Conjecture de Goldbach et langage à 4 lettres

Denise Vella-Chemla

18/4/14

1 Introduction

La conjecture de Goldbach stipule que tout nombre pair sauf 2 est la somme de deux nombres premiers. Dans la suite, on s'intéresse aux décompositions d'un nombre pair n en somme de deux nombres impairs $p+q$ avec $3 \leqslant p \leqslant n/2$, $n/2 \leqslant q \leqslant n-3$ et $p \leqslant q$. On appelle p un *sommant de premier rang* et q un *sommant de second rang* de n.

Rappel historique

Citons Charles-Ange Laisant dans la note intitulée *Sur un procédé expérimental de vérification de la conjecture de Goldbach* du Bulletin de la SMF n°25 de 1897.

> *Ce fameux théorème empirique : Tout nombre pair est la somme de deux nombres premiers, dont la démonstration semble dépasser les possibilités scientifiques actuelles, a fait l'objet de nombreux travaux et de certaines contestations. Lionnet a tenté d'établir que la proposition devait probablement être inexacte. M. Georg Cantor l'a vérifiée numériquement jusqu'à 1000, en donnant pour chaque nombre pair toutes les décompositions en deux nombres premiers, et il a remarqué que le nombre de ces décompositions ne cesse de croître en moyenne, tout en présentant de grandes irrégularités.*
>
> *Voici un procédé qui permettrait de faire sans calcul la vérification expérimentale dont il s'agit, et d'avoir pour chaque nombre pair, à la seule inspection d'une figure, toutes les décompositions. Supposons que sur une bande formée de carrés accolés, représentant les nombres impairs successifs, on ait construit le crible d'Erathostène, en ombrant les nombres composés, jusqu'à une limite quelconque* $2n-1$.

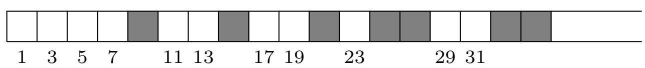

Figure 1

> *Si l'on a construit deux réglettes pareilles, et si l'on place la seconde au-dessous de la première en la retournant et en faisant correspondre la case 1 à* $2n$[*]*, il est évident que si le théorème de Goldbach est vrai pour* $2n$*, il y aura quelque part deux cases blanches en correspondance ; et tous les couples de cases blanches donneront les diverses décompositions. On les aura même en lisant la moitié de la figure, à cause de la symétrie par rapport au milieu. Ainsi la vérification relative au nombre* 28 *donnera la figure 2 et montrera qu'on a les décompositions* $28 = 5+23 = 11+17$.

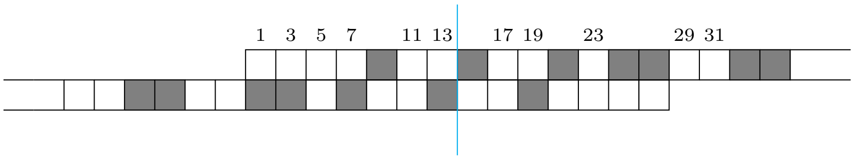

Figure 2

*. Ici devrait être écrit $2n-1$.

On comprend que les réglettes étant construites à l'avance, et un simple glissement permettant de passer d'un nombre à un autre, les vérifications sont très rapides.

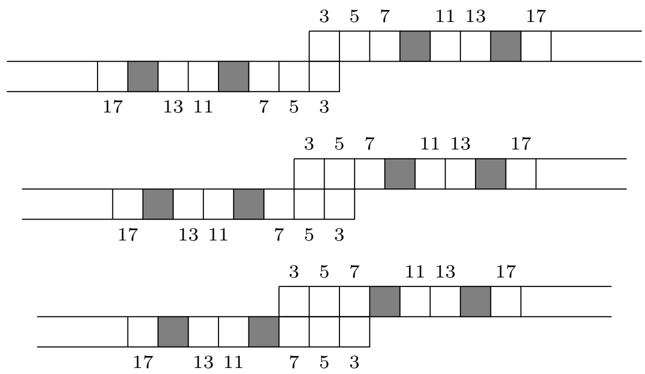

FIGURE 3

Notations :
On notera par :

- a : une décomposition de n de la forme $p+q$ avec p et q premiers ;
- b : une décomposition de n de la forme $p+q$ avec p composé et q premier ;
- c : une décomposition de n de la forme $p+q$ avec p premier et q composé ;
- d : une décomposition de n de la forme $p+q$ avec p et q composés.

Exemple :

40	3	5	7	9	11	13	15	17	19
	37	35	33	31	29	27	25	23	21
l_{40}	a	c	c	b	a	c	d	a	c

2 Le tableau principal

On désigne par $T = (L, C) = (l_{n,m})$ le tableau dont les éléments $l_{n,m}$ sont l'une des lettres a, b, c, d. L'indice n appartient à l'ensemble L des nombres pairs supérieurs ou égaux à 6. L'indice m, appartenant à l'ensemble C des nombres impairs supérieurs ou égaux à 3, est un élément de la liste des sommants de n de premier rang.

Considérons la fonction g définie ainsi :

$$g: \begin{array}{ccc} 2\mathbb{N} & \to & 2\mathbb{N}+1 \\ x & \mapsto & 2\left\lfloor \dfrac{x-2}{4} \right\rfloor + 1 \end{array}$$

$g(6) = 3, g(8) = 3, g(10) = 5, g(12) = 5, g(14) = 7, g(16) = 7, etc.$

La fonction $g(n)$ définit le plus grand des sommants de second rang associés à n.

Comme l'on ne prend en compte que les décompositions de n de la forme $p+q$ où $p \leqslant q$, seules apparaîtront dans le tableau les lettres $l_{n,m}$ telles que $m \leqslant 2\left\lfloor \dfrac{n-2}{4} \right\rfloor + 1$ de sorte que le tableau contient les éléments suivants : $l_{6,3}, l_{8,3}, l_{10,3}, l_{10,5}, l_{12,3}, l_{12,5}, l_{14,3}, l_{14,5}, l_{14,7}, etc.$

Voici le début du tableau.

C / L	3	5	7	9	11	13	15	17
6	a							
8	a							
10	a	a						
12	c	a						
14	a	c	a					
16	a	a	c					
18	c	a	a	d				
20	a	c	a	b				
22	a	a	c	b	a			
24	c	a	a	d	a			
26	a	c	a	b	c	a		
28	c	a	c	b	a	c		
30	c	c	a	d	a	a	d	
32	a	c	c	b	c	a	b	
34	a	a	c	d	a	c	b	a
36	c	a	a	d	c	a	d	a
...								

FIGURE 4 : mots des nombres pairs de 6 à 36

Remarques :

1) les mots situés sur les diagonales du tableau appelés *mots diagonaux* ont leurs lettres soit dans l'alphabet $A_{ab} = \{a, b\}$ soit dans l'alphabet $A_{cd} = \{c, d\}$.

2) un mot diagonal code des décompositions de même sommant de second rang.

Par exemple, sur la Figure 4, les lettres de la diagonale *aaabaa* qui commence à la lettre $l_{26,3} = a$ code les décompositions $3 + 23, 5 + 23, 7 + 23, 9 + 23, 11 + 23$ et $13 + 23$.

3) Désignons par l_n la ligne dont les éléments sont les $l_{n,m}$. La ligne l_n possède $\left\lfloor \dfrac{n-2}{4} \right\rfloor$ éléments.

4) n étant fixé, appelons $C_{n,3}$ la colonne formée des $l_{k,3}$ pour $6 \leqslant k \leqslant n$.

Dans cette colonne $C_{n,3}$, distinguons deux parties, la "partie haute" et la "partie basse" de la colonne.

Notons $H_{n,3}$ la "partie haute" de la colonne, i.e. l'ensemble des $l_{k,3}$ où $6 \leqslant k \leqslant \left\lfloor \dfrac{n+4}{2} \right\rfloor$.

Notons $B_{n,3}$ la "partie basse" de la colonne, i.e. l'ensemble des $l_{k,3}$ où $\left\lfloor \dfrac{n+4}{2} \right\rfloor < k \leqslant n$.

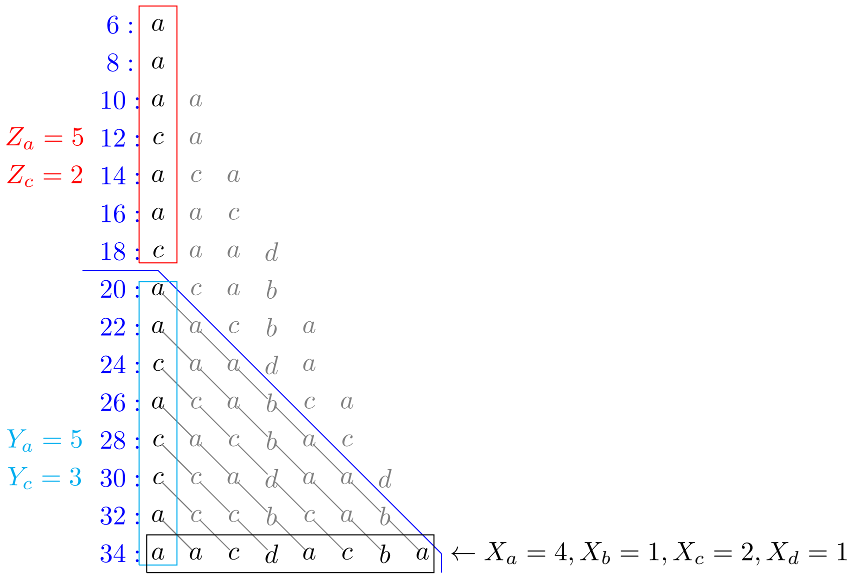

FIGURE 5 : $n = 34$

Pour mieux cerner les dénombrements de la section suivante, on utilisera la projection P de la ligne n sur la partie basse de la première colonne $B_{n,3}$ qui “associe” les lettres aux deux bouts d'une diagonale. Si on considère l'application $proj$ telle que $proj(a) = proj(b) = a$ et $proj(c) = proj(d) = c$ alors, puisque 3 est premier, $proj(l_{n,2k+1}) = l_{n-2k+2,3}$.

3 Dénombrement

1) On note dans la ligne n par :

- $X_a(n)$ le nombre de décompositions de n de la forme *premier* + *premier* ;
- $X_b(n)$ le nombre de décompositions de n de la forme *composé* + *premier* ;
- $X_c(n)$ le nombre de décompositions de n de la forme *premier* + *composé* ;
- $X_d(n)$ le nombre de décompositions de n de la forme *composé* + *composé*.

$X_a(n) + X_b(n) + X_c(n) + X_d(n) = \left\lfloor \frac{n-2}{4} \right\rfloor$ est le nombre d'éléments de la ligne de n.

Exemple : $n = 34$:
$X_a(34) = \#\{3+31, 5+29, 11+23, 17+17\} = 4$
$X_b(34) = \#\{15+19\} = 1$.
$X_c(34) = \#\{7+27, 13+21\} = 2$
$X_d(34) = \#\{9+25\} = 1$

2) Soit $Y_a(n)$ (resp. $Y_c(n)$) le nombre de a (resp. c) qui apparaissent dans $B_{n,3}$. On rappelle qu'il n'y a que des lettres a et c dans la première colonne car elle contient les lettres associées aux décompositions de la forme $3 + x$ et que 3 est premier.

Exemple :

- $Y_a(34) = \#\{3+17, 3+19, 3+23, 3+29, 3+31\} = 5$
- $Y_c(34) = \#\{3+21, 3+25, 3+27\} = 3$

3) Compte-tenu de la projection P qui est une bijection, des définitions des lettres a, b, c, d, $Y_a(n) = X_a(n) + X_b(n)$ et $Y_c(n) = X_c(n) + X_d(n)$. Par suite, trivialement, $Y_a(n) + Y_c(n) = X_a(n) + X_b(n) + X_c(n) + X_d(n) = \left\lfloor \frac{n-2}{4} \right\rfloor$.

Exemple :

$$\begin{aligned}
Y_a(34) &= \#\{3+17, 3+19, 3+23, 3+29, 3+31\} \\
X_a(34) &= \#\{3+31, 5+29, 11+23, 17+17\} \\
X_b(34) &= \#\{15+19\} \\
\\
Y_c(34) &= \#\{3+21, 3+25, 3+27\} \\
X_c(34) &= \#\{7+27, 13+21\} \\
X_d(34) &= \#\{9+25\}
\end{aligned}$$

4) Soit $Z_a(n)$ (resp. $Z_c(n)$) le nombre de a (resp. c) qui apparaissent dans $H_{n,3}$.

Exemple :

- $Z_a(34) = \#\{3+3, 3+5, 3+7, 3+11, 3+13\} = 5$
- $Z_c(34) = \#\{3+9, 3+15\} = 2$

$Z_a(n) + Z_c(n) = \left\lfloor \dfrac{n-4}{4} \right\rfloor$.

5) On a $Z_a(n) + Z_c(n) + Y_a(n) + Y_c(n) = 2(X_a(n) + X_b(n) + X_c(n) + X_d(n)) - \delta$.

δ vaut 1 si n est un double d'impair et 0 sinon.

En effet, on peut faire correspondre à tout élément $l_{n,m}$ deux éléments : $l_{m,3}$ et $l_{n-m,3}$. Cette assertion est à δ près car dans le cas des doubles d'impairs, ce procédé associe à la décomposition $n/2 + n/2$ la décomposition $3 + n/2$ en double, comme cela se voit bien sur le schéma ensembliste suivant :

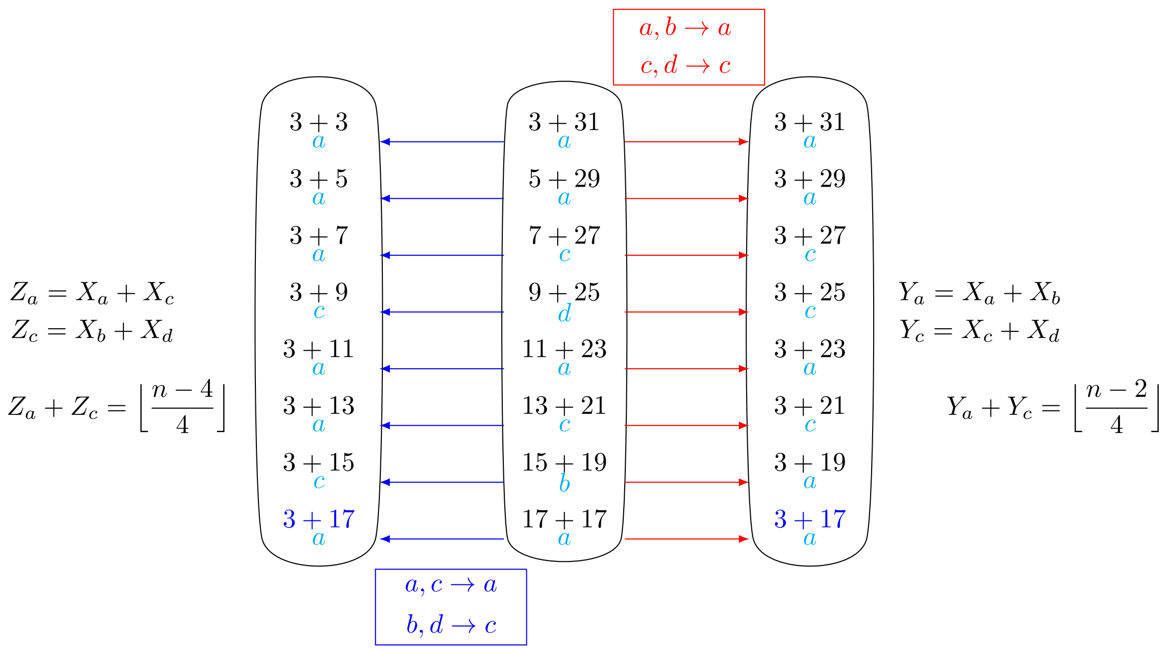

FIGURE 6 : Bijections ensemblistes