## Petite remarque sur les écritures en base, (Denise Vella-Chemla, août 2023).

Dans l'article de Connes et Consani https://arxiv.org/pdf/2208.08339.pdf, sont utilisés (page 8) des polynômes de la forme

$$P(X) = \sum_{j=0}^{k} a_j X^j, \quad a_j \in \{-1, 0, 1\}, \forall j,$$

avec $X = 3$. Il y a une subtilité pour l'addition des polynômes car ajouter deux coefficients égaux à $-1$ ou $+1$ "fait sortir" de l'ensemble des coefficients possibles. Une preuve est fournie de l'isomorphisme entre cet ensemble de polynômes muni de l'addition telle que définie et de la multiplication et l'anneau $\mathbb{Z}$.

Ce qui m'étonne, plus loin, c'est le rôle "spécial" de $\mathbb{F}_3$. Les auteurs écrivent :

> *Conceptually, one sees that the above construction is described by the addition rule of two Witt vectors over* $\mathbb{F}3$. *The number 3 is the only prime for which the Witt vectors with only finitely many non-zero components form an additive subgroup of the Witt ring.*

Cela vient après la proposition page 9 :

> *We obtain the following intriguing conclusion*
>
> Proposition 5.2. *The set of polynomials as in (5.1), under the addition stated in Proposition 5.1, and the unique associated product, forms a ring isomorphic to* $\mathbb{Z}$.

Et cela m'étonne car j'aurais vraiment cru que "ça marchait" pour toute base impaire $b = 2k + 1$ avec les coefficients à prendre dans $[-k, \ldots, -1, 0, 1, \ldots, k]$.

Pour illustrer un peu le propos, la table 1 ci-après donne quelques exemples de la bijection de $\mathbb{Z}$ vers les $n$-uplets de coefficients lorsque les polynômes sont considérés jusqu'au degré 4 pour la base $X = 3$. $(81 = 3^4)$ Les nombres de $-40 = -\dfrac{3^4 - 1}{2}$ à $40 = \dfrac{3^4 - 1}{2}$ sont bien tous couverts. Pour bien voir la symétrie, lire les 3$^{\text{ièmes}}$ et 4$^{\text{ièmes}}$ ensembles de colonnes de bas en haut !

La table 2 illustre la bijection de $\mathbb{Z}$ vers les coefficients des polynômes de degré 2 au plus, jusqu'à $15^2 = 225$ pour la base 15 (un impair composé). On a démarré l'écriture à l'entier relatif $-13$ et jusqu'à 400, histoire de voir entrer 2 en scène en tant que troisième coefficient.

TABLE 1 : écriture en base 3 avec coefficients dans $[-1, 0, 1]$

| $n$ | $3^0$ | $3^1$ | $3^2$ | $3^3$ | $n$ | $3^0$ | $3^1$ | $3^2$ | $3^3$ | $n$ | $3^0$ | $3^1$ | $3^2$ | $3^3$ | $n$ | $3^0$ | $3^1$ | $3^2$ | $3^3$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $-40$ | $-1$ | $-1$ | $-1$ | $-1$ | $-20$ | 1 | $-1$ | 1 | $-1$ | 20 | $-1$ | 1 | $-1$ | 1 | 40 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| $-39$ | 0 | $-1$ | $-1$ | $-1$ | $-19$ | $-1$ | 0 | 1 | $-1$ | 19 | 1 | 0 | $-1$ | 1 | 39 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| $-38$ | 1 | $-1$ | $-1$ | $-1$ | $-18$ | 0 | 0 | 1 | $-1$ | 18 | 0 | 0 | $-1$ | 1 | 38 | $-1$ | 1 | 1 | 1 |
| $-37$ | $-1$ | 0 | $-1$ | $-1$ | $-17$ | 1 | 0 | 1 | $-1$ | 17 | $-1$ | 0 | $-1$ | 1 | 37 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| $-36$ | 0 | 0 | $-1$ | $-1$ | $-16$ | $-1$ | 1 | 1 | $-1$ | 16 | 1 | $-1$ | $-1$ | 1 | 36 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| $-35$ | 1 | 0 | $-1$ | $-1$ | $-15$ | 0 | 1 | 1 | $-1$ | 15 | 0 | $-1$ | $-1$ | 1 | 35 | $-1$ | 0 | 1 | 1 |
| $-34$ | $-1$ | 1 | $-1$ | $-1$ | $-14$ | 1 | 1 | 1 | $-1$ | 14 | $-1$ | $-1$ | $-1$ | 1 | 34 | 1 | $-1$ | 1 | 1 |
| $-33$ | 0 | 1 | $-1$ | $-1$ | $-13$ | $-1$ | $-1$ | $-1$ | 0 | 13 | 1 | 1 | 1 | 0 | 33 | 0 | $-1$ | 1 | 1 |
| $-32$ | 1 | 1 | $-1$ | $-1$ | $-12$ | 0 | $-1$ | $-1$ | 0 | 12 | 0 | 1 | 1 | 0 | 32 | $-1$ | $-1$ | 1 | 1 |
| $-31$ | $-1$ | $-1$ | 0 | $-1$ | $-11$ | 1 | $-1$ | $-1$ | 0 | 11 | $-1$ | 1 | 1 | 0 | 31 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| $-30$ | 0 | $-1$ | 0 | $-1$ | $-10$ | $-1$ | 0 | $-1$ | 0 | 10 | 1 | 0 | 1 | 0 | 30 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| $-29$ | 1 | $-1$ | 0 | $-1$ | $-9$ | 0 | 0 | $-1$ | 0 | 9 | 0 | 0 | 1 | 0 | 29 | $-1$ | 1 | 0 | 1 |
| $-28$ | $-1$ | 0 | 0 | $-1$ | $-8$ | 1 | 0 | $-1$ | 0 | 8 | $-1$ | 0 | 1 | 0 | 28 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| $-27$ | 0 | 0 | 0 | $-1$ | $-7$ | $-1$ | 1 | $-1$ | 0 | 7 | 1 | $-1$ | 1 | 0 | 27 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| $-26$ | 1 | 0 | 0 | $-1$ | $-6$ | 0 | 1 | $-1$ | 0 | 6 | 0 | $-1$ | 1 | 0 | 26 | $-1$ | 0 | 0 | 1 |
| $-25$ | $-1$ | 1 | 0 | $-1$ | $-5$ | 1 | 1 | $-1$ | 0 | 5 | $-1$ | $-1$ | 1 | 0 | 25 | 1 | $-1$ | 0 | 1 |
| $-24$ | 0 | 1 | 0 | $-1$ | $-4$ | $-1$ | $-1$ | 0 | 0 | 4 | 1 | 1 | 0 | 0 | 24 | 0 | $-1$ | 0 | 1 |
| $-23$ | 1 | 1 | 0 | $-1$ | $-3$ | 0 | $-1$ | 0 | 0 | 3 | 0 | 1 | 0 | 0 | 23 | $-1$ | $-1$ | 0 | 1 |
| $-22$ | $-1$ | $-1$ | 1 | $-1$ | $-2$ | 1 | $-1$ | 0 | 0 | 2 | $-1$ | 1 | 0 | 0 | 22 | 1 | 1 | $-1$ | 1 |
| $-21$ | 0 | $-1$ | 1 | $-1$ | $-1$ | $-1$ | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 21 | 0 | 1 | $-1$ | 1 |
| | | | | | | | | | | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | | | | | |

Le programme python à tester[1] :

```
mu = [-1,0,1]
nu = [1,3,9,27]
for k4 in mu:
   for k3 in mu:
      for k2 in mu:
         for k1 in mu:
            print(k1*1+k2*3+k3*9+k4*27,' ',k1, ' ', k2, ' ', k3, ' ', k4)
```

[1]dans google colab, par exemple, ;-).

Table 2 : écriture en base 15 avec coefficients entiers dans $[-7, \ldots, -1, 0, 1, \ldots, 7]$

| $n$ | $15^0$ | $15^1$ | $15^2$ | $n$ | $15^0$ | $15^1$ | $15^2$ | $n$ | $15^0$ | $15^1$ | $15^2$ | $n$ | $15^0$ | $15^1$ | $15^2$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $-13$ | 2 | $-1$ | 0 | 21 | 6 | 1 | 0 | 54 | $-6$ | 4 | 0 | 88 | $-2$ | 6 | 0 |
| $-12$ | 3 | $-1$ | 0 | 22 | 7 | 1 | 0 | 55 | $-5$ | 4 | 0 | 89 | $-1$ | 6 | 0 |
| $-11$ | 4 | $-1$ | 0 | 23 | $-7$ | 2 | 0 | 56 | $-4$ | 4 | 0 | 90 | 0 | 6 | 0 |
| $-10$ | 5 | $-1$ | 0 | 24 | $-6$ | 2 | 0 | 57 | $-3$ | 4 | 0 | 91 | 1 | 6 | 0 |
| $-9$ | 6 | $-1$ | 0 | 25 | $-5$ | 2 | 0 | 58 | $-2$ | 4 | 0 | 92 | 2 | 6 | 0 |
| $-8$ | 7 | $-1$ | 0 | 26 | $-4$ | 2 | 0 | 59 | $-1$ | 4 | 0 | 93 | 3 | 6 | 0 |
| $-7$ | $-7$ | 0 | 0 | 26 | $-4$ | 2 | 0 | 60 | 0 | 4 | 0 | 94 | 4 | 6 | 0 |
| $-6$ | $-6$ | 0 | 0 | 27 | $-3$ | 2 | 0 | 61 | 1 | 4 | 0 | 95 | 5 | 6 | 0 |
| $-5$ | $-5$ | 0 | 0 | 28 | $-2$ | 2 | 0 | 62 | 2 | 4 | 0 | 96 | 6 | 6 | 0 |
| $-4$ | $-4$ | 0 | 0 | 29 | $-1$ | 2 | 0 | 63 | 3 | 4 | 0 | 97 | 7 | 6 | 0 |
| $-3$ | $-3$ | 0 | 0 | 30 | 0 | 2 | 0 | 64 | 4 | 4 | 0 | 98 | $-7$ | 7 | 0 |
| $-2$ | $-2$ | 0 | 0 | 31 | 1 | 2 | 0 | 65 | 5 | 4 | 0 | 99 | $-6$ | 7 | 0 |
| $-1$ | $-1$ | 0 | 0 | 32 | 2 | 2 | 0 | 66 | 6 | 4 | 0 | 100 | $-5$ | 7 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 33 | 3 | 2 | 0 | 67 | 7 | 4 | 0 | | | | |
| 1 | 1 | 0 | 0 | 34 | 4 | 2 | 0 | 68 | $-7$ | 5 | 0 | | | | |
| 2 | 2 | 0 | 0 | 35 | 5 | 2 | 0 | 69 | $-6$ | 5 | 0 | | | | |
| 3 | 3 | 0 | 0 | 36 | 6 | 2 | 0 | 70 | $-5$ | 5 | 0 | | | | |
| 4 | 4 | 0 | 0 | 37 | 7 | 2 | 0 | 71 | $-4$ | 5 | 0 | | | | |
| 5 | 5 | 0 | 0 | 38 | $-7$ | 3 | 0 | 72 | $-3$ | 5 | 0 | | | | |
| 6 | 6 | 0 | 0 | 39 | $-6$ | 3 | 0 | 73 | $-2$ | 5 | 0 | | | | |
| 7 | 7 | 0 | 0 | 40 | $-5$ | 3 | 0 | 74 | $-1$ | 5 | 0 | | | | |
| 8 | $-7$ | 1 | 0 | 41 | $-4$ | 3 | 0 | 75 | 0 | 5 | 0 | | | | |
| 9 | $-6$ | 1 | 0 | 42 | $-3$ | 3 | 0 | 76 | 1 | 5 | 0 | | | | |
| 10 | $-5$ | 1 | 0 | 43 | $-2$ | 3 | 0 | 77 | 2 | 5 | 0 | | | | |
| 11 | $-4$ | 1 | 0 | 44 | $-1$ | 3 | 0 | 78 | 3 | 5 | 0 | | | | |
| 12 | $-3$ | 1 | 0 | 45 | 0 | 3 | 0 | 79 | 4 | 5 | 0 | | | | |
| 13 | $-2$ | 1 | 0 | 46 | 1 | 3 | 0 | 80 | 5 | 5 | 0 | | | | |
| 14 | $-1$ | 1 | 0 | 47 | 2 | 3 | 0 | 81 | 6 | 5 | 0 | | | | |
| 15 | 0 | 1 | 0 | 48 | 3 | 3 | 0 | 82 | 7 | 5 | 0 | | | | |
| 16 | 1 | 1 | 0 | 49 | 4 | 3 | 0 | 83 | $-7$ | 6 | 0 | | | | |
| 17 | 2 | 1 | 0 | 50 | 5 | 3 | 0 | 84 | $-6$ | 6 | 0 | | | | |
| 18 | 3 | 1 | 0 | 51 | 6 | 3 | 0 | 85 | $-5$ | 6 | 0 | | | | |
| 19 | 4 | 1 | 0 | 52 | 7 | 3 | 0 | 86 | $-4$ | 6 | 0 | | | | |
| 20 | 5 | 1 | 0 | 53 | $-7$ | 4 | 0 | 87 | $-3$ | 6 | 0 | | | | |

*Petite remarque personnelle* : je préfère définitivement, même sans aucune démonstration à la clef, l'écriture multi-bases par les restes modulaires que j'avais appelée SNURPF (pour Système de Numération par les Restes dans les Parties Finies de $\mathbb{N}$), ou encore Snur$\infty$ (si on utilise des restes modulaires selon tous les nombres premiers comme bases, dans l'ensemble infini des nombres premiers donc), les restes "tournant" dans les corps premiers, ce système de numérotation ayant également une représentation équivalente merveilleuse dans le langage des matrices $\infty$-dimensionnelles, avec plein de petites rotations sur les diagonales, et une somme de diviseurs d'Euler, qui était infernale à programmer en 2006, et qui s'avère être une bébête élévation d'une matrice à une certaine puissance, bref, un truc d'une simplicité limpide.