jacent, on restreint le système à un registre fini de  $n-2$  qubits, correspondant chacun aux divisions de  $n$  par les entiers successifs de 3 à  $n$ . C'est l'effondrement de la fonction d'onde (ou réduction du paquet d'onde) lors de l'opération de mesure arithmétique qui matérialise et fixe les valeurs de divisibilité d'un nombre donné.

## 4. Opérateurs matriciels de Heisenberg et règles de transition

Le passage de l'étude d'un entier  $n$  à  $n+2$  est modélisé par des opérateurs matriciels (matrices  $4 \times 4$  ou réductions  $2 \times 2$  et  $3 \times 3$ ) agissant sur l'espace des booléens de primalité des décompositions complémentaires.

Dans les notes théoriques, 16 règles lient les décompositions de  $n = x + y$ ,  $n = (x+2) + (y-2)$  et  $n+2 = (x+2) + y$  selon le caractère premier ( $p$ ) ou composé ( $c$ ). Ces transitions ont été associées à quatre opérateurs fondamentaux (notés sous forme de matrices  $M_a, M_b, M_c, M_d$ ) calqués initialement sur l'architecture de l'algorithme quantique de Deutsch :

$$M_a = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad M_b = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M_c = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad M_d = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

L'analyse de ces permutations pures révèle qu'elles agissent de façon trop rigide et ne respectent pas exactement les règles d'évolution algébriques fines recherchées. L'introduction de coefficients complexes (propres au formalisme de Heisenberg) constitue la clé mathématique essentielle pour adoucir ces transitions via des opérateurs unitaires continus, permettant des interférences destructrices précises sur les états composés.

## 5. Parallélisme quantique vs approche séquentielle : l'analyse du programme de Conway

Le programme développé en Perl par Damian Conway met en lumière l'approche classique par non-équivalence modulaire simultanée, utilisant une boucle séquentielle pour tester l'un après l'autre les modules premiers :

```
sub not_equiv {
    my ($x, $y, @mod_set) = @_;
    for my $modulus (@mod_set) {
        return 0 if $x % $modulus == $y % $modulus;
    }
    return 1;
}
```

En informatique algorithmique classique, cette vérification pas-à-pas se heurte à une explosion de complexité face à de très grands nombres premiers, car chaque filtre est appliqué de manière strictement successive. Graphiquement, cela revient à essayer de faire passer manuellement une particule à travers une grille de filtres rigides et indépendants.

Le formalisme quantique offre une alternative conceptuelle radicale : remplacer la boucle `for` temporelle et séquentielle par un *parallélisme quantique naturel et instantané*. Au lieu d'appliquer des verrous logiques successifs, le vecteur d'état portant la superposition de toutes les décompositions possibles est injecté dans un opérateur global (un filtre polarisant mathématique, analogue en mécanique quantique aux expériences de Philippe Grangier ou à la loi de Malus).

Le fait que  $x$  et  $y$  ne soient pas équivalents modulo l'ensemble des  $m_i$  équivaut à la projection du système sur un espace orthogonal. Sous ce prisme, l'évaluation de la fonction `not_equiv` n'est plus une suite de calculs, mais un phénomène d'*interférences d'ondes de probabilité* :

- Les configurations menant à des nombres composés subissent des *interférences destructrices* et s'annulent mutuellement dans le calcul spectral.
- Les paires authentiques de Goldbach (où  $x$  et  $n - x$  sont simultanément premiers) émergent par *interférence constructive*.

## 6. Perspectives synthétiques et axes de résolution quantique

Pour guider le développement de modèles numériques ou analytiques avancés (notamment dans le cadre d'exécutions sur des simulateurs quantiques comme `claudes` ou des architectures `qiskit`), trois axes cardinaux se dégagent :

1. **Hamiltonien de primalité** : concevoir un opérateur Hamiltonien  $\widehat{H}$  dont le spectre des valeurs propres est intimement lié aux restes modulaires (du Snurpf de Denise Vella-Chemla). L'état fondamental de ce système caractériserait alors de manière univoque la non-divisibilité simultanée.

2. **État intriqué de Goldbach** : représenter une cible paire  $n$  sous la forme d'un état intriqué maximal de paires de particules représentant les couples complémentaires  $(x, n - x)$ . Démontrer la conjecture de Goldbach revient alors formellement à prouver que, pour tout  $n \geq 4$ , la projection de cet état sur le sous-espace propre  $|\text{premier}, \text{premier}\rangle$  possède une probabilité de mesure strictement non nulle.
3. **Algorithme de type transformée de Fourier quantique (QFT)** : utiliser les propriétés de la QFT (à l'instar des algorithmes de Shor ou de Deutsch-Jozsa) pour traiter globalement et parallèlement les non-congruences (qu'implémente par exemple le programme en Perl de Damian Conway, en métamorphosant un problème combinatoire discret en une pure équation d'ondes physiques).

#### Références

- |  |   |
|--|---|
| [1] <a href="#">balade.pdf</a> .                                     | [2] <a href="#">carres.pdf</a> .          |
| [3] <a href="#">Goldbach-programme-perl.pdf</a> .                    | [4] <a href="#">mat-quant-d.pdf</a> .     |
| [5] <a href="#">probaquant.pdf</a> .                                 | [6] <a href="#">spherequantique.pdf</a> . |
| [7] Cours de Philippe Grangier : <a href="#">transgrangier.pdf</a> . |   |