

1. La question

Les lemmes de Vella-Chemla-Schneps¹ ramènent le fait de trouver des décomposants de Goldbach d'un nombre pair n supérieurs à $\sqrt{n}$ à l'énoncé suivant :

Si x est un nombre premier impair, $3 \leq x \leq n/2$, tel que $x \not\equiv n \pmod{p}$ pour tout premier $p \leq \sqrt{n}$, alors $n - x$ est premier.

Il s'agit de savoir si les notions de crible et de topos de Grothendieck décrites par A. Connes (*Lectures grothendieckiennes*, chap. VII, "Un topos sur les topos", p. 217-250²) permettent de démontrer l'existence d'un tel x , c'est-à-dire de passer l'obstacle de parité.

Réponse : non. Rien dans ces pages n'oriente vers une démonstration. Les raisons suivent.

2. Ce que dit A. Connes

2.1. Cribles dans $\widehat{\mathbb{N}^\times}$ (p. 223-225)

On considère la petite catégorie à un seul objet dont les morphismes forment le monoïde multiplicatif $\mathbb{N}^\times$. Un crible est un ensemble C d'entiers stable par multiplication : si $n \in C$, alors $kn \in C$ pour tout k .

Exemples de Connes : $\Gamma(2)$, les entiers pairs *sauf* 2 ; $\Gamma(3)$, les multiples de 3 *sauf* 3. Toute réunion de cribles est un crible. Le crible d'Ératosthène est la réunion des $\Gamma(p)$; les entiers qui sont conservés après passage des cribles sont les nombres premiers.

2.2. Valeurs de vérité

Dans ce topos, l'ensemble Ω des valeurs de vérité est l'ensemble de tous les cribles. "Faux" est le crible vide et "vrai" est le crible formé de tous les entiers. Il y a une infinité de valeurs intermédiaires.

Illustration (qui n'est pas de Connes). Pour une affirmation P portant sur un entier x , sa valeur de vérité est l'ensemble des k tels que P est vraie sur kx ; cet ensemble est stable par multiplication. Ainsi "3 est pair" a pour valeur $\{2, 4, 6, \dots\}$, "2 est divisible par 6" a pour valeur les multiples de 3, "6 est divisible par 6" a pour valeur "vrai", et une affirmation jamais vraie a pour valeur "faux".

2.3. Points d'un topos, caractéristique 1 (p. 226-235)

Un point d'un topos est un morphisme géométrique depuis le topos des ensembles ; son foncteur d'image inverse préserve colimites et limites finies, donc produits. En caractéristique 1 (semi-corps,

1. <https://denisevellachemla.eu/jade1.pdf>.

2. liseuse ici <https://spartacus-idh.com/liseuse/094/page/217>.

$\mathbb{R}_+^{\max}$), l'addition est $x + y = \max(x, y)$, avec $1 + 1 = 1$, et les endomorphismes $x \mapsto x^n$ jouent le rôle du Frobenius.

3. Pourquoi cela ne démontre pas Goldbach

1. **La condition de Vella-Chemla-Schneps n'est pas un crible.** Un crible de $\widehat{\mathbb{N}^\times}$ est stable par multiplication. La condition " $p \nmid n - x$ " porte sur une translation de x par n . Si $x \equiv n \pmod{p}$, alors $2x \equiv 2n$, qui n'est en général pas congru à n . L'ensemble concerné n'est donc pas stable par multiplication. Le topos $\widehat{\mathbb{N}^\times}$ ne voit que la multiplication ; il ne contient ni l'addition de $\mathbb{Z}$ ni la soustraction $n - x$.
2. **L'addition de la caractéristique 1 n'est pas celle de $\mathbb{Z}$.** Avec $x + y = \max(x, y)$, la relation $p + q = n$ n'a pas de sens. Goldbach mêle addition et multiplication, et c'est cette interaction qui est à l'origine de l'obstacle de parité.
3. **Le langage ne fournit pas d'existence.** Les cribles et les topos organisent l'information locale et la recollent. Obtenir un x satisfaisant la condition reviendrait à exhiber un point global non vide d'un topos construit à partir de l'énoncé, ce qui est exactement l'énoncé de Goldbach. Le crible de Legendre exact donne déjà R_n par inclusion-exclusion ; le terme principal est de l'ordre de $n/\ln^2 n$ et les $2^{\pi(\sqrt{n})}$ termes d'erreur sont du même ordre. Réécrire cela dans un topos change la grammaire, pas les estimations.
4. **Obstacle de parité.** Un crible qui n'utilise que des comptages dans des progressions arithmétiques ne distingue pas les entiers ayant un nombre pair de facteurs premiers de ceux qui en ont un nombre impair (Selberg). Le contourner exige une information de type corrélation ou bilinéaire (Vinogradov, Vaughan, Chen pour $p + P_2$). La théorie des topos n'ajoute aucune hypothèse arithmétique de ce genre.
5. **Rôle des topos chez Connes.** Dans son approche de l'hypothèse de Riemann (avec ses collaborateurs), le topos arithmétique donne un cadre géométrique à l'espace des classes d'adèles. Même sous Riemann (ou GRH), Goldbach reste ouvert, car on n'obtient que des termes d'erreur.

4. Conclusion

Les cribles et topos de Grothendieck ne permettent pas de démontrer la conjecture de Goldbach et ne permettent pas de franchir l'obstacle de parité. Une approche par non-vacuité sans estimations demanderait un invariant de type point fixe ou degré topologique construit à partir des involutions $r \mapsto n - r \pmod{p}$, que le formalisme des topos ne fournit pas de lui-même. Aucun énoncé de ce type, à la fois vrai et non trivialement équivalent à Goldbach, n'est connu.