Etude de la Conjecture de Goldbach

Denise Vella-Chemla

13 Juin 2009

1 Introduction

Dans une lettre à Euler du 7 juin 1742, Goldbach énonce *"il semble que tout nombre supérieur à* 2 *soit la somme de trois nombres premiers"*. Euler reformule cette conjecture en une forme équivalente qui est *"tout nombre entier naturel pair supérieur à 2 est la somme de deux nombres premiers"*[1].

Dans cette note est fournie une fonction récursive qui permet d'obtenir une borne inférieure au nombre de décomposants de Goldbach d'un nombre pair donné.

2 Définition d'une fonction récursive

Soit la fonction récursive $f(i,k)$ définie de la façon suivante pour i et k variant de 1 à l'infini.

$$f(4(2k+1)i+2a,k) = \begin{cases} i & \text{si } a = 0 \\ f(4(2k+1)i,k)+1 & \text{si } a = 2k+1 \\ 2.f(4(2k+1)i,k) & \text{si } 1 \leq a < 2k+1 \\ 2.f(4(2k+1)i,k)+1 & \text{si } 2k+1 < a < 4k+2 \end{cases}$$

Pour $k=1$, $f(i,k)$ prend les valeurs suivantes pour i un nombre pair compris entre 24 et 100.

[1]La conjecture ayant été vérifiée par ordinateur jusqu'à des nombres très grands, notre analyse considèrera les nombres pairs supérieurs ou égaux à 24. En référence à un article d'Euler qui nous a été très utile, on aurait pu appeler cette note *"Découverte d'une loi tout extraordinaire des nombres par rapport au nombre de leurs décomposants de Goldbach"*.

$$\begin{array}{llll}
f(24,1)=2 & f(48,1)=4 & f(72,1)=6 & f(96,1)=8 \\
f(26,1)=4 & f(50,1)=8 & f(74,1)=12 & f(98,1)=16 \\
f(28,1)=4 & f(52,1)=8 & f(76,1)=12 & f(100,1)=16 \\
f(30,1)=3 & f(54,1)=5 & f(78,1)=7 & \\
f(32,1)=5 & f(56,1)=9 & f(80,1)=13 & \\
f(34,1)=5 & f(58,1)=9 & f(82,1)=13 & \\
f(36,1)=3 & f(60,1)=5 & f(84,1)=7 & \\
f(38,1)=6 & f(62,1)=10 & f(86,1)=14 & \\
f(40,1)=6 & f(64,1)=10 & f(88,1)=14 & \\
f(42,1)=4 & f(66,1)=5 & f(90,1)=8 & \\
f(44,1)=7 & f(68,1)=11 & f(92,1)=15 & \\
f(46,1)=7 & f(70,1)=11 & f(94,1)=15 &
\end{array}$$

Pour $k=2$, $f(i,k)$ prend les valeurs suivantes pour i un nombre pair compris entre 24 et 100.

$$\begin{array}{lll}
f(24,1)=2 & f(50,1)=3 & f(76,1)=7 \\
f(26,1)=2 & f(52,1)=5 & f(78,1)=7 \\
f(28,1)=2 & f(54,1)=5 & f(80,1)=4 \\
f(30,1)=2 & f(56,1)=5 & f(82,1)=8 \\
f(32,1)=3 & f(58,1)=5 & f(84,1)=8 \\
f(34,1)=3 & f(60,1)=3 & f(86,1)=8 \\
f(36,1)=3 & f(62,1)=6 & f(88,1)=8 \\
f(38,1)=3 & f(64,1)=6 & f(90,1)=5 \\
f(40,1)=2 & f(66,1)=6 & f(92,1)=9 \\
f(42,1)=4 & f(68,1)=6 & f(94,1)=9 \\
f(44,1)=4 & f(70,1)=4 & f(96,1)=9 \\
f(46,1)=4 & f(72,1)=7 & f(98,1)=9 \\
f(48,1)=4 & f(74,1)=7 & f(100,1)=5
\end{array}$$

Les valeurs successives apparaissent dans le même ordre pour tout k. Seul change le nombre d'éléments intermédiaires, qui font reconnaître des motifs de longueur $2(2k+1)$ pour les nombres pairs compris entre $4i(2k+1)$ et $4(i+1)(2k+1)$. Ces motifs sont de la forme suivante :

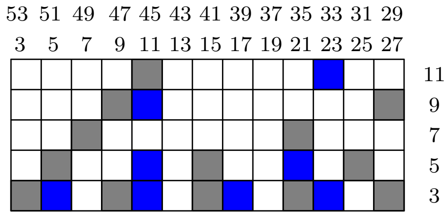
$$n\,\underbrace{2n\ldots 2n}_{2k\ \text{fois}}\,n+1\,\underbrace{2n+1\ldots 2n+1}_{2k\ \text{fois}}$$

Cette fonction est égale à la somme définie ainsi :

$$\sum_{\substack{i\ impair \\ 3\,\leq\, i\,\leq\,\lfloor\frac{x-1}{2}\rfloor}} (2k+1 \mid i) \vee (2k+1 \mid 2x-i)$$

Pour être plus explicite, fournissons un exemple, celui du nombre pair $2x = 56$.
Dans la grille ci-dessous sont représentés les caractères de divisibilité : si le nombre correspondant à la ligne i divise au moins l'un des deux nombres correspondant à la colonne j , la case (i,j) de la grille est colorée.
La colonne 1 correspond aux caractères de divisibilité des nombres 3 et $56-3=53$. La colonne 2 coorespond aux caractères de divisibilité des nombres 5 et

$56-5=51$... La colonne 13 correspond aux caractères de divisibilité des nombres 27 et $56-27=29$.



Le nombre de lignes d'une grille prend toujours la valeur $\lfloor\sqrt{x}\rfloor$. Pour $2x=56$, $\lfloor\sqrt{28}\rfloor=5$

Le nombre de colonnes d'une grille prend toujours la valeur $moiti\acute{e}=\left\lfloor\dfrac{x-1}{2}\right\rfloor$.

Ici, ce nombre est $\left\lfloor\dfrac{28-1}{2}\right\rfloor=13$.

Les colonnes ne contenant aucune case colorée fournissent trivialement les décomposants de Goldbach de 56 les plus grands, puisque ces colonnes correspondent à des nombres qui ne sont divisibles par aucun des nombres impairs compris entre 3 et $2\sqrt{x}+1$, i.e. des nombres premiers.

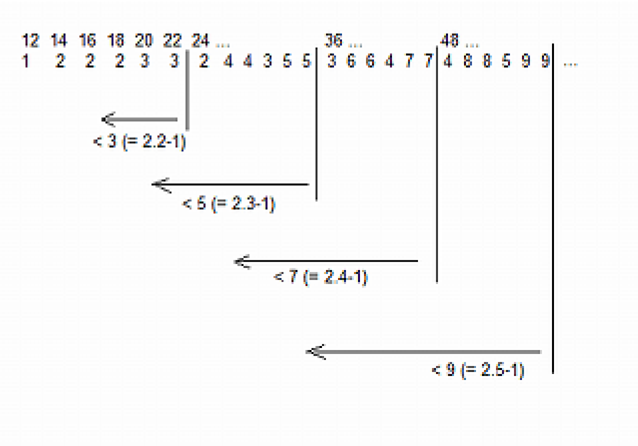
En annexe 1 sont fournies des représentations graphiques des $f(2x,k)$ pour les nombres pairs $2x$ compris entre 24 et 100 et pour k variant de 1 à $\lfloor\sqrt{x}\rfloor$ ainsi que les probabilités de divisibilité que ces nombres représentent.

3 Majoration des valeurs calculées par la fonction f

$2x$ étant fixé, pour tout i compris entre 1 et $\lfloor\sqrt{x}\rfloor$, la valeur de $f(2x,i)$ est majorable ainsi :

$$f(2x,i)\leq 2\left\lceil\frac{2x}{8i+4}\right\rceil-1$$

Cette majoration sera bien visualisée par le dessin suivant :



On appellera $majorant(2x, i)$ le résultat du calcul ci-dessus $2\left\lceil \frac{2x}{8i+4} \right\rceil - 1$.

4 Appliquer le principe d'inclusion/exclusion pour minorer le nombre de décomposants de Goldbach

Selon i, la fonction $majorant$ est une fonction croissante de $2x$.

On va maintenant associer à chaque nombre pair un ensemble de fractions rationnelles que l'on appellera $Probas(2x)$, qui est de cardinal $\lfloor \sqrt{x} \rfloor$, et dont les éléments représentent des probabilités de divisibilité par les nombres impairs successifs.

$$Probas(2x) = \left\{ \frac{majorant(2x, k)}{\lfloor \frac{x-1}{2} \rfloor}, 1 \leq k \leq \lfloor \frac{x-1}{2} \rfloor \right\}.$$

Cela engendre pour les nombres pairs successifs l'obtention d'ensembles de probabilités $Probas(2x)$ qui contiennent des rationnels dont les numérateurs sont dans un ordre lexicographique croissant que nous allons définir maintenant.

$(\mathbb{N}, \leq)$ est un ensemble ordonné.
On pose $\mathbb{N}uplets = \bigcup_{k=0}^{\infty} \mathbb{N}^k$, la réunion de tous les produits cartésiens finis construit sur $\mathbb{N}$ ($\mathbb{N}_0$ contient uniquement le singleton vide).

On définit l'ordre lexicographique sur $\mathbb{N}uplets$ de la façon suivante.

Soient $a = (a_1, \ldots, a_p)$ et $b = (b_1, \ldots, b_q)$ deux éléments quelconques de $\mathbb{N}uplets$, et soit m le plus petit des deux entiers p et q.

$a < b$ si et seulement si
$(\mathrm{a}_1, \ldots, a_m) < (b_1, \ldots, b_m)$ (pour l'ordre lexicographique sur $\mathbb{N}uplets_m$)
ou $(\mathrm{a}_1, \ldots, a_m) = (b_1, \ldots, b_m)$ et $m < q$ (c'est-à-dire $p < q$).

En annexe 1 sont également notés, à droite des représentations graphiques, les ensembles de probabilités $Probas(2x)$ associés aux nombres pairs pour $2x$ compris entre 24 et 100.

Nous allons appliquer la formule du crible[2] à ces ensembles de probabilités pour trouver quelle est la probabilité qu'aucun de ces évènements (qui représentent les caractères de divisibilité par les impairs successifs, et donc la nature d'être composé pour un nombre) n'advienne et nous multiplierons le complémentaire à 1 de cette probabilité par $moiti\acute{e} = \left\lfloor \dfrac{x-1}{2} \right\rfloor$, pour obtenir un nombre minorant le nombre de décomposants de Goldbach de $2x$.

Si les dénominateurs des rationnels intervenant dans la formule du crible étaient tous identiques, l'ordre lexicographique existant sur les n-uplets des numérateurs des fonctions rationnelles intervenant dans le calcul nous permettrait d'obtenir des résultats croissants.
Mais ce n'est pas le cas ici : une fois sur deux, le dénominateur des rationnels est augmenté de 1, ce qui nous fait appliquer la formule sur des nombres de plus en plus petits[3]. Du fait de ce changement des dénominateurs, on ne peut être sûr pour l'instant qu'on va bien avoir un résultat croissant, qui nous permettra au-delà d'un certain nombre pair, d'obtenir toujours au moins un décomposant de Goldbach.

Il faut expliquer maintenant pourquoi l'application de la formule du crible aux ensembles $Probas(2x)$ pour les nombres pairs successifs permet cependant d'obtenir une borne inférieure au nombre de décomposants de Goldbach.
Dans un premier temps, on ne fait que constater qu'à partir du nombre pair 66, cette borne est supérieure ou égale à 1 et ne décroîtra plus jamais à 0.
Il faut expliquer précisément ce constat, en analysant la méthode proposée ici et en trouvant quel est l'écart séparant $Probas(2x)$ de $Probas(2x+2)$.

En analysant les calculs effectués, on comprend que les ensembles de rationnels varient de la manière suivante entre $2x$ et $2x+2$.

Tout d'abord, on a vu qu'on peut ajouter un rationnel de plus à l'ensemble, sous prétexte que $2x+2$ est le double d'un carré d'entier. L'analyse des numérateurs des rationnels obtenus dans un tel cas montre que le dernier rationnel est majorable par $2\left\lceil \frac{2x}{8\lfloor\sqrt{x}\rfloor+4} \right\rceil - 1$.

[2]Cette formule est attribuée à Abraham de Moivre. On lui donne également les noms de formule de Da Silva, formule de Sylvester ou formule de Poincaré.

[3]note : $Card(Probas(2x+2)) = Card(Probas(2x)) + 1$ lorsque $2x+2$ est le double d'un carré, sinon $Card(Probas(2x+2)) = Card(Probas(2x))$

D'autre part, à cause de l'ordre lexicographique croissant existant sur les n-uplets des numérateurs des rationnels, on voit que l'on peut majorer l'augmentation des rationnels lorsqu'on passe de l'ensemble $Probas(2x)$ à l'ensemble $Probas(2x+2)$ par le nombre

$$\frac{2(nombre\ de\ diviseurs\ de\ 2x\ de\ la\ forme\ 8x+4)}{\left\lfloor \frac{x-1}{2} \right\rfloor}.$$

Si l'on appelle poincare(2x) la fonction qui à $2x$ associé le résultat de l'application de la formule du crible à $Probas(2x)$, la formule de récurrence qui correspond à ces résultats s'écrit :

$$poincare(2x+2) < poincare(2x)+2\left\lceil \frac{2x}{8\lfloor\sqrt{x}\rfloor+4} \right\rceil -1+\frac{2(nombre\ de\ diviseurs\ de\ 2x\ de\ la\ forme\ 8x+4)}{\left\lfloor \frac{x-1}{2} \right\rfloor}$$

Le début de la récurrence consiste à fournir la probabilité associée par la formule du crible aux trois nombres rationnels 3/5, 3/5 et 1/5, qui sont les rationnels de l'ensemble $Probas(24)$. Cela nous fournit la valeur 0.872 pour initier les calculs.

$poincare(24) = 0.872.$
$\forall\ 2x\ >\ 24,\ poincare(2x) < 0.872+2\lceil \frac{2x}{8\lfloor\sqrt{x}\rfloor+4} \rceil -1+\frac{2(nombre\ de\ diviseurs\ de\ 2x\ de\ la\ forme\ 8x+4)}{\lfloor \frac{x-1}{2} \rfloor}$

On a ainsi trouvé un minorant au nombre de décomposants de Goldbach d'un nombre pair $2x$ qui est $\left\lfloor \lfloor \frac{x-1}{2} \rfloor (1 - poincare(2x)) \right\rfloor$.

C'est cette seconde majoration qui "coïncide" avec le résultat constaté initialement : à partir de 68, le nombre de décomposants de Goldbach d'un nombre pair donné ne peut jamais être inférieur à 1.

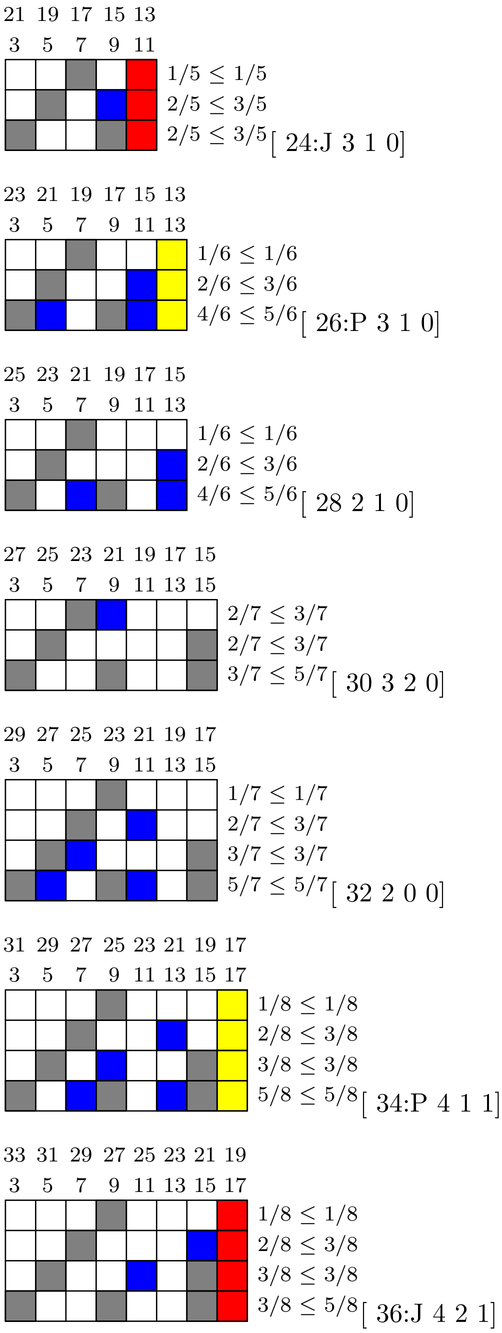
Bibliographie

[1] C.F. Gauss, *Recherches arithmétiques*, Ed. Jacques Gabay, 1801.
[2] L. Euler, *Découverte d'une loi tout extraordinaire des nombres par rapport à la somme de leurs diviseurs*, Commentatio 175 indicis Enestroemiani, Bibliothèque impartiale 3, 1751, p.10-31.
[4] C. Laisant, *Sur un procédé de vérification expérimentale du théorème de Goldbach*, Bulletin de la SMF n°25, p.108, 1/12/1897.
[5] D. Vella-Chemla, Conjecture de Goldbach et résidus minima absolus de Gauss, 20 mai 2009.
[6] D. Vella-Chemla, Conjecture de Goldbach, Conjecture des nombres premiers jumeaux, test de primalité et sinusoïdes, 27 mai 2009.
[7] C.P. Bruter, La construction des nombres, Ed. Ellipses, 2000.

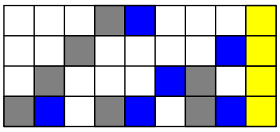
Annexe 1 : Représentation graphique de certains décomposants de Goldbach

Les grilles ci-dessous sont à lire de la manière suivante : pour chaque nombre pair $2x$ compris entre 24 et 100, la colonne i pour i compris entre 1 et $\left\lfloor \dfrac{x-1}{2} \right\rfloor$

correspond à l'un des deux nombres impairs $2i + 1$ et $2x - 2i - 1$. Les lignes quant à elles correspondent aux nombres impairs de 3 (en bas de la grille) à $2\sqrt{x} + 1$ (en haut de la grille). Le fait de colorier une case en noir (resp. en bleu) signifie que le nombre correspondant à la ligne divise celui correspondant à la colonne, celui-ci étant compris entre 3 et x (resp. celui-ci étant compris entre x et $2x$). A droite de chaque grille, on fournit le nombre pair considéré, la lettre P pour signifier que ce nombre est le double d'un nombre premier ou la lettre J pour signifier que ce nombre est le double d'un nombre pair entre deux nombres premiers jumeaux (cela est représenté également par la coloration en jaune ou rouge de la dernière colonne qui ne présente ni case noire, ni case bleue). Puis sont fournis à droite des grilles d'une part les fractions rationnelles représentant pour chaque ligne la proportion de cases colorées en noir ou bleu, rapportée au nombre de colonnes de la grille et d'autre part, la fraction rationnelle majorante. Enfin, à côté du nombre pair, on indique le nombre réel de décompositions de Goldbach de ce nombre, le nombre effectif de colonnes sans cases colorées de la grille, et le nombre de décomposants de Goldbach obtenu par minoration.

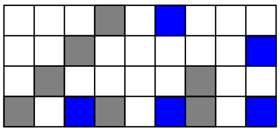

21 19 17 15 13
3 5 7 9 11
1/5 ≤ 1/5
2/5 ≤ 3/5
2/5 ≤ 3/5 [24:J 3 1 0]
23 21 19 17 15 13
3 5 7 9 11 13
1/6 ≤ 1/6
2/6 ≤ 3/6
4/6 ≤ 5/6 [26:P 3 1 0]
25 23 21 19 17 15
3 5 7 9 11 13
1/6 ≤ 1/6
2/6 ≤ 3/6
4/6 ≤ 5/6 [28 2 1 0]
27 25 23 21 19 17 15
3 5 7 9 11 13 15
2/7 ≤ 3/7
2/7 ≤ 3/7
3/7 ≤ 5/7 [30 3 2 0]
29 27 25 23 21 19 17
3 5 7 9 11 13 15
1/7 ≤ 1/7
2/7 ≤ 3/7
3/7 ≤ 3/7
5/7 ≤ 5/7 [32 2 0 0]
31 29 27 25 23 21 19 17
3 5 7 9 11 13 15 17
1/8 ≤ 1/8
2/8 ≤ 3/8
3/8 ≤ 3/8
5/8 ≤ 5/8 [34:P 4 1 1]
33 31 29 27 25 23 21 19
3 5 7 9 11 13 15 17
1/8 ≤ 1/8
2/8 ≤ 3/8
3/8 ≤ 3/8
3/8 ≤ 5/8 [36:J 4 2 1]

35 33 31 29 27 25 23 21 19
3 5 7 9 11 13 15 17 19



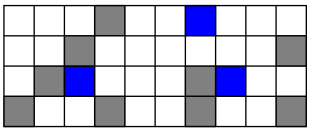
$2/9 \leq 3/9$
$2/9 \leq 3/9$
$3/9 \leq 3/9$
$6/9 \leq 7/9$ [38:P 2 1 0]

37 35 33 31 29 27 25 23 21
3 5 7 9 11 13 15 17 19



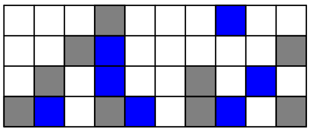
$2/9 \leq 3/9$
$2/9 \leq 3/9$
$2/9 \leq 3/9$
$6/9 \leq 7/9$ [40 3 1 0]

39 37 35 33 31 29 27 25 23 21
3 5 7 9 11 13 15 17 19 21



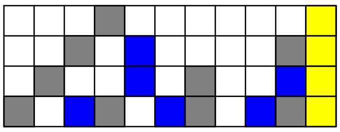
$2/10 \leq 3/10$
$2/10 \leq 3/10$
$4/10 \leq 5/10$
$4/10 \leq 7/10$ [42 4 2 0]

41 39 37 35 33 31 29 27 25 23
3 5 7 9 11 13 15 17 19 21



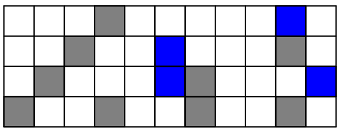
$2/10 \leq 3/10$
$3/10 \leq 3/10$
$4/10 \leq 5/10$
$7/10 \leq 7/10$ [44 3 1 0]

43 41 39 37 35 33 31 29 27 25 23
3 5 7 9 11 13 15 17 19 21 23



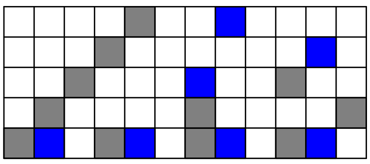
$2/11 \leq 3/11$
$3/11 \leq 3/11$
$4/11 \leq 5/11$
$7/11 \leq 7/11$ [46:P 4 1 1]

45 43 41 39 37 35 33 31 29 27 25
3 5 7 9 11 13 15 17 19 21 23



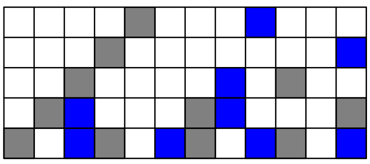
$2/11 \leq 3/11$
$3/11 \leq 3/11$
$4/11 \leq 5/11$
$4/11 \leq 7/11$ [48 5 2 1]

47 45 43 41 39 37 35 33 31 29 27 25
3 5 7 9 11 13 15 17 19 21 23 25



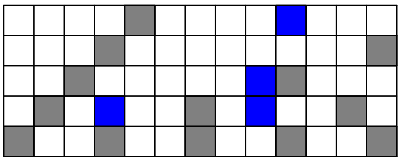
$2/12 \leq 3/12$
$2/12 \leq 3/12$
$3/12 \leq 3/12$
$3/12 \leq 5/12$
$8/12 \leq 9/12$ [50 4 1 0]

49 47 45 43 41 39 37 35 33 31 29 27
3 5 7 9 11 13 15 17 19 21 23 25



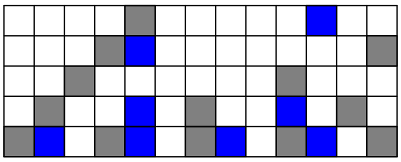
$2/12 \leq 3/12$
$2/12 \leq 3/12$
$3/12 \leq 3/12$
$5/12 \leq 5/12$
$8/12 \leq 9/12$ [52 3 1 0]

51 49 47 45 43 41 39 37 35 33 31 29 27
3 5 7 9 11 13 15 17 19 21 23 25 27



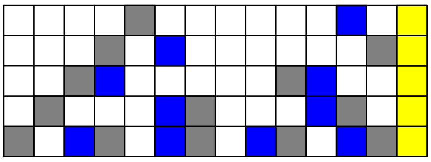
$2/13 \leq 3/13$
$2/13 \leq 3/13$
$3/13 \leq 3/13$
$5/13 \leq 5/13$
$5/13 \leq 9/13$ [54 5 2 1]

53 51 49 47 45 43 41 39 37 35 33 31 29
3 5 7 9 11 13 15 17 19 21 23 25 27



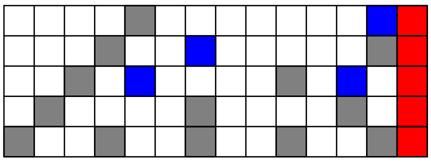
$2/13 \leq 3/13$
$3/13 \leq 3/13$
$2/13 \leq 3/13$
$5/13 \leq 5/13$
$9/13 \leq 9/13$ [56 3 1 1]

55 53 51 49 47 45 43 41 39 37 35 33 31 29
3 5 7 9 11 13 15 17 19 21 23 25 27 29



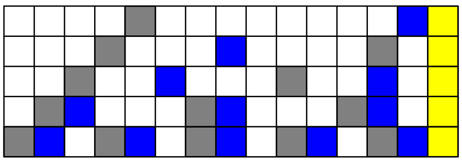
$2/14 \leq 3/14$
$3/14 \leq 3/14$
$4/14 \leq 5/14$
$5/14 \leq 5/14$
$9/14 \leq 9/14$ [58:P 4 1 1]

57 55 53 51 49 47 45 43 41 39 37 35 33 31
3 5 7 9 11 13 15 17 19 21 23 25 27 29



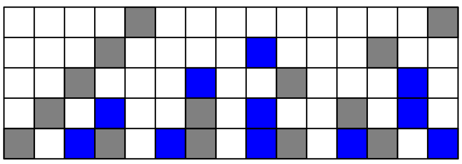
$2/14 \leq 3/14$
$3/14 \leq 3/14$
$4/14 \leq 5/14$
$3/14 \leq 5/14$
$5/14 \leq 9/14$ [60:J 6 3 1]

59 57 55 53 51 49 47 45 43 41 39 37 35 33 31
3 5 7 9 11 13 15 17 19 21 23 25 27 29 31



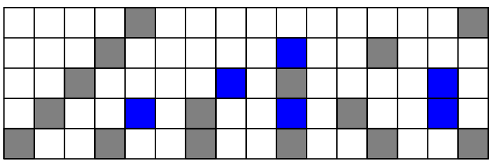
$2/15 \leq 3/15$
$3/15 \leq 3/15$
$4/15 \leq 5/15$
$6/15 \leq 7/15$
$10/15 \leq 11/15$ [62:P 3 1 0]

61 59 57 55 53 51 49 47 45 43 41 39 37 35 33
3 5 7 9 11 13 15 17 19 21 23 25 27 29 31

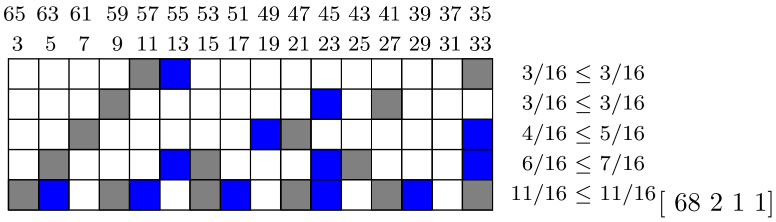


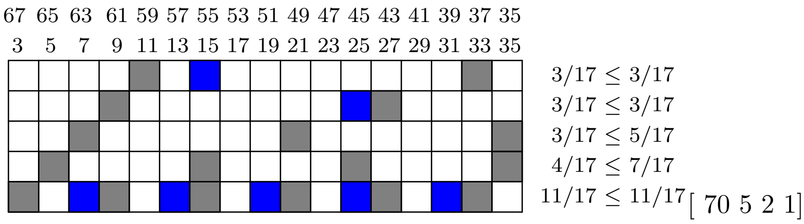
$2/15 \leq 3/15$
$3/15 \leq 3/15$
$4/15 \leq 5/15$
$6/15 \leq 7/15$
$10/15 \leq 11/15$ [64 5 1 0]

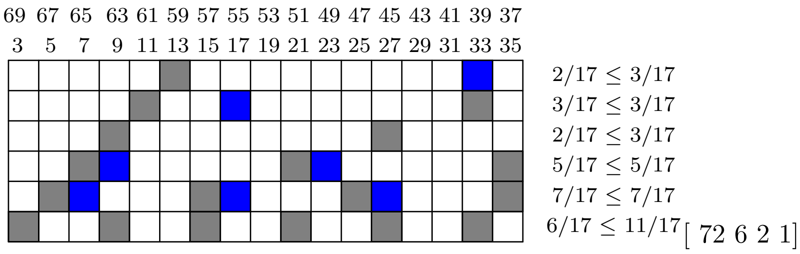
63 61 59 57 55 53 51 49 47 45 43 41 39 37 35 33
3 5 7 9 11 13 15 17 19 21 23 25 27 29 31 33

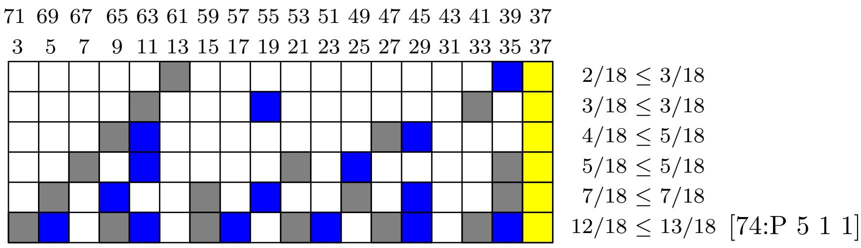


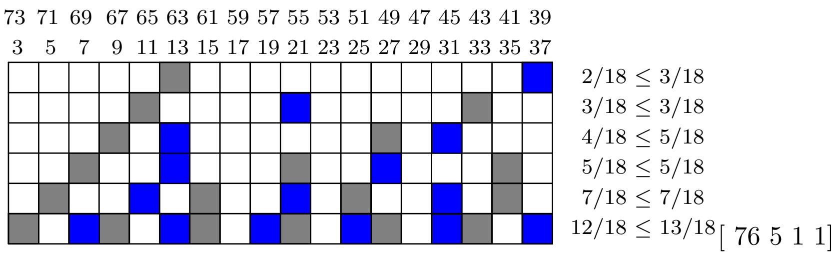
$2/15 \leq 3/15$
$3/15 \leq 3/15$
$4/15 \leq 5/15$
$6/15 \leq 7/15$
$6/15 \leq 11/15$ [66 6 3 1]

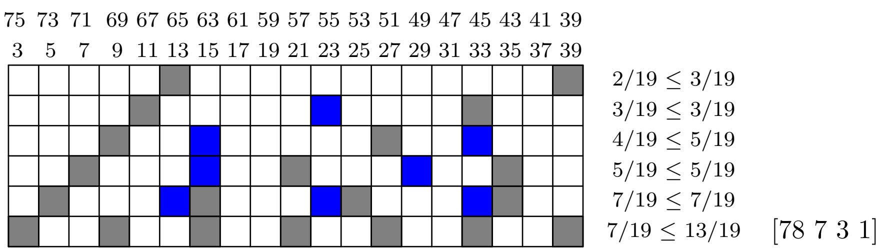

65 63 61 59 57 55 53 51 49 47 45 43 41 39 37 35
3 5 7 9 11 13 15 17 19 21 23 25 27 29 31 33
3/16 ≤ 3/16
3/16 ≤ 3/16
4/16 ≤ 5/16
6/16 ≤ 7/16
11/16 ≤ 11/16
[68 2 1 1]

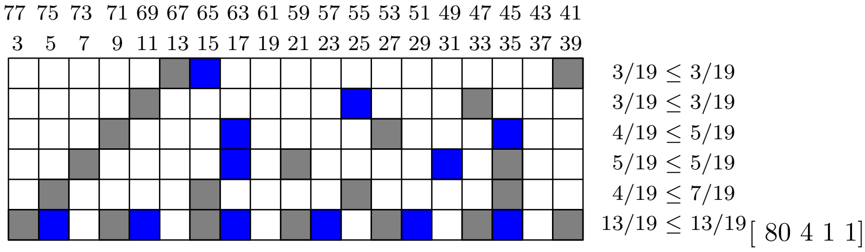

67 65 63 61 59 57 55 53 51 49 47 45 43 41 39 37 35
3 5 7 9 11 13 15 17 19 21 23 25 27 29 31 33 35
3/17 ≤ 3/17
3/17 ≤ 3/17
3/17 ≤ 5/17
4/17 ≤ 7/17
11/17 ≤ 11/17
[70 5 2 1]

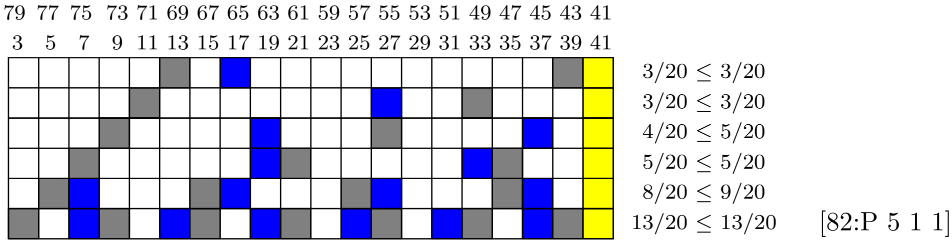

69 67 65 63 61 59 57 55 53 51 49 47 45 43 41 39 37
3 5 7 9 11 13 15 17 19 21 23 25 27 29 31 33 35
2/17 ≤ 3/17
3/17 ≤ 3/17
2/17 ≤ 3/17
5/17 ≤ 5/17
7/17 ≤ 7/17
6/17 ≤ 11/17
[72 6 2 1]

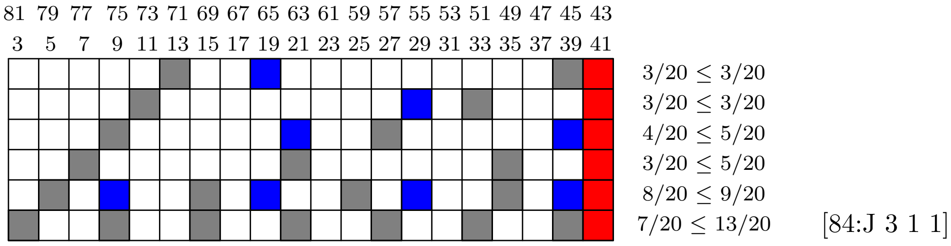

71 69 67 65 63 61 59 57 55 53 51 49 47 45 43 41 39 37
3 5 7 9 11 13 15 17 19 21 23 25 27 29 31 33 35 37
2/18 ≤ 3/18
3/18 ≤ 3/18
4/18 ≤ 5/18
5/18 ≤ 5/18
7/18 ≤ 7/18
12/18 ≤ 13/18
[74:P 5 1 1]

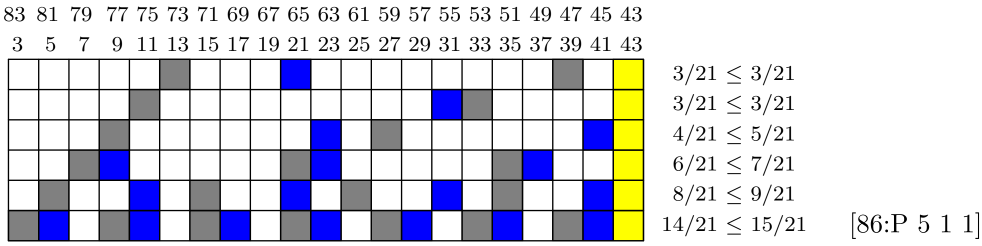

73 71 69 67 65 63 61 59 57 55 53 51 49 47 45 43 41 39
3 5 7 9 11 13 15 17 19 21 23 25 27 29 31 33 35 37
2/18 ≤ 3/18
3/18 ≤ 3/18
4/18 ≤ 5/18
5/18 ≤ 5/18
7/18 ≤ 7/18
12/18 ≤ 13/18
[76 5 1 1]

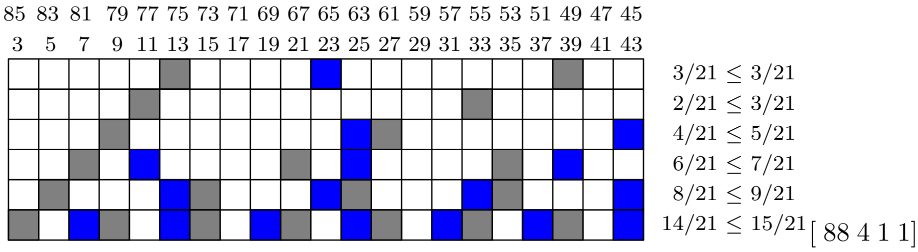

75 73 71 69 67 65 63 61 59 57 55 53 51 49 47 45 43 41 39
3 5 7 9 11 13 15 17 19 21 23 25 27 29 31 33 35 37 39
2/19 ≤ 3/19
3/19 ≤ 3/19
4/19 ≤ 5/19
5/19 ≤ 5/19
7/19 ≤ 7/19
7/19 ≤ 13/19
[78 7 3 1]

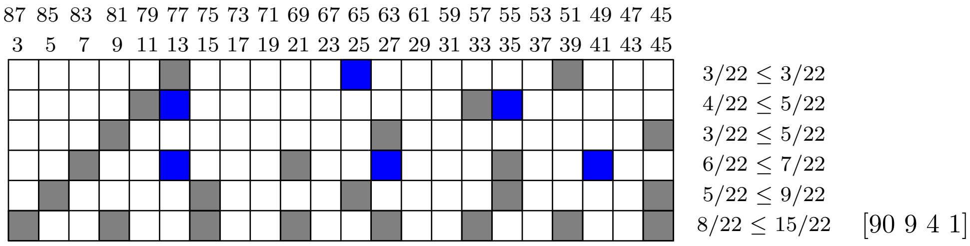

77 75 73 71 69 67 65 63 61 59 57 55 53 51 49 47 45 43 41
3 5 7 9 11 13 15 17 19 21 23 25 27 29 31 33 35 37 39
3/19 ≤ 3/19
3/19 ≤ 3/19
4/19 ≤ 5/19
5/19 ≤ 5/19
4/19 ≤ 7/19
13/19 ≤ 13/19
[80 4 1 1]

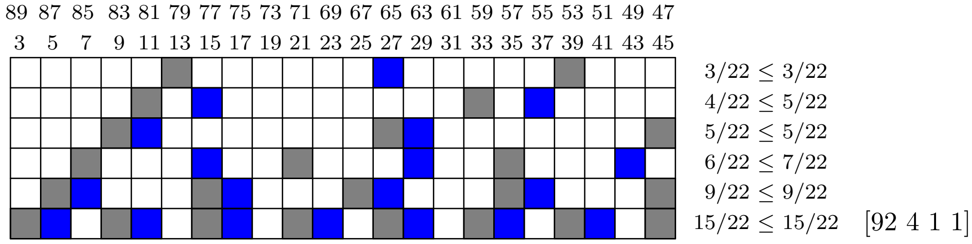

79 77 75 73 71 69 67 65 63 61 59 57 55 53 51 49 47 45 43 41
3 5 7 9 11 13 15 17 19 21 23 25 27 29 31 33 35 37 39 41
3/20 ≤ 3/20
3/20 ≤ 3/20
4/20 ≤ 5/20
5/20 ≤ 5/20
8/20 ≤ 9/20
13/20 ≤ 13/20
[82:P 5 1 1]

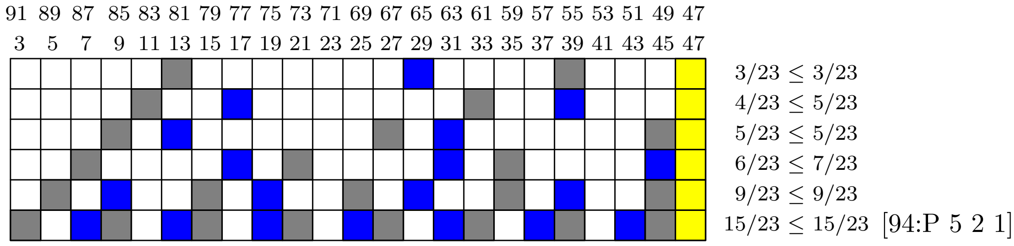

81 79 77 75 73 71 69 67 65 63 61 59 57 55 53 51 49 47 45 43
3 5 7 9 11 13 15 17 19 21 23 25 27 29 31 33 35 37 39 41
3/20 ≤ 3/20
3/20 ≤ 3/20
4/20 ≤ 5/20
3/20 ≤ 5/20
8/20 ≤ 9/20
7/20 ≤ 13/20
[84:J 3 1 1]

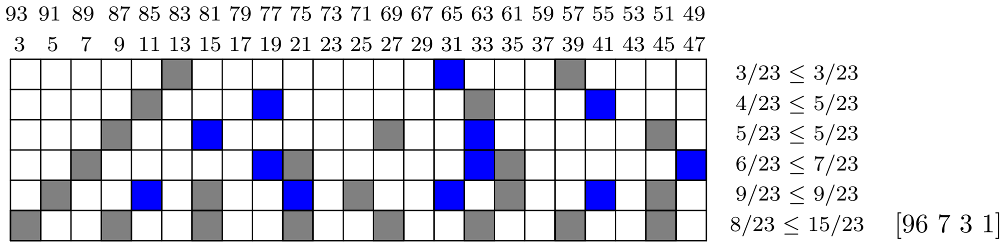

83 81 79 77 75 73 71 69 67 65 63 61 59 57 55 53 51 49 47 45 43
3 5 7 9 11 13 15 17 19 21 23 25 27 29 31 33 35 37 39 41 43
3/21 ≤ 3/21
3/21 ≤ 3/21
4/21 ≤ 5/21
6/21 ≤ 7/21
8/21 ≤ 9/21
14/21 ≤ 15/21
[86:P 5 1 1]

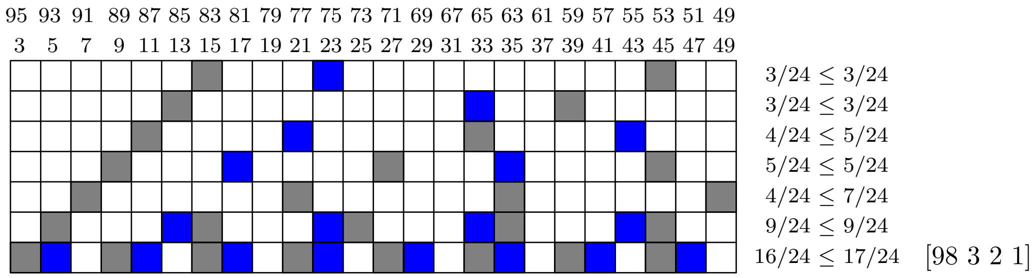

85 83 81 79 77 75 73 71 69 67 65 63 61 59 57 55 53 51 49 47 45
3 5 7 9 11 13 15 17 19 21 23 25 27 29 31 33 35 37 39 41 43
3/21 ≤ 3/21
2/21 ≤ 3/21
4/21 ≤ 5/21
6/21 ≤ 7/21
8/21 ≤ 9/21
14/21 ≤ 15/21
[88 4 1 1]

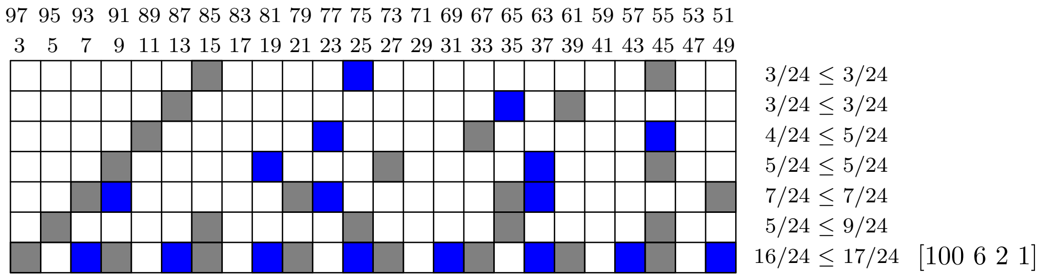

87 85 83 81 79 77 75 73 71 69 67 65 63 61 59 57 55 53 51 49 47 45
3 5 7 9 11 13 15 17 19 21 23 25 27 29 31 33 35 37 39 41 43 45
3/22 ≤ 3/22
4/22 ≤ 5/22
3/22 ≤ 5/22
6/22 ≤ 7/22
5/22 ≤ 9/22
8/22 ≤ 15/22
[90 9 4 1]


89 87 85 83 81 79 77 75 73 71 69 67 65 63 61 59 57 55 53 51 49 47
3 5 7 9 11 13 15 17 19 21 23 25 27 29 31 33 35 37 39 41 43 45
3/22 ≤ 3/22
4/22 ≤ 5/22
5/22 ≤ 5/22
6/22 ≤ 7/22
9/22 ≤ 9/22
15/22 ≤ 15/22
[92 4 1 1]


91 89 87 85 83 81 79 77 75 73 71 69 67 65 63 61 59 57 55 53 51 49 47
3 5 7 9 11 13 15 17 19 21 23 25 27 29 31 33 35 37 39 41 43 45 47
3/23 ≤ 3/23
4/23 ≤ 5/23
5/23 ≤ 5/23
6/23 ≤ 7/23
9/23 ≤ 9/23
15/23 ≤ 15/23
[94:P 5 2 1]


93 91 89 87 85 83 81 79 77 75 73 71 69 67 65 63 61 59 57 55 53 51 49
3 5 7 9 11 13 15 17 19 21 23 25 27 29 31 33 35 37 39 41 43 45 47
3/23 ≤ 3/23
4/23 ≤ 5/23
5/23 ≤ 5/23
6/23 ≤ 7/23
9/23 ≤ 9/23
8/23 ≤ 15/23
[96 7 3 1]


95 93 91 89 87 85 83 81 79 77 75 73 71 69 67 65 63 61 59 57 55 53 51 49
3 5 7 9 11 13 15 17 19 21 23 25 27 29 31 33 35 37 39 41 43 45 47 49
3/24 ≤ 3/24
3/24 ≤ 3/24
4/24 ≤ 5/24
5/24 ≤ 5/24
4/24 ≤ 7/24
9/24 ≤ 9/24
16/24 ≤ 17/24
[98 3 2 1]


97 95 93 91 89 87 85 83 81 79 77 75 73 71 69 67 65 63 61 59 57 55 53 51
3 5 7 9 11 13 15 17 19 21 23 25 27 29 31 33 35 37 39 41 43 45 47 49
3/24 ≤ 3/24
3/24 ≤ 3/24
4/24 ≤ 5/24
5/24 ≤ 5/24
7/24 ≤ 7/24
5/24 ≤ 9/24
16/24 ≤ 17/24
[100 6 2 1]

Note concernant une nouvelle manière de caractériser les nombres premiers : lorsqu'on étudie les numérateurs des fractions affectées à $2x$ et à $2x + 2$ par la fonction que nous avons définie $f(2x, k)$ au début de cette note, si c'est la fonction Identité qui permet de passer de l'ensemble de numérateurs associé à $2x$ à celui associé à $2x+2$, alors $2x$ ou $2x+2$ est le double d'un nombre premier (celui des deux qui est le double d'un impair). Il en est de même si la fonction qui consiste à passer de l'ensemble des numérateurs associés à $2x$ à l'ensemble des numérateurs associés à $2x + 2$ consiste à conserver un certain nombre de numérateurs et à multiplier les autres par 2.

Annexe 2 : Quelques écrits d'Henri Poincaré à propos de la démonstration par récurrence

Ces éléments sont extraits du numéro spécial Pour la Science consacré à Poincaré.
[Le terrain le plus naturel et le plus favorable pour cette étude est l'arithmétique élémentaire, c'est-à-dire les opérations mettant en jeu des nombres entiers. Quand nous analysons les opérations telles que l'addition et la multiplication, nous nous rendons compte qu'un type de raisonnement se retrouve à chaque pas, c'est la démonstration par récurrence... C'est là le raisonnement mathématique par excellence, déclare Poincaré. Sa particularité est qu'il contient, sous une forme condensée, une infinité de syllogismes, et qu'il permet de passer du particulier au général, du fini à l'infini, concept qui apparaît dès les premiers pas de l'arithmétique élémentaire et sans lequel il n'y aurait pas de science parce qu'il n'y aurait rien de général, mais uniquement des énoncés particuliers.
D'où nous vient ce raisonnement par récurrence, s'interroge Poincaré ?
Certainement pas de l'expérience. Celle-ci peut nous suggérer que la règle est vraie pour les dix ou les cent premiers nombres, mais elle est désarmée face à l'infinité de tous les nombres naturels. Le principe de contradiction (on dirait aujourd'hui le raisonnement par l'absurde) est aussi impuissant : il nous permet d'obtenir certaines vérités, mais non d'en enfermer une infinité en une seule formule. Cette règle [le raisonnement par récurrence], inaccessible à la démonstration analytique et à l'expérience, est le véritable type du jugement synthétique a priori, conclut Poincaré. L'irrésistible évidence avec laquelle ce principe s'impose n'est autre que l'affirmation de la puissance de l'esprit qui se sait capable de concevoir la répétition indéfinie d'un même acte dès que cet acte est une fois possible... L'esprit a de cette puissance une intuition directe. L'expérience permet de prendre conscience de cette intuition et d'exploiter sa puissance. Voilà pourquoi, selon Poincaré, l'induction joue un rôle vital en mathématiques : c'est la base de l'un des procédés fondamentaux de démonstration. En physique, on pense que si une expérience a réussi un grand nombre de fois, elle réussira toujours... C'est ce que l'on dénomme l'induction dans les sciences empiriques, et il est vrai que l'induction mathématique lui ressemble... avec toutefois une différence essentielle : le processus d'induction qui s'applique par exemple en physique, est toujours incertain et se fonde sur un élément qui nous est extérieur, sur la croyance à un ordre général de l'Univers. Au contraire, l'induction mathématique, la méthode de démonstration par récurrence, s'impose nécessairement, parce qu'elle n'est que l'affirmation d'une propriété de l'esprit lui-même. Elle ne peut donc pas être considérée comme une convention commode, tel que c'est le cas, en revanche, de certains postulats de la géométrie, conclut Poincaré.

La récurrence, auquel Poincaré ne s'intéressait que pour l'étude des propriétés des nombres, s'est révélée aussi très importante cent ans après en informatique. La notion de fonction récursive, fonction qu'un ordinateur peut calculer, se définit par la récurrence. En informatique, la récurrence est le fondement même du calcul.]