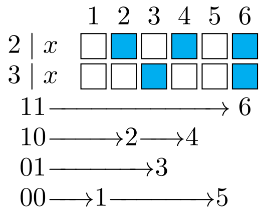
Cantique des nombres premiers (Denise Vella-Chemla, 3/1/2018)

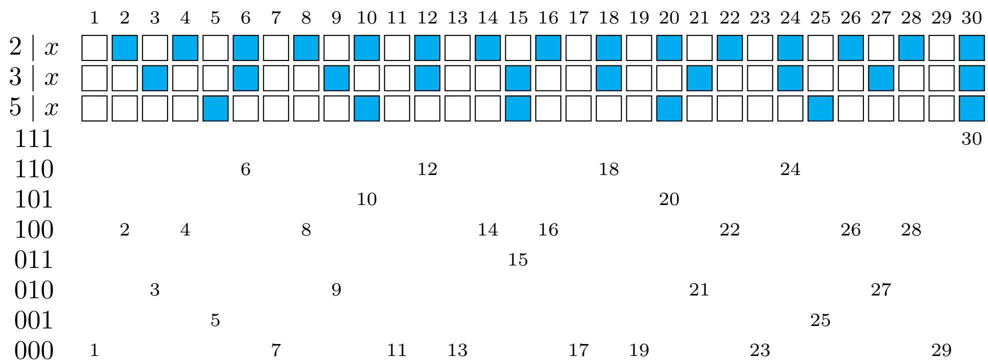
Cette note est l'ébauche d'une tentative d'utiliser le formalisme quantique pour représenter l'espace des nombres premiers.

Commençons par deux images, l'une des nombres de 1 à 6, l'autre des nombres de 1 à 30 et de leurs caractères de divisibilité l'une, par 2 et 3 et l'autre, par 2, 3 et 5.

Divisibilité par 2 ou 3 (ou inclusif) des nombres de 1 à 6



Divisibilité par 2 ou 3 ou 5 des nombres de 1 à 30



On utilise la notation par les kets de Dirac pour représenter les états suivants :

- ⋆ $|\mathbf{0_2}, 1/2\rangle$ représente l'imparité d'un nombre qui a une chance sur deux d'avoir lieu tandis que $|\mathbf{1_2}, 1/2\rangle$ représente la parité d'un nombre qui a aussi une chance sur deux d'avoir lieu ;
- ⋆ $|\mathbf{0_3}, 2/3\rangle$ représente le fait qu'un nombre a deux chances sur 3 de ne pas être divisible par 3 tandis que $|\mathbf{1_3}, 1/3\rangle$ représente le fait qu'un nombre a une chance sur 3 d'être divisible par 3 ;
- ⋆ $|\mathbf{0_5}, 4/5\rangle$ représente le fait qu'un nombre a 4 chances sur 5 de ne pas être divisible par 5 tandis que $|\mathbf{1_5}, 1/5\rangle$ représente le fait qu'un nombre a une chance sur 5 d'être divisible par 5 ;
- ⋆ plus généralement, $|\mathbf{0_p}, (p-1)/p\rangle$ représente le fait qu'un nombre a $p-1$ chances sur p de ne pas être divisible par p tandis que $|\mathbf{1_p}, 1/p\rangle$ représente le fait qu'un nombre a une chance sur p d'être divisible par p.

Faire le produit tensoriel des différents états possibles permet d'obtenir leur probabilité :

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 \\ a_2b_1 & a_2b_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 \\ a_2b_1 & a_2b_2 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} c_1 & c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1b_1c_1 & a_1b_2c_1 & a_1b_1c_2 & a_1b_2c_2 \\ a_2b_1c_1 & a_2b_2c_1 & a_2b_1c_2 & a_2b_2c_2 \end{pmatrix}$$

Pour l'exemple choisi des nombres premiers 2, 3 et 5, on a :

$$\begin{pmatrix} |\mathbf{0_2}, 1/2\rangle & |\mathbf{1_2}, 1/2\rangle \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} |\mathbf{0_3}, 2/3\rangle & |\mathbf{1_3}, 1/3\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |\mathbf{0_2}, 1/2\rangle\, |\mathbf{0_3}, 2/3\rangle & |\mathbf{0_2}, 1/2\rangle\, |\mathbf{1_3}, 1/3\rangle \\ |\mathbf{1_2}, 1/2\rangle\, |\mathbf{0_3}, 2/3\rangle & |\mathbf{1_2}, 1/2\rangle\, |\mathbf{1_3}, 1/3\rangle \end{pmatrix}$$

On peut “réduire le paquet d’onde” en agrégeant les probabilités mais il faut garder l’état intermédiaire à l’esprit qui seul représente la multiplicité d’états possibles.

$$\begin{pmatrix} |\mathbf{0_2 0_3}, 2/6\rangle & |\mathbf{0_2 1_3}, 1/6\rangle \\ |\mathbf{1_2 0_3}, 2/6\rangle & |\mathbf{1_2 1_3}, 1/6\rangle \end{pmatrix}$$

Réutilisons la matrice de probabilité avant réduction et occupons-nous alors de la divisibilité par 5 en effectuant le produit tensoriel :

$$\begin{pmatrix} |\mathbf{0_2}, 1/2\rangle\, |\mathbf{0_3}, 2/3\rangle & |\mathbf{0_2}, 1/2\rangle\, |\mathbf{1_3}, 1/3\rangle \\ |\mathbf{1_2}, 1/2\rangle\, |\mathbf{0_3}, 2/3\rangle & |\mathbf{1_2}, 1/2\rangle\, |\mathbf{1_3}, 1/3\rangle \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} |\mathbf{0_5}, 4/5\rangle & |\mathbf{1_5}, 1/5\rangle \end{pmatrix}$$

$$=$$

$$\begin{pmatrix} |\mathbf{0_2}, 1/2\rangle\, |\mathbf{0_3}, 2/3\rangle\, |\mathbf{0_5}, 4/5\rangle & |\mathbf{0_2}, 1/2\rangle\, |\mathbf{1_3}, 1/3\rangle\, |\mathbf{0_5}, 4/5\rangle & |\mathbf{0_2}, 1/2\rangle\, |\mathbf{0_3}, 2/3\rangle\, |\mathbf{1_5}, 1/5\rangle & |\mathbf{0_2}, 1/2\rangle\, |\mathbf{1_3}, 1/3\rangle\, |\mathbf{1_5}, 1/5\rangle \\ |\mathbf{1_2}, 1/2\rangle\, |\mathbf{0_3}, 2/3\rangle\, |\mathbf{0_5}, 4/5\rangle & |\mathbf{1_2}, 1/2\rangle\, |\mathbf{1_3}, 1/3\rangle\, |\mathbf{0_5}, 4/5\rangle & |\mathbf{1_2}, 1/2\rangle\, |\mathbf{0_3}, 2/3\rangle\, |\mathbf{1_5}, 1/5\rangle & |\mathbf{1_2}, 1/2\rangle\, |\mathbf{1_3}, 1/3\rangle\, |\mathbf{1_5}, 1/5\rangle \end{pmatrix}$$

On multiplie les probabilités de façon à aboutir à la matrice 2×4 suivante :

$$\begin{pmatrix} |\mathbf{0_2 0_3 0_5}, 8/30\rangle & |\mathbf{0_2 0_3 1_5}, 2/30\rangle & |\mathbf{0_2 1_3 0_5}, 4/30\rangle & |\mathbf{0_2 1_3 1_5}, 1/30\rangle \\ |\mathbf{1_2 0_3 0_5}, 8/30\rangle & |\mathbf{1_2 0_3 1_5}, 2/30\rangle & |\mathbf{1_2 1_3 0_5}, 4/30\rangle & |\mathbf{1_2 1_3 1_5}, 1/30\rangle \end{pmatrix}$$

On retrouve les probabilités correspondant aux cardinaux des ensembles de nombres ligne par ligne de la seconde image fournie en introduction[1].

[1] Jusqu’à 5, on avait 1+2+4+8=15 moitié de 30. Avec le nombre premier 7 en plus, la somme de toutes les combinaisons de produits des $p-1$ donne 1+2+4+6+8+12+24+48=105 moitié de 210.