

1. Le problème posé

Pour n pair, on cherche x premier avec $n - x$ premier. Soit p un premier impair $\leq \sqrt{n}$. Un candidat $x > \sqrt{n}$ est écarté s'il est dans l'une des deux "lanières" de p : $x \equiv 0 \pmod{p}$ ou $x \equiv n \pmod{p}$ (ce qui revient à $p \mid n - x$). Pour $n = 98$ et $p = 3, 5, 7$, le nombre 19 a pour restes $(1, 4, 5)$, différents de $(0, 0, 0)$ et de $(2, 3, 0)$: il passe. On veut que les trois conditions soient testées *en parallèle*, non composées.

2. Le parallélisme est un produit direct (théorème des restes chinois (TRC))

Soit $p_1 < \dots < p_k$ les premiers impairs $\leq \sqrt{n}$ et $P = p_1 \dots p_k$. Le théorème des restes chinois donne l'isomorphisme d'anneaux

$$\mathbb{Z}/P \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}/p_1 \times \dots \times \mathbb{Z}/p_k, \quad x \mapsto (x \bmod p_1, \dots, x \bmod p_k).$$

Dans le produit, chaque composante évolue sans voir les autres : c'est le parallélisme voulu. En matrices, on prend une matrice diagonale par blocs $\text{diag}(A_1, \dots, A_k)$, chaque A_i agissant modulo p_i seulement.

3. L'ensemble admissible est un produit

Posons $R_p = \{r \in \mathbb{Z}/p : r \neq 0, r \neq n \bmod p\}$. Alors x passe le crible si et seulement si $(x \bmod p_i)_i \in R_{p_1} \times \dots \times R_{p_k}$. On a $|R_p| = p - 2$ si $p \nmid n$ et $|R_p| = p - 1$ si $p \mid n$ (les deux lanières coïncident). Le produit compte $\prod |R_{p_i}|$ éléments.

Exemple $n = 98$. $R_3 = \{1\}$, $R_5 = \{1, 2, 4\}$, $R_7 = \{1, \dots, 6\}$ ($98 \equiv 0 \bmod 7$), soit $1 \cdot 3 \cdot 6 = 18$ triplets dans $\mathbb{Z}/105$. Parmi eux, ceux dont le représentant est impair et dans $]\sqrt{98}, 98 - \sqrt{98}[$ donnent exactement

x	19	31	37	61	67	79
$(x \bmod 3, 5, 7)$	(1, 4, 5)	(1, 1, 3)	(1, 2, 2)	(1, 1, 5)	(1, 2, 4)	(1, 4, 2)

c'est-à-dire les trois décompositions $19 + 79$, $31 + 67$, $37 + 61$.

4. La symétrie $x \mapsto n - x$ comme matrice affine

Sur le vecteur $(x, 1)^\top$, la matrice

$$M = \begin{pmatrix} -1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

envoie $(x, 1)$ sur $(n - x, 1)$. Réduite modulo chaque p_i , elle agit en parallèle : $r_i \mapsto n - r_i \pmod{p_i}$. Chaque R_p est stable par M (si $r \neq 0$ et $r \neq n$, alors $n - r \neq n$ et $n - r \neq 0$), donc le produit l'est aussi. Pour $n = 98$: $(1, 4, 5) \mapsto (1, 4, 2)$, c'est-à-dire $19 \mapsto 79$; le point fixe est $49 = n/2$. Contrairement au dessin du tore, 79 n'est pas l'antipode de 19 (qui serait 68) mais son symétrique par rapport à 49.

5. Ce que le script vérifie

Le programme calcule, pour un n pair donné, les R_p , le module P , le nombre de triplets admissibles, la stabilité par M , et compare les nombres qui passent à travers tous les filtres du produit dans la fenêtre $]\sqrt{n}, n - \sqrt{n}[$ aux décomposants réels; l'égalité est vérifiée (testé pour $n = 98, 400, 1000$). Cette égalité tient parce qu'un entier $x < n$ sans facteur premier $\leq \sqrt{n}$ est premier ou égal à 1.

6. Conclusion : ce que cela ne donne pas

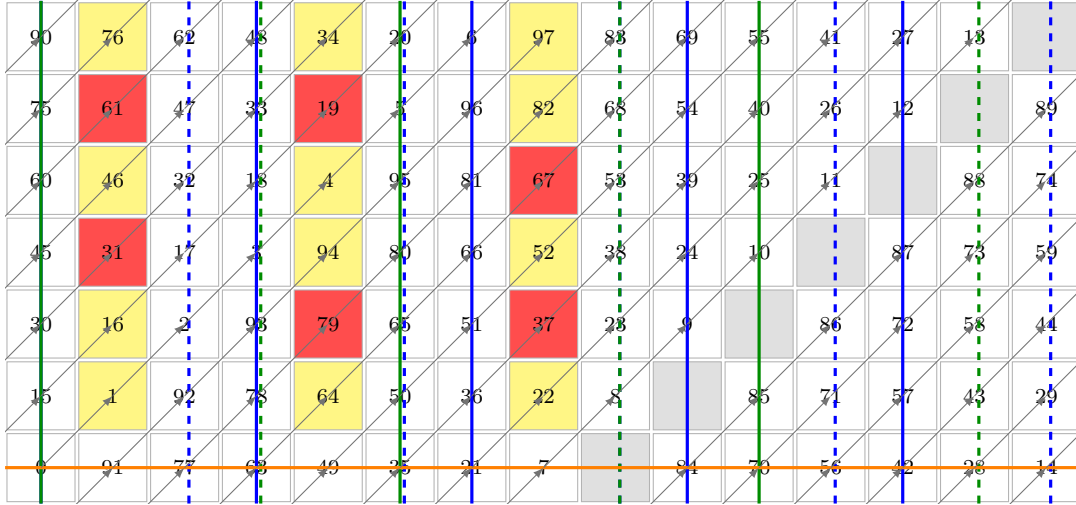
Il faut le dire clairement.

- **redondance.** Le produit $\prod R_p$ est le crible de Legendre exact écrit en restes chinois. Les matrices affines par blocs reformulent la condition “ x et $n - x$ sans petit facteur”, elles ne l'affaiblissent pas.
- **non-commutativité.** Les blocs agissent sur des facteurs distincts du produit : tout ce qui est écrit ici est commutatif (anneau fini $\mathbb{Z}/P$). Rien n'appelle un tore non commutatif.
- **fenêtre contre période.** Le module P est de l'ordre de $e^{\sqrt{n}}$, bien plus grand que la fenêtre de longueur n . La structure produit décrit une période entière, et ne dit pas qu'un nombre qui traverse tous les filtres tombe dans la petite fenêtre $[0, n]$, qui est précisément l'énoncé de Goldbach. Par exemple, pour $n = 1000$ la densité du produit dans $\mathbb{Z}/P$ est d'environ 0,08, et la fenêtre n'en voit qu'une infime partie.
- **obstruction de parité.** On ne peut minorer le nombre de nombres qui traversent tous les filtres par des méthodes de crible (Selberg, crible combinatoire) en criblant jusqu'à $\sqrt{n}$: le crible ne distingue pas un entier ayant un nombre pair de facteurs premiers d'un entier en ayant un nombre impair. Les minoration connues s'arrêtent à un niveau plus bas, où les nombres qui traversent tous les filtres peuvent avoir deux facteurs premiers (théorème de Chen : $n = p + P_2$). Ici, criblage exact jusqu'à $\sqrt{n}$, il n'y a pas d'ambiguïté sur les nombres qui traversent tous les filtres, mais prouver qu'il y en a au moins un est le problème ouvert, et la structure produit ne dit rien là-dessus.

En résumé : le cadre est exact et propre, il rend visible le rôle de 98 (par M) et la symétrie du crible, mais il ne franchit ni l'obstruction de parité, ni le passage de la période à la fenêtre.

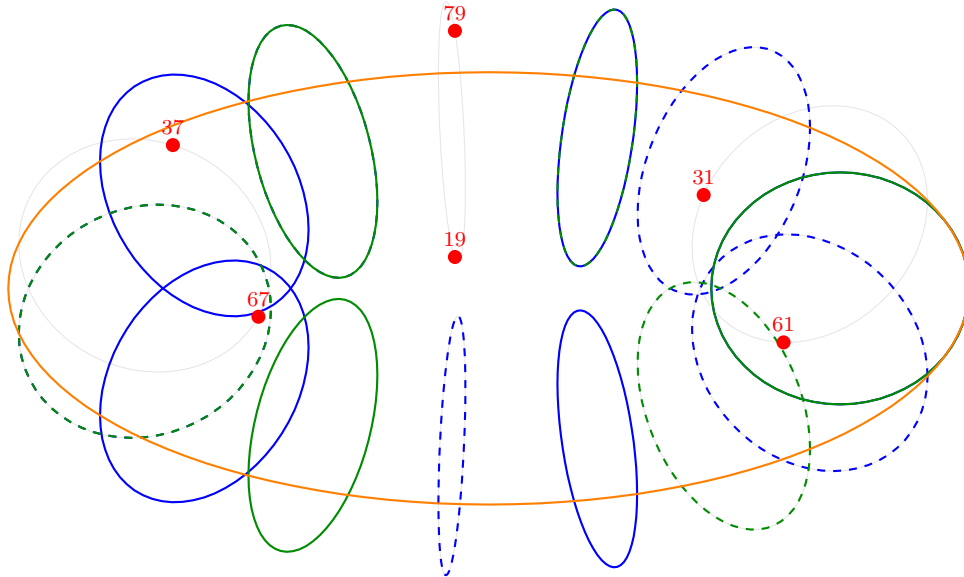
7. Les décomposants de Goldbach de 98 sur un tore

Le tore est $\mathbb{Z}/15 \times \mathbb{Z}/7 \cong \mathbb{Z}/105$ (CRT), $x \mapsto (x \pmod{15}, x \pmod{7})$.



Lecture. Colonnes $i = x \bmod 15$, lignes $j = x \bmod 7$; les bords opposés sont recollés. Lanières : 3 en bleu, 5 en vert, 7 en orange; trait plein = multiples de p ($x \equiv 0$), tireté = $x \equiv 98 \pmod{p}$ (côté $98 - x$). Pour $p = 7$ les deux lanières coïncident ($98 \equiv 0 \pmod{7}$) : on voit donc 5 lanières distinctes, non 6. La flèche grise est la trajectoire $x \mapsto x + 1$ (pas $(1,1)$), qui fait le tour du tore. Cases rouges : décomposants (19, 31, 37, 61, 67, 79); jaunes : nombres qui traversent tous les filtres du crible qui ne sont pas décomposants (1, 97, et les nombres pairs); grises : $98 \leq x \leq 104$.

Là, j'ai dit à l'ia claudie que pour coller davantage à l'idée que j'avais, il ne fallait pas que deux modules partagent une même direction (la direction verticale sur le tore à plat ci-dessus).

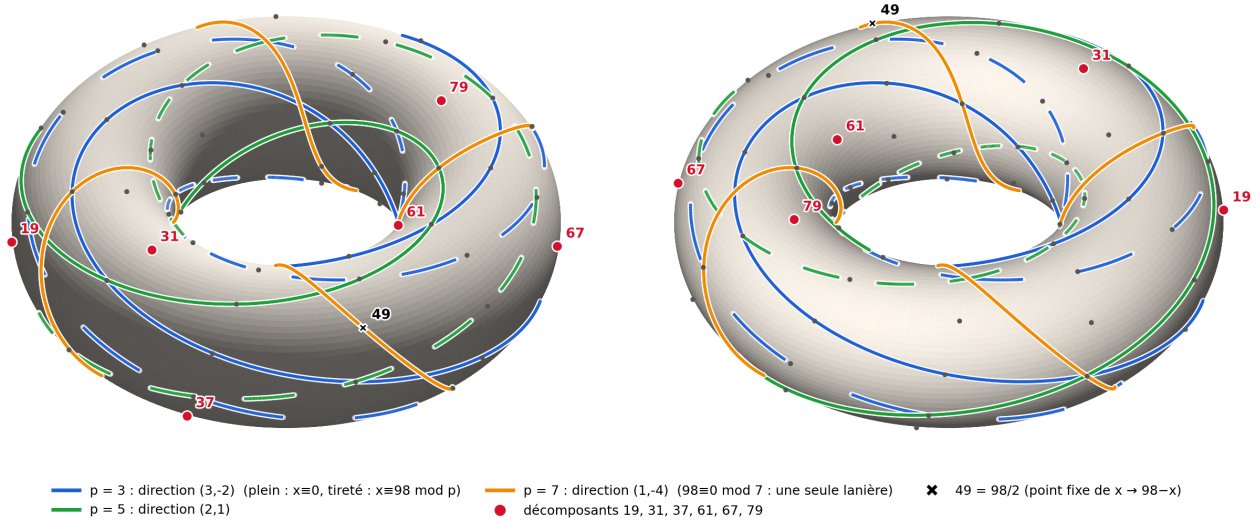


Le même tore, plongé dans l'espace.

Les $98 - x$ des décomposants sont les images des x par la symétrie centrale $(i, j) \mapsto (98 - i, 98 - j)$, de centre le point 49 : 79 est le *symétrique* de 19 par rapport à 49, et non son antipode (l'antipode serait $19 + 49 = 68$). Sur le tore, le x et son complément $98 - x$ sont échangés par cette symétrie, qui laisse stable le réseau des lanières.

8. En “vraie” 3D

Décomposants de Goldbach de 98 sur un tore dans l'espace : $x \mapsto (x/105, 11x/105) \pmod{1}$

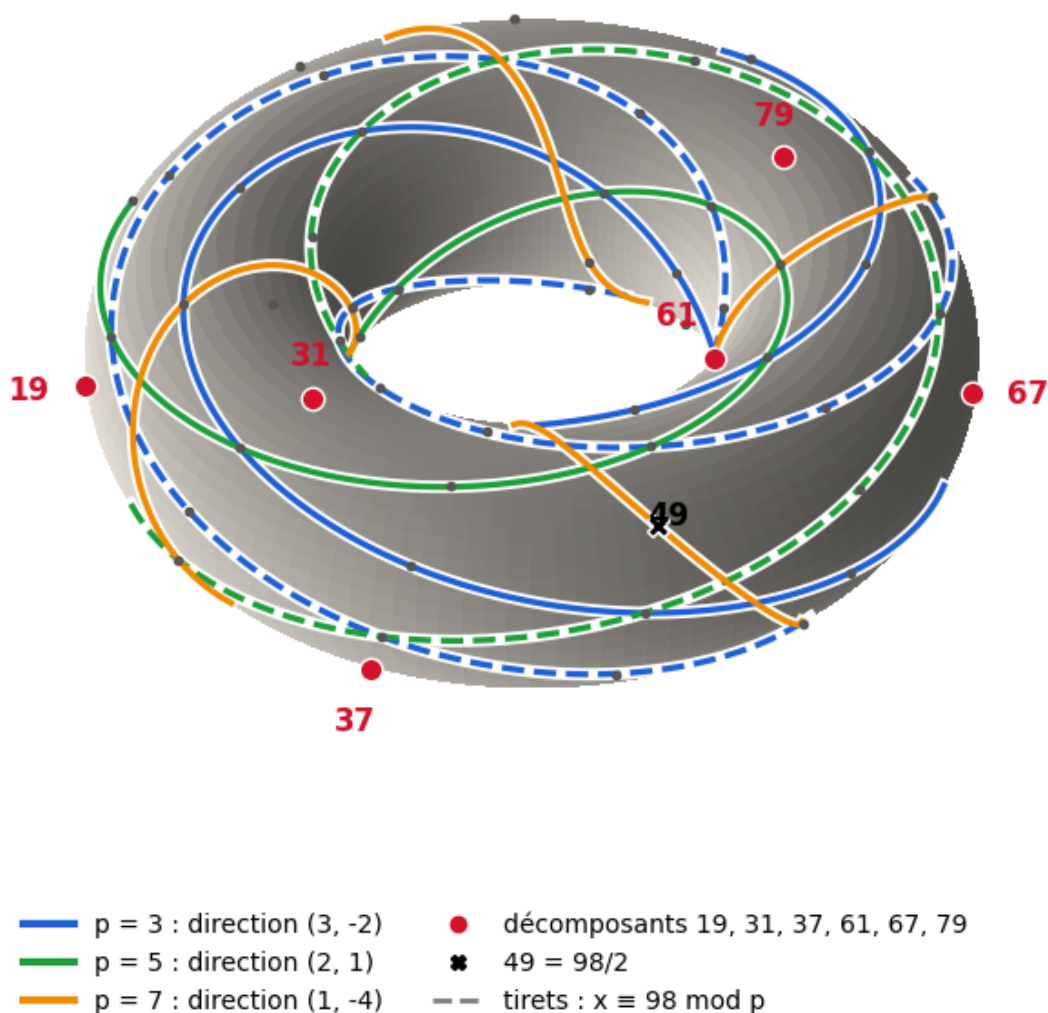


Construction. On plonge $x \in \mathbb{Z}/105$ dans le tore $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ par $x \mapsto (x/105, 11x/105)$, puis ce tore dans l'espace (tore de révolution). Pour chaque premier $p \in \{3, 5, 7\}$, la lanière “ $x \equiv 0 \pmod{p}$ ” est la droite fermée de direction (c_p, d_p) passant par l'origine, et la lanière “ $98 - x \equiv 0$ ” est la droite parallèle passant par le point 98 (tiretée). Les directions $(3, -2)$, $(2, 1)$, $(1, -4)$ sont choisies pour que ces droites contiennent *exactement* les x voulus : la droite de direction (c, d) passant par l'origine contient le point x si et seulement si $(d - 11c)x \equiv 0 \pmod{105}$. Les trois valeurs $d_p - 11c_p$ sont -35 , -21 et -15 , et ont pour pgcd avec 105 respectivement 35, 21 et 15 : cela donne exactement $x \equiv 0 \pmod{3}$, $\pmod{5}$ et $\pmod{7}$. Le script `tore98_3d.py` vérifie ces trois équivalences.

Lecture. Pour $p = 7$, $98 \equiv 0$: les deux lanières coïncident (une seule courbe orange). Les points rouges, 19, 31, 37, 61, 67, 79, sont les seuls points d'entiers impairs de $[11, 87]$ qui ne sont sur aucune lanière ; $49 = 98/2$ est le centre de la symétrie $x \mapsto 98 - x$. Quand un point semble toucher une lanière, c'est un effet de projection (point près du bord apparent) : l'appartenance exacte est celle de la vérification algébrique. Le tore est commutatif (groupe fini) ; rien dans cette image ne fournit de démonstration de Goldbach.

Je demande enfin à l'ia claudia un dernier programme en python pour que je puisse faire tourner le tore comme on peut le faire habituellement avec une production en 3D et j'obtiens l'image suivante (qu'on peut faire tourner lors de l'exécution du programme).

Décomposants de Goldbach de 98 sur un tore ($x \rightarrow (x/105, 11x/105)$)



9. Annexe : les prompts et références que j'avais donnés à l'ia claude

Premier prompt : Bonjour, j'ai besoin de toi pour faire quelque chose qui est impossible pour moi mais je pense que tu dois pouvoir m'aider. Voilà, je joins deux notes. Tu vois que sur l'une gemini a un peu déliré sur un dessin en fin de note sensé représenter les différentes lanières, mais rien ne semble correct, mais c'est la bonne idée, et dans la deuxième note où je t'ai fait m'expliquer ce matin le produit semi-direct de la leçon inaugurale d'Alain Connes, tu vois qu'il est aussi question

de tore non commutatif (je pense mais pas sûre) et enfin, dans la troisième pièce jointe, tu vois ce que j'appelle mes "cristals". Je voudrais si c'était possible, que tu me fournisses un .tex qui, pour le seul exemple $n=98$, dépose sur le tore (non-commutatif ou pas mais il me semble qu'il doit l'être) les 6 trajectoires pour 3, 5, 7 (le tore est de longueur 98, ce qui fait qu'on revient à 0 lorsqu'on en a fait le tour, il y a deux lanières par premier (d'où les 6 lanières) et on doit donc voir sur le tore les points que j'avais mis sur mon cristal (les décomposants 19 et 79 (en fait, on doit voir 19 et peut-être que 79 lui est antipodal, ou je ne sais pas exactement où il est). En fait, je voudrais que tu me représente tout ça par les matrices de la leçon inaugurale, tu vois?... J'espère que c'est faisable, et peut-être alors, une démonstration découlerait des propriétés du tore non-commutatif (je sais qu'un jour tu m'avais dit que ça n'était pas la peine qu'il soit commutatif, mais je parierais gros qu'il faut qu'il le soit).

Accompagnant le premier prompt, j'ai fourni à l'ia claudia les 3 fichiers suivants : [1], [2], [3].

Second prompt : Excuse-moi d'insister, mais peut-être qu'alors, ça n'est pas ça qu'il faut faire (mais merci, si tu as pu représenter un tore (je n'ai pas encore regardé) un peu moins délirant que celui de gemini, ça sera génial), peut-être que ce qu'il faut faire alors c'est plutôt utiliser les trois matrices $\alpha = [[1, 1], [1, 3]]$, $\beta = [[1, 1], [1, 5]]$, $\gamma = [[1, 1], [1, 7]]$ et alors je ne sais pas "où" il faut mettre 98 pour trouver que 19, 31 et 27 ont un comportement particulier, c'est peut-être ça qu'il faudrait faire, je ne sais pas, essaye de m'aider dans la mesure de tes possibilités (qui sont langagières essentiellement, je sais).

Troisième prompt : Très bien, voilà une excellente idée : partons sur les matrices affines : je t'explique où a toujours été mon problème par rapport à ça : nous (pour la conjecture de Goldbach, oublions, quant à moi, définitivement l'hypothèse de Riemann, il ne faut pas délirer, et laissons cela aux spécialistes), on cherche un nombre qui soit (par exemple pour 19) A LA FOIS un $3x + 1$ ET un $5x + 4$ ET un $7x + 5$ (car $(1, 4, 5) \neq (0, 0, 0)$ et $(1, 4, 5) \neq (2, 3, 0)$ et ça, je ne sais pas comment on pourrait le faire avec différentes matrices affines en fait, il ne s'agit pas de les composer dans le sens de faire travailler la matrice mod 5 après la matrice mod 3 mais de les faire travailler parallèlement, et de voir si le résultat de chacune nous convient, bref, trop difficile pour moi, si tu vois quelque chose, tu me dis (pour qu'elles travaillent parallèlement plutôt qu'en les composant)....

Les géodésiques représentées ne correspondent pas à celles que j'avais en tête, dans la mesure où je souhaitais que comme, par exemple $98 = 5 \times 19 + 3$, la géodésique de 5 s'enroule 19 fois autour du tore ; il est probable que le graphique qu'on aurait alors obtenu ait été complètement illisible et ininterprétable.

Références

- [1] <https://denisevellachemla.eu/tore-non-commutatif-keskons.pdf> ,
- [2] <https://denisevellachemla.eu/produit-semi-direct-et-feuilletage.pdf> ,
- [3] <https://denisevellachemla.eu/cristal400.pdf> .