Suites arythmiques (Denise Vella-Chemla, 2.1.2017)

On cherche des symétries au sein de l'ensemble des nombres premiers.

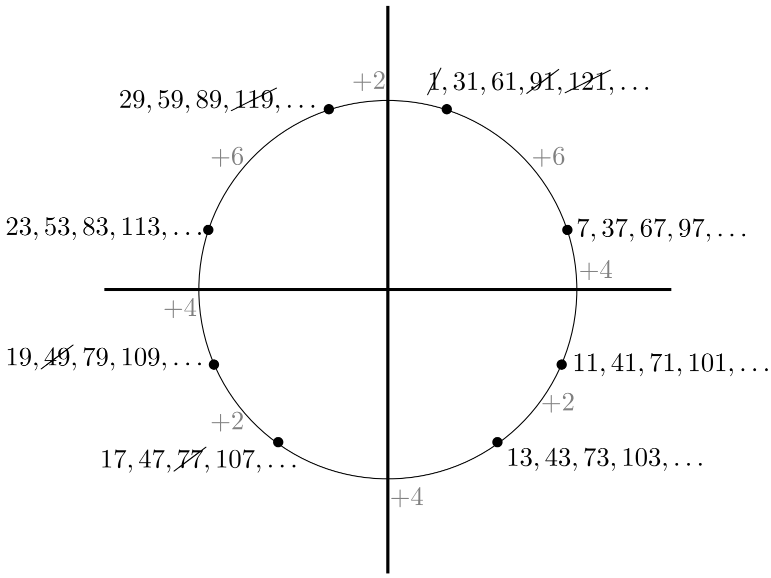
Gauss, dans les Recherches arithmétiques, distinguait les nombres de la forme $4k+1$ de ceux de la forme $4k+3$. On passe des uns aux autres en ajoutant systématiquement 2 et rien ne permet de se situer dans cette suite d'additions successives. D'autres, considérant la divisibilité par 2 et par 3, s'intéressent aux nombres des formes $6k-1$ et $6k+1$, le fait de passer des uns aux autres selon la suite d'additions successives $+2, +4, +2, +4, +2, \ldots$ introduit une petite dissymétrie qui permet de se repérer davantage.

On va s'intéresser ici aux huit suites arithmétiques $30k+1, 30k+7, 30k+11, 30k+13, 30k+17, 30k+19, 30k+23, 30k+29$ auxquelles appartiennent nécessairement les nombres premiers supérieurs à 5. On rappelle la symétrie du groupe des unités à 30 : les $30k+29$ sont des $30k-1$, les $30k+23$ sont des $30k-7$, etc. Si on avait choisi une raison de 60 au lieu de 30, on aurait 16 suites arithmétiques à considérer : $\varphi(30) = 8, \varphi(60) = 16$.

On passe d'un nombre au suivant en répétant indéfiniment la suite de 8 additions :

$$+6,\ +4,\ +2,\ +4,\ +2,\ +4,\ +6,\ +2,$$

C'est ce changement constant de rythme qui justifie l'emploi du terme *arythmiques* dans le titre. Pour visualiser la cyclicité des additions successives, on positionne les nombres sur un cercle ; on voit la symétrie verticale entre les additions en regard.



On obtient les nombres successifs de la suite par multiplication matricielle ainsi :

$$\begin{pmatrix} u_{n+8} \\ u_{n+7} \\ u_{n+6} \\ u_{n+5} \\ u_{n+4} \\ u_{n+3} \\ u_{n+2} \\ u_{n+1} \\ u_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{n+7} \\ u_{n+6} \\ u_{n+5} \\ u_{n+4} \\ u_{n+3} \\ u_{n+2} \\ u_{n+1} \\ u_n \\ u_0 \end{pmatrix}$$

On aimerait cumuler à ce dispositif un autre dispositif qui tirerait à pile ou face (ou plus) les probabilités qu'a chaque nombre d'être premier ou pas mais on ne sait pas le faire (il faudrait pouvoir modéliser que tout nombre à une chance sur p d'être divisible par p premier et $\dfrac{p-1}{p}$ chances de ne pas l'être (pour tout p premier) par des matrices de la forme $\begin{pmatrix} \frac{1}{p} & 0 \\ 0 & \frac{p-1}{p} \end{pmatrix}$ mais on ne voit pas comment agglomérer ces probabilités aux suites arythmiques présentées ci-dessus).

Par la magie des produits tensoriels utilisés en mécanique quantique, cela permettrait peut-être, selon la formule, d'envisager "tous les possibles" et la résolution de l'incertitude permettrait d'un coup d'un seul de savoir quel nombre est premier et quel nombre ne l'est pas.

Notes :
Premiers à 6 : 1,5,7,11,13,17,19,23,25,29,31,35,…,121
(+4,+2)

Premiers à 7 : 1,2,3,4,5,6,8,9,10,11,12,13,15,16,17,…,121
(+1,+1,+1,+1,+1,+2)

Premiers à 15 : 1,2,4,7,8,11,13,14,16,17,19,22,29,…,121
(+1,+2,+3,+1,+3,+2,+1,+2)

Premiers à 21 : 1,2,4,5,8,10,11,13,16,17,19,20,…,121
(+1,+2,+1,+3,+2,+1,+2,+3,+1,+2,+1,+2)

Premiers à 35 : 1,2,3,4,6,8,9,11,12,13,16,17,18,19,22,23,24,26,27,29,31,32,33,34,…,121
(+1,+1,+1,+2,+2,+1,+2,+1,+1,+3,+1,+1,+1,+3,+1,+1,+2,+1,+2,+2,+1,+1,+1,+2)

Intersection : *Premiers à 6=2.3 et premiers à 35=5.7 :* 11,13,17,19,23,29,31,…,121

Chaque nombre x coupe l'ensemble des nombres en 2, les nombres premiers à x et les nombres non-premiers à x.

Les nombres premiers sont premiers à tous les nombres qu'ils ne divisent pas.

Pour aller vers la topologie, voir les graphes étiquetés par des éléments de partitions (compositions) de nombres et voir l'article sur les diagrammes de Venn dessinables.
wikipedia : compositions d'un nombre
Venn symmetry and prime numbers : a seductive proof revisited, S. Wagon, P. Webb, 2008
The search for symmetric Venn diagrams, B. Grünbaum, 1999
Venn Diagrams and Symmetric Chain Decompositions in the Boolean Lattice, J. Briggs, C.E. Killian, C.D. Savage, 2004