

Compter les trous : H^0 , H^1 , H^2 et leur rôle dans l'article d'Alain Connes *Trace formula on the adèle class space and Weil positivity* (1997)
Denise Vella-Chemla pilotant l'ia mistral

Texte intégralement rédigée par l'ia mistral en réponse aux questions que je lui pose.

1. L'idée en une phrase

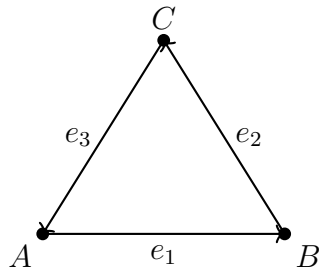
Les points, arêtes et faces d'une figure sont ses *cellules*. On les compte, mais ce comptage dépend de la façon dont on découpe la figure. La cohomologie est ce qui reste *quand on a fait le bilan* : elle compte les trous, et ce nombre ne dépend plus du découpage.

- H^0 = nombre de morceaux connexes ;
- H^1 = nombre de trous en forme de boucle ;
- H^2 = nombre de cavités (creux fermés).

(Pour les dimensions, on peut calculer avec l'homologie ou la cohomologie, on obtient les mêmes nombres ; je calcule ci-dessous avec les bords, c'est le plus concret.)

2. Un exemple complet : le triangle vide

Trois points A, B, C , trois arêtes $e_1 = AB$, $e_2 = BC$, $e_3 = CA$, aucune face. C'est un cercle découpé en trois arêtes.



Les espaces de cellules. $C_0 = \mathbb{R}^3$ (combinaisons de A, B, C), $C_1 = \mathbb{R}^3$ (combinaisons de e_1, e_2, e_3), $C_2 = 0$.

L'application bord. Le bord d'une arête est (arrivée) – (départ) :

$$\partial e_1 = B - A, \quad \partial e_2 = C - B, \quad \partial e_3 = A - C.$$

La somme des trois vaut 0 : le bord de $e_1 + e_2 + e_3$ est nul. Cette combinaison est la *boucle* qui fait le tour du triangle.

Le bilan.

- $\partial : C_1 \rightarrow C_0$ est de rang 2 (le noyau est engendré par $e_1 + e_2 + e_3$, de dimension 1).
- $H^0 : \dim C_0 - \text{rang } \partial = 3 - 2 = 1$. Un seul morceau.
- $H^1 : \dim \ker \partial - \text{rang}(\partial_2) = 1 - 0 = 1$. Une boucle qui n'est le bord d'aucune face.
- $H^2 = 0$.

Formule d'Euler.

$$\underbrace{3}_{\text{points}} - \underbrace{3}_{\text{arêtes}} + \underbrace{0}_{\text{faces}} = 0 = \underbrace{1}_{H^0} - \underbrace{1}_{H^1} + \underbrace{0}_{H^2}.$$

Le comptage des cellules et le comptage des trous donnent le même nombre, avec l'alternance de signes $+ - +$. C'est cette alternance qui compte pour la suite.

On remplit le triangle. On ajoute une face $F : C_2 = \mathbb{R}$, et $\partial F = e_1 + e_2 + e_3$. Alors la boucle est devenue un bord, donc $H^1 = 1 - 1 = 0$: le trou a disparu. On obtient un disque plein : $3 - 3 + 1 = 1 = 1 - 0 + 0$.

3. Deux autres exemples

figure	H^0	H^1	H^2	$H^0 - H^1 + H^2$
point	1	0	0	1
cercle (ou triangle vide)	1	1	0	0
disque plein	1	0	0	1
sphère (surface d'un ballon)	1	0	1	2
tore (surface d'une bouée)	1	2	1	0

Pour le tore, les deux boucles de H^1 sont : tourner autour de la chambre à air en passant dans le trou et remontant, et faire le tour de la chambre à air sans traverser le trou.

4. La formule de Lefschetz : compter les points fixes

Soit φ une transformation de la figure (une rotation, une symétrie...).

Elle agit sur H^0 , H^1 , H^2 , et on peut calculer sa trace sur chacun.

$$\#\{\text{points fixes de } \varphi\} = \text{Tr}(\varphi|H^0) - \text{Tr}(\varphi|H^1) + \text{Tr}(\varphi|H^2)$$

(avec les hypothèses de transversalité, et en comptant les points fixes avec leur multiplicité). C'est la même alternance de signes que pour Euler : Euler est le cas $\varphi = \text{id}$, où la trace sur H^i est la dimension.

Exemple 1 [Rotation du cercle] : une rotation d'angle $\neq 0$ n'a aucun point fixe. Sur H^0 et H^1 elle agit par l'identité : $1 - 1 = 0$. ✓

Exemple 2 [Symétrie du cercle par rapport à un axe] : elle a 2 points fixes. Sur H^0 : +1. Sur H^1 elle renverse le sens de la boucle : trace -1 . Donc $1 - (-1) = 2$. ✓

Exemple 1 [Rotation de la sphère] : elle fixe les deux pôles. $\text{Tr}|H^0 = 1$, $\text{Tr}|H^1 = 0$, $\text{Tr}|H^2 = 1$: $1 - 0 + 1 = 2$. ✓

5. Le modèle de Weil : les courbes sur un corps fini

Pour une courbe C définie sur $\mathbb{F}_q$, l'application φ est le *Frobenius*. Ses points fixes sont les points de la courbe à coordonnées dans $\mathbb{F}_q$. La formule de Lefschetz s'écrit

$$\#C(\mathbb{F}_q) = 1 - \text{Tr}(\text{Frob} | H^1) + q,$$

car le Frobenius agit par 1 sur H^0 et par q sur H^2 . Les valeurs propres du Frobenius sur H^1 sont exactement les zéros et pôles de la fonction zêta de la courbe. Weil a démontré l'hypothèse de Riemann dans ce cas : ces valeurs propres ont un module précis. Les zéros se trouvent dans H^1 , avec un signe moins.

Voilà le dictionnaire du début de l'article de Connes (p. 6) :

Géométrie algébrique	Théorie des fonctions
valeurs propres du Frobenius sur H^*	zéros et pôles de ζ
dualité de Poincaré	équation fonctionnelle
formule de Lefschetz pour le Frobenius	formules explicites
positivité de Castelnuovo	hypothèse de Riemann

6. Ce que fait Connes pour $\mathbb{Q}$: où sont H^0, H^1, H^2 ?

Pour $\mathbb{Q}$, il n'y a pas de courbe, donc pas de H^1 tout fait. Connes *cherche à fabriquer* un espace qui joue le rôle de H^1 . **Il n'y a pas de simplexe dans l'article** : la figure est remplacée par l'espace des classes d'adèles $X = A/k^*$, qui est un quotient très singulier. Voici la correspondance, avec les numéros d'équations de l'article.

6.1. La suite exacte (Introduction, éq. (5), p. 7 ; section V, éq. (24), p. 33)

$$0 \longrightarrow \mathcal{H}_0 \xrightarrow{T} \mathcal{H}_1 \longrightarrow \mathcal{H} \longrightarrow 0.$$

- L'espace $\mathcal{H}$ (le *conoyau* de T , c'est-à-dire $\mathcal{H}_1/\text{Im } T$) est le **substitut de H^1** : c'est lui qui doit porter les zéros de zêta comme spectre d'un opérateur (c'est l'idée de Pólya–Hilbert).
- $\mathcal{H}_1 = L^2(C_k)$: fonctions sur le groupe des classes d'idèles.

- $\mathcal{H}_0$: fonctions f sur X qui vérifient les deux conditions

$$f(0) = 0, \quad \int f \, dx = 0 \quad (\text{éq. (6) p. 7, (25) p. 34}).$$

On retire de l'espace entier une “part de dimension 2” ; c'est la *codimension 2*.

- T : restriction de X à C_k , multipliée par $|a|^{1/2}$ (éq. (7), p. 7).

6.2. Où sont H^0 et H^2 ?

Les deux conditions $f(0) = 0$ et $\int f = 0$ sont les deux “bouts” de la formule d'Euler. Elles correspondent à H^0 et H^2 : ce sont les deux dimensions que l'on retire pour que ce qui reste soit exactement H^1 . Connes le dit lui-même (éq. (35)–(36), p. 35, et (49)–(50), p. 38) : le supplément de dimension 2 de $\mathcal{S}(A)_0$ dans $\mathcal{S}(A)$ est $\mathbb{C} \oplus \mathbb{C}(1)$, où $\mathbb{C}$ est le module trivial (valeur en 0, côté H^0) et $\mathbb{C}(1)$ la *torsion de Tate* (l'intégrale, côté H^2 , d'où le facteur $|j|$ de l'éq. (36)). L'opération $*$ (la transformée de Fourier) échange ces deux modules, exactement comme l'étoile de Hodge échange H^0 et H^2 sur une surface.

6.3. Le modèle concret que Connes lui-même donne (éq. (24)–(26), p. 33 ; éq. (41), p. 37) : le complexe d'Euler d'une surface de Riemann

C'est l'exemple à garder en tête. Sur une surface de Riemann compacte :

- $\mathcal{H}_0$ = formes différentielles de degré *pair* (fonctions et 2-formes), *orthogonales aux formes harmoniques* ;
- $\mathcal{H}_1$ = 1-formes ;
- $T = d + d^*$ (la différentielle plus son adjointe) ;
- $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 / \text{Im } T$ = les 1-formes harmoniques, qui s'identifient (théorème de Hodge) à H^1 .

Exemple 4 [Le tore] : formes harmoniques : 1 (en degré 0), dx , dy (en degré 1), $dx \wedge dy$ (en degré 2). Dimensions 1, 2, 1, soit H^0, H^1, H^2 du tableau plus haut. En retirant les formes harmoniques de degré pair (1 et $dx \wedge dy$) on obtient $\mathcal{H}_0$, et le conoyau de T est l'espace de dimension 2 engendré par dx, dy : c'est H^1 .

La dualité de Poincaré est donnée par l'étoile de Hodge, que Connes remplace par la transformée de Fourier F (éq. (14), p. 9 ; (42), p. 37).

6.4. Le signe moins

La formule de Lefschetz $\text{Tr}|H^0 - \text{Tr}|H^1 + \text{Tr}|H^2$ devient, pour l'action du groupe des classes d'idèles, la formule explicite de Riemann–Weil (éq. (2) et (4), p. 7), où les zéros apparaissent avec un signe moins parce qu'ils sont dans H^1 :

$$\sum_{L(\chi, \rho)=0} \hat{h}(\chi, \rho) - \hat{h}(0) - \hat{h}(1) = - \sum_v \int'_{k_v^*} \frac{h(u^{-1})}{|1-u|} d^*u.$$

Les termes $\hat{h}(0)$ et $\hat{h}(1)$ sont les contributions de H^0 et H^2 (les deux bouts) ; la somme sur les zéros est la contribution de H^1 .

6.5. Tableau de synthèse

	Surface de Riemann (modèle)	Article de Connes
la “figure”	surface Σ	$X = A/k^*$ (classes d’adèles)
H^0 et H^2	formes harmoniques paires	conditions $f(0) = 0, \int f = 0$
H^1	1-formes harmoniques	$\mathcal{H} = \text{coker } T$ (zéros de ζ)
la transformation φ	Frobenius, ou flot	action de C_k
dualité	étoile de Hodge	transformée de Fourier F
formule de Lefschetz	points fixes	formule explicite de Weil

Remarque : il s’agit d’une *analogie guidée*, pas d’un calcul de cohomologie au sens strict. Connes montre (théorème V.2, p. 36, et section IX) que la formule de trace globale qui compléterait le dictionnaire est *équivalente* à l’hypothèse de Riemann pour toutes les fonctions L à caractère de Grössen. Elle reste non démontrée : la dernière ligne du dictionnaire (p. 12 et p. 59) est qualifiée d’“unproved” par Connes dans son article de 1997.

7. Exercices

1. Calculer H^0, H^1, H^2 d’un carré vide (4 points, 4 arêtes). Vérifier Euler.
2. Calculer la même chose pour un tétraèdre vide (4 points, 6 arêtes, 4 faces) : trouver 1, 0, 1.
3. Vérifier la formule de Lefschetz pour la rotation de 180° d’un cercle dessiné dans le plan, vue comme transformation du disque plein (un seul point fixe : le centre).