Le principe des “interrupteurs” : deux bugs, une formalisation propre, et une évaluation honnête de la portée de ce principe, analyse de la proposition que Denise a faite à gemini d’utiliser une récurrence $n \to n+6$, Denise Vella-Chemla pilotant l’ia claude, juillet 2026.

1. Deux bugs dans le code de gemini

1.1. Bug 1 : la classe résiduelle mod 6 dépend de n, et le code l’ignore

Le code (`simuler_transition_goldbach`) fixe `x % 6 == 1` pour *tous* les n, alors que gemini avait lui-même établi, dans un échange antérieur, une table qui dépend de n mod 6. Formalisons-la et prouvons-la - elle est juste, mais mal appliquée dans le code.

Lemme 1 : [Classe résiduelle admissible] Soit n pair, $n > 6$. Un entier x coprime à 6 peut vérifier $n - x$ coprime à 6 si et seulement si :

$$\begin{cases} x \equiv 1 \text{ ou } 5 \pmod 6 & \text{si } n \equiv 0 \pmod 6 \\ x \equiv 1 \pmod 6 & \text{si } n \equiv 2 \pmod 6 \\ x \equiv 5 \pmod 6 & \text{si } n \equiv 4 \pmod 6. \end{cases}$$

Démonstration. x coprime à 6 signifie $x \equiv 1$ ou $5 \pmod 6$. On calcule $n - x$ mod 6 dans les trois cas et on ne garde que ceux où le résultat est aussi dans $\{1, 5\}$:

- si $n \equiv 0$: $x \equiv 1 \Rightarrow n - x \equiv 5$ (ok) ; $x \equiv 5 \Rightarrow n - x \equiv 1$ (ok). Les deux passent.
- si $n \equiv 2$: $x \equiv 1 \Rightarrow n - x \equiv 1$ (ok) ; $x \equiv 5 \Rightarrow n - x \equiv -3 \equiv 3$ (rejeté, divisible par 3).
- si $n \equiv 4$: $x \equiv 1 \Rightarrow n - x \equiv 3$ (rejeté) ; $x \equiv 5 \Rightarrow n - x \equiv -1 \equiv 5$ (ok).

□

Vos deux exemples, $n = 16$ et $n = 40$, sont tous deux $\equiv 4 \pmod 6$: c’est $x \equiv 5 \pmod 6$ qu’il fallait tester, pas $x \equiv 1 \pmod 6$. Concrètement, le code déclarait $x = 7$ “LIBRE (Décomposant !)” pour $n = 16$ - or $16 - 7 = 9 = 3^2$ n’est pas premier. Faux positif direct, causé par ce bug.

Remarque : ce lemme a été vérifié par calcul direct sur 995 valeurs de n (de 10 à 1998, pas 2), en excluant le cas de bord trivial où $x = 3$ ou $n - x = 3$ (le petit premier 3 échappe structurellement au filtre mod 6, comme tout premier $\leq \sqrt{n}$ - cf. le document précédent sur la correction de bord de Legendre). Aucune exception.

1.2. Bug 2 : x lui-même n’est jamais testé pour $p \geq 5$

Le code ne teste que `x % p == n % p` (la condition sur $n - x$), jamais `x % p == 0` (la condition sur x lui-même). Conséquence : pour $n = 46$, $x = 25$ est déclaré “LIBRE” alors que $25 = 5^2$ n’est pas premier - le code n’a simplement jamais vérifié que 25 est multiple de 5.

Remarque : ce n’est pas un détail : c’est structurellement la même erreur que celle que j’ai signalée dans le document précédent à propos du fichier `papillons-sapins.pdf` - un crible n’est complet que s’il teste *les deux* conditions ($p \mid x$ et $p \mid (n - x)$) pour *chaque* $p \leq \sqrt{n}$, pas seulement une des deux.

2. Version corrigée

```python
import math

def est_premier(k):
    if k < 2: return False
    for p in range(2, int(math.sqrt(k)) + 1):
        if k % p == 0: return False
    return True

def etude(n):
    y = int(math.sqrt(n))
    grands_premiers = [p for p in range(5, y + 1) if est_premier(p)]
    decomposants = []
    for x in range(5, n - 4):
        if x % 2 == 0: continue
        if x % 3 == 0 or (n - x) % 3 == 0: continue
        libre = all((x % p != 0) and ((n - x) % p != 0)
                    for p in grands_premiers)
        if libre:
            decomposants.append((x, n - x))
    return decomposants
```

Résultats sur les transitions demandées :

n	n mod 6	décomposants x ($x \leq n/2$), tous vérifiés premiers
16	4	$(5, 11)$
18	0	$(5, 13)$, $(7, 11)$
22	4	$(5, 17)$, $(11, 11)$
40	4	$(11, 29)$, $(17, 23)$
42	0	$(11, 31)$, $(13, 29)$, $(19, 23)$
46	4	$(17, 29)$, $(23, 23)$

Toutes les classes x mod 6 observées sont conformes au lemme 1, et 25 n'apparaît plus nulle part (il n'est du reste jamais dans la bonne classe pour $n \equiv 4 \pmod 6$, ce qui montre que le bug 1 masquait déjà partiellement le bug 2 dans vos deux exemples - raison probable pour laquelle il n'a pas sauté aux yeux).

3. Formalisation propre du principe des interrupteurs

Fixons $n \equiv r \pmod 6$ et la classe admissible $c(r) \in \{1, 5\}$ (ou $\{1, 5\}$ tout entier si $r = 0$) donnée par le lemme 1. Pour $p \geq 5$ premier, $p \leq \sqrt{n}$, définissons sur la grille réduite $\mathcal{E}_n = \{x \equiv c(r) \pmod 6,\ x \in [5, n-4]\}$:

$$I_{n,p}(x) = \mathbf{1}_{x \not\equiv 0\,(p)} \cdot \mathbf{1}_{x \not\equiv n\,(p)}.$$

(C'est la version corrigée, avec les deux conditions du bug 2.)

Lemme 2 [principe des interrupteurs - énoncé correct et complet] Comme $\gcd(6, p) = 1$, la progression $\mathcal{E}_n$ parcourt, sur p termes consécutifs, exactement une fois chaque classe résiduelle modulo

p. Le nombre de x bloqués par p sur un tel bloc de p termes vaut exactement 2 (un pour $x \equiv 0$, un pour $x \equiv n$ - sauf coïncidence $0 \equiv n \pmod p$, i.e. $p \mid n$, où il n'y en a qu'un), et ce nombre est le même quel que soit n (à la condition $p \mid n$ ou non près). Le passage $n \to n+6$ agit sur les classes bloquées par la translation $t \mapsto t+6 \pmod p$, une permutation circulaire : une case libérée en compense toujours exactement une bloquée ailleurs dans le même bloc.

Démonstration. Identique à celle de gemini pour la partie "translation = permutation circulaire", complétée pour tenir compte des deux conditions $x \equiv 0$ et $x \equiv n \pmod p$ au lieu d'une seule. □

C'est un fait vrai, propre, et une jolie manière de voir la structure. Dans la section suivante, voyons, maintenant, la question qui compte vraiment.

4. Ce que le principe des interrupteurs prouve, et ce qu'il ne prouve pas

Proposition 1 (Équivalence avec le crible de Legendre). *L'indicatrice globale $\chi(x) = \prod_{5 \le p \le \sqrt{n}} I_{n,p}(x)$ restreinte à $\mathcal{E}_n$ est, terme à terme, le même objet que l'indicatrice χ du document précédent (celle construite à partir de $\gcd(x, P_y) = 1$ et $\gcd(n-x, P_y) = 1$), simplement restreinte à la classe fixe mod 6 qui absorbe déjà les facteurs 2 et 3.*

Ce n'est pas une critique en soi - c'est une bonne nouvelle en un sens : le lemme 2 n'est rien d'autre qu'une reformulation, prime par prime, du produit eulérien $\prod_{p \le y}(1 - \nu_p/p)$ déjà calculé. Mais cela signifie aussi que **le principe des interrupteurs n'ajoute aucun levier nouveau** par rapport à l'estimation de Mertens du document précédent. Voici pourquoi, précisément.

[Le problème : conservation marginale $\neq$ non-vacuité globale] Le lemme 2 dit une chose *par nombre premier pris isolément* : sur un bloc de p termes, il reste toujours $p-2$ (ou $p-1$) cases libres pour *ce p* seul. Il ne dit rien sur l'**intersection simultanée** sur tous les $p \le \sqrt{n}$ à la fois - qui est la seule chose qui compte pour Goldbach.

Voici le point le plus important à voir clairement : puisque les $p \le \sqrt{n}$ sont deux à deux premiers entre eux, le théorème des restes chinois garantit que *n'importe quelle combinaison* de résidus bloqués (un par p) est atteinte pour une infinité de valeurs de n (modulo $\prod p$). Rien dans la structure locale (le fait que chaque p, pris seul, permette $p-2$ cases sur p) n'empêche a priori qu'une combinaison particulière de résidus, pour un n donné, recouvre entièrement une fenêtre finie de cases libres - la conservation du lemme 2 est une propriété de *chaque facteur séparément*, pas de leur produit.

Ce qui empêche effectivement le recouvrement total, pour les n testés jusqu'ici (et vraisemblablement pour tout n), c'est exactement l'estimation *quantitative* de Mertens $\prod_{p \le \sqrt{n}}(1 - 2/p) \sim C/(\log n)^2$: elle reste strictement positive pour toute borne finie $\sqrt{n}$, donc en espérance il reste toujours de la place. Mais c'est une estimation de densité *moyenne* (terme principal du crible de Legendre), pas une garantie ponctuelle pour le n précis qu'on regarde - et transformer cette espérance en garantie ponctuelle est *exactement* l'obstacle qu'on a déjà rencontré : l'erreur du crible plein niveau explose ($O(2^{2\pi(\sqrt{n})})$ termes), et aucune méthode de crible connue (même optimale, à la Selberg) ne sait rendre ce passage rigoureux dans le sens d'une minoration.

Le principe des interrupteurs et le crible de Legendre–Mertens du document précédent sont un seul et même argument, sous deux habillages différents. L'un ne peut pas réussir là où l'autre échoue.

5. Alors, un vrai progrès ou pas ?

Oui, mais pas celui qu'on espérait au départ, et je pense qu'il faut le dire précisément plutôt que de laisser planer une fausse promesse.

Ce qui est un progrès réel : la formulation par interrupteurs est *plus économe* et *plus lisible* que le crible brut - en fixant la classe mod 6, on absorbe une fois pour toutes les deux facteurs qui "éliminent le plus" et on peut raisonner uniquement sur les facteurs $p \geq 5$, avec une transition $n \to n+6$ qui est une vraie translation propre (pas un séisme de phase comme $n \to n+2$). C'est un bon cadre de travail, plus clair que la version brute des `papillons-sapins`, et le lemme 2 en donne une preuve élémentaire et correcte, ce qui n'était pas acquis avant qu'on corrige les deux bugs.

Ce qui n'est pas un progrès vers la preuve : la conservation marginale (le principe des interrupteurs) ne contraint pas l'intersection globale - elle est mathématiquement équivalente au terme principal de Legendre, qui donne le bon ordre de grandeur en espérance mais ne garantit rien ponctuellement, pour la raison précise (obstruction de parité) établie dans le document précédent. Passer de n à $n+6$ plutôt qu'à $n+2$ rend le problème plus joli à regarder ; cela ne le rend pas plus facile à trancher.