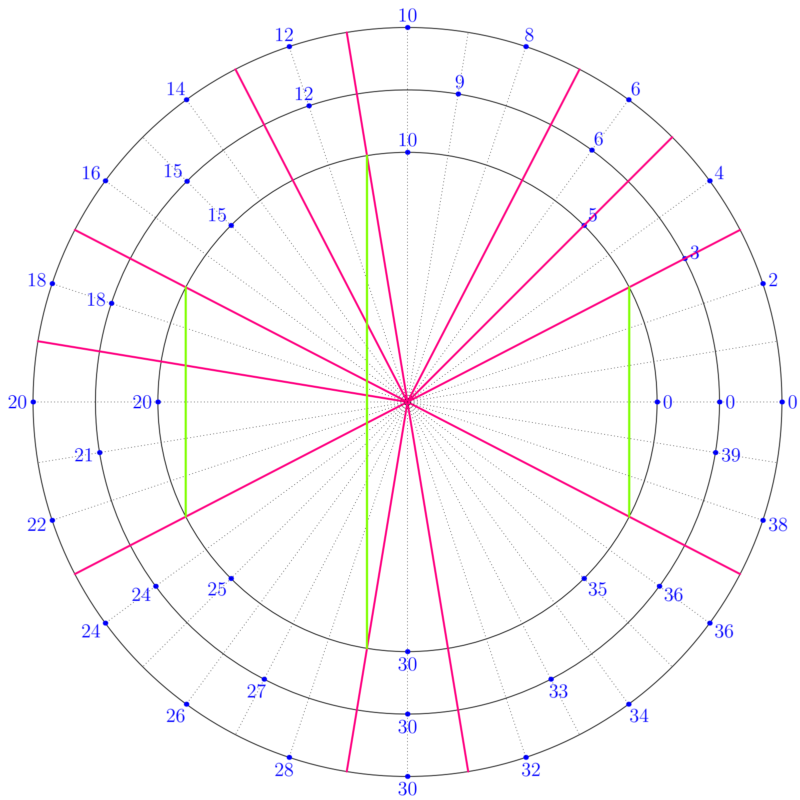
Conjecture de Goldbach et 2-colorations de graphes (Denise Vella-Chemla, 22.01.2021)

On propose ici de modéliser la recherche des décomposants de Goldbach d'un nombre pair par la 2-coloration d'un graphe, un problème classique de la théorie des graphes. Une décomposition de Goldbach d'un nombre pair n est l'écriture de n comme somme de deux nombres premiers p_1+p_2.

On a démontré, dans le fichier [1] (et dans une réécriture légèrement différente [2]) que les décomposants de Goldbach d'un nombre pair n (supérieurs à $\sqrt{n}$) sont les nombres premiers inférieurs à $n/2$ qui ne partagent aucun reste avec ce nombre pair dans toute division euclidienne par les nombres premiers inférieurs à $\sqrt{n}$.

Pour étayer la réflexion, on fournit un exemple graphique, qui montre comment trouver les décomposants de Goldbach du nombre pair 40 qui sont supérieurs à $\sqrt{40}$ (les traits roses ne doivent toucher aucun nombre associé à un plot bleu sur les cercles concentriques, qui gère chacun la divisibilité par 2, 3 et 5 de l'extérieur des cercles vers le centre) et les décomposants de Goldbach doivent être sur deux traits roses symétriques en haut et bas du graphique) :



Il s'agit, comme on le comprend aisément et comme cela a été démontré, d'éliminer les nombres inférieurs à 20 (la moitié de 40) qui sont divisibles par 2, 3 ou 5, car ils ne sont fatalement pas premiers, étant divisibles par un nombre qui leur est strictement inférieur et qui n'est pas 1. Il s'agit également d'éliminer les nombres qui sont congrus à 40 selon l'un des modules premiers en question (i.e. les nombres premiers inférieurs à $\sqrt{n}$), parce que pour eux, du fait de cette congruence à 40, c'est leur complémentaire à 40 qui n'est pas premier (car $x \equiv n \pmod{p} \iff n - x \equiv 0 \pmod{p}$).

Le problème de la visualisation du problème lorsqu'on le modélise par un graphe avec des sommets et des arêtes, c'est que la représentation graphique est très vite illisible dès que le nombre d'arêtes s'élève un peu. On utilisera donc plutôt ici une représentation des arêtes par une matrice d'adjacence, le chiffre 1 dénotant la présence d'une arête entre deux sommets du graphe et le chiffre 0 dénotant l'absence d'une telle arête.

On modélise notre recherche de décomposants de Goldbach de la façon suivante : les sommets du graphe correspondent aux nombres de 1 à 20. Les arêtes du graphe dénotent le fait que deux sommets n'ont pas le droit d'être de la même couleur parce qu'ils ne sont pas congrus, au sens de Gauss, modulo un certain nombre premier, i.e. ils n'ont pas le même reste lorsqu'on effectue une division euclidienne dont ils sont le dividende et dont le nombre premier est le diviseur.

Du fait de ce choix de modélisation, il peut y avoir plusieurs arêtes entre deux mêmes nœuds, par exemple, entre 2 et 40, il y a une arête car 2 et 40 sont incongrus modulo 3, et il y a une autre arête entre 2 et 40 car 2 et 40 sont incongrus modulo 5. Le tableau d'adjacence ci-dessous montre 6 colonnes, chaque paire de colonnes correspondant à un certain module premier, que ce soit pour traiter de la congruence entre le nombre entête de ligne et 0 (à gauche), ou de la congruence entre ce même nombre entête de ligne et $n = 40$ (à droite). Par exemple, dans la première colonne, on voit que 0 étant pair n'a pas le droit d'être de la même couleur que tout nombre impair. Dans la quatrième colonne, on voit que 0 étant divisible par 3 n'a pas le droit d'être de la même couleur que tout nombre qui n'est pas divisible par 3. Enfin, dans la cinqième colonne, on voit que 40, qui a pour reste 1 dans une division par 3, n'a pas le droit d'être de la même couleur que tout nombre qui a un reste autre que 1 (en l'occurrence 0 ou 2, dans une division par 3, c'est ce qu'indique les 1 et par conséquent les 0 de cette cinqième colonne).

Les deux dernières colonnes du tableau agrègent par un et logique les informations des colonnes précédentes "par module". L'avant-dernière colonne agrège par "et logique" les deuxième, quatrième et sixième colonnes, tandis que la dernière colonne du tableau agrège par "et logique" les troisième, cinquième et septième colonne du tableau.

$\not\equiv$	$\pmod 2$ 0	$\pmod 2$ 40	$\pmod 3$ 0	$\pmod 3$ 40	$\pmod 5$ 0	$\pmod 5$ 40	$\wedge$ 0	$\wedge$ 40
1	1	1	1	0	1	1	1	0
2	0	0	1	1	1	1	0	0
3	1	1	0	1	1	1	0	1
4	0	0	1	0	1	1	0	0
5	1	1	1	1	0	0	0	0
6	0	0	0	1	1	1	0	0
7	1	1	1	0	1	1	1	0
8	0	0	1	1	1	1	0	0
9	1	1	0	1	1	1	0	1
10	0	0	1	0	0	0	0	0
11	1	1	1	1	1	1	1	1
12	0	0	0	1	1	1	0	0
13	1	1	1	0	1	1	1	0
14	0	0	1	1	1	1	0	0
15	1	1	0	1	0	0	0	0
16	0	0	1	0	1	1	0	0
17	1	1	1	1	1	1	1	1
18	0	0	0	1	1	1	0	0
19	1	1	1	0	1	1	1	0
20	0	0	1	1	0	0	0	0

Imaginons maintenant que l'on colorie les nombres 0 et 40 d'une même couleur, bleu par exemple, ce qui oblige à colorier de la seconde couleur, rouge par exemple, tous les nombres qui d'une part ne sont divisibles par aucun nombre premier (à cause des contraintes d'adjacence au nombre 0) et d'autre part qui ont leur complémentaire à n qui est premier (à cause des contraintes d'adjacence à $n = 40$).

Comme attendu, si 0 et 40 sont coloriés en bleu, les seuls nombres coloriés en rouge sont 11 et 17, ils ont deux chiffre 1 dans leur avant-dernière et dernière colonne, ce sont bien les seuls décomposants de Goldbach de 40 qui sont supérieurs à $\sqrt{40}$.

Pour démontrer qu'un tel graphe est 2-coloriable, ou est un graphe biparti, quel que soit le nombre pair considéré, il faudrait être capable de démontrer qu'un tel graphe de sommets et d'arêtes respectant les contraintes que l'on a fixées en terme de congruences, ne peut jamais contenir de cycle de longueur impaire.

Références

[1] Timothy Gowers, leçon inaugurale de sa Chaire Combinatoire au Collège de France, 21/1/2021 https://www.college-de-france.fr/site/timothy-gowers/inaugural-lecture-2021-01-21-18h00.htm.

[2] Olivier Cogis, Claudine Robert, Théorie des graphes, au-delà des ponts de Königsberg, édition Vuibert, 2003.