

Voilà mon problème : j'ai retrouvé un vieux petit texte qui l'exprimait : d'abord quand on regarde les valuations p-adiques d'un point de vue purement syntaxique, on voit que l'on va effectuer "un peu la même chose modulo 2 et modulo 3" si ce n'est que modulo 2 il faut répéter les séquences de valuations deux fois alors que modulo 3, il faut les répéter 3 fois et je ne vois pas comment obtenir ainsi une bijection qui enverrait par exemple 2^2 sur 3^2 et 2^3 sur 3^3 parce que entre ces nombres, on n'aurait pas le même nombre d'éléments à mettre en bijection. Mais bon, admettons qu'on oublie ça et qu'on se place dans les réels, alors le problème vient un peu d'ailleurs : admettons que j'ai les puissances de 2 d'un côté comme points discrets sur une droite et les puissances de 3 de l'autre comme points discrets sur une autre droite, et que j'obtiens l'une des droites par étirement à partir de l'autre et bien j'aurais mon homomorphisme continu entre les deux droites et tant pis, il enverra les nombres entre 2 puissances de 3 successives mais qui ont 3 dans leur factorisation sur des réels, et inversement dans l'autre sens. Mais ce que je ne vois pas c'est comment décider de la distance alors pour réaliser cet homomorphisme. Merci de m'aider. <https://denisevellachemla.eu/fevrier2006.pdf> et <https://denisevellachemla.eu/ennuyee.pdf>

Bonjour Denise. J'ai lu les deux textes. Voici ce que je réponds à ta question sur la distance.

Le facteur d'étirement est imposé : il n'y a rien à décider.

Place les puissances de 2 sur une droite à la position $k \cdot \ln 2$, et les puissances de 3 sur l'autre à la position $k \cdot \ln 3$. C'est la droite des logarithmes : multiplier deux nombres revient à additionner leurs positions.

Un homomorphisme continu de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ (pour l'addition) est toujours une multiplication par une constante λ , c'est-à-dire un simple étirement. Pour qu'il envoie 2^k sur 3^k , il faut $\lambda = \ln 3 / \ln 2 \approx 1,585$. Ta « distance » est donc ce rapport, et aucun autre choix n'est possible.

Dans la droite multiplicative, cela donne $\varphi(x) = x^{(\ln 3 / \ln 2)}$. On a bien $\varphi(2) = 3$ et $\varphi(4) = 9$. Mais φ envoie 3 sur $3^{1,585} \approx 5,7$, qui n'est pas entier, et 5 sur un autre non-entier. Cela confirme ton intuition : les nombres qui ne sont pas des puissances de 2 sont envoyés sur des réels quelconques.

Pourquoi cette obstruction est la même que ton obstruction de comptage.

C'est un seul et même fait : $\ln 3 / \ln 2$ est irrationnel. Il n'existe donc aucune relation entière $a \cdot \ln 2 = b \cdot \ln 3$, et les « briques » 2 et 3 sont indépendantes. En termes de factorisation, chaque nombre est une liste d'exposants $(v_2, v_3, v_5, \dots)$ et les premiers sont des directions indépendantes. Envoyer 2^k sur 3^k revient à identifier deux directions, ce que l'étirement continu fait sur ces deux axes seulement. Il écrase ensuite tout le reste dans une seule direction, celle des réels.

Ton compte d'éléments dit la même chose. Les nombres de valuation $\geq k$ forment une proportion 2^{-k} des entiers pour $p = 2$, et 3^{-k} pour $p = 3$. Ces proportions décroissent à des rythmes différents, donc aucune bijection ne peut respecter les niveaux de valuation et la proportion en même temps.

Un fait classique qui dit tout cela. Le théorème d'Ostrowski affirme que les valeurs absolues $|\cdot|_2$ et $|\cdot|_3$ sur $\mathbb{Q}$ ne sont pas équivalentes : aucun exposant α ne donne $|x|_2^\alpha = |x|_3$ pour tous les rationnels x . Sur les seules puissances de 2 et de 3, un tel α existe (c'est précisément $\ln 3 / \ln 2$). Sur tout $\mathbb{Q}$, il n'existe pas.

Lien avec « Ennuyée ». Le rapport $\ln x / \ln p$, que tu écris $1/\log_p(x)$, est exactement cette « valuation continue » : la version étirée de $v_p(x)$ qui coïncide avec elle aux puissances de p . Chaque premier p a son propre étirement $\ln p$, et c'est ce qui empêche de superposer les droites. Les « parties fractionnaires » entre deux puissances sont le prix à payer pour avoir lissé la valuation.

Si tu veux, je peux voir ce que donnerait une version où l'on garde la comparaison seulement sur les puissances et où l'on mesure l'écart sur les autres entiers, par exemple la distance entre $\log_3(n)$ et le $\log_2(n)$ étiré, pour n entre deux puissances.

Pourrais-tu mener ce raisonnement mais en prenant non pas des log mais des inverses de log, comme Gauss, merci.

Ajout à la mémoire

Avec l'inverse du log, la question de la distance disparaît, mais on perd le caractère additif.

Le changement de coordonnée. Pour un nombre x et un premier p , pose $u_p(x) = 1/\log_p(x) = \ln p / \ln x$. C'est la fonction f_p de « Ennuyée ». Les puissances de p se placent alors aux positions $u_p(p^k) = 1/k$, c'est-à-dire $1, 1/2, 1/3, 1/4, \dots$

Résultat : les deux droites sont identiques. Les puissances de 2 sont en $1/k$ sur la droite de 2, les puissances de 3 sont en $1/k$ sur la droite de 3. Il n'y a plus d'étirement à choisir, le facteur est 1. En revenant aux nombres, $u_2(x) = u_3(y)$ donne $\ln y = (\ln 3/\ln 2) \cdot \ln x$. C'est exactement la même application $x \mapsto x^{1,585}$ qu'avant. L'inverse du log n'a donc pas créé une nouvelle correspondance, il a seulement changé de point de vue sur la même.

Ce qu'on perd. Le produit devient une addition d'inverses, comme des résistances en parallèle : $u(xy) = 1 / (1/u(x) + 1/u(y))$.

Ce n'est plus un homomorphisme pour l'addition des positions. Les valuations p -adiques, elles, additionnent bien ($v_p(xy) = v_p(x) + v_p(y)$), donc c'est le log qui respecte leur structure, pas son inverse.

Ce qu'on gagne, et c'est ce qui rapproche de Gauss. Gauss dit que n est premier avec « probabilité » $1/\ln n$. Or $1/\ln n = u_p(n) / \ln p$. Le poids de Gauss est donc la coordonnée u à une constante près, et ce pour n'importe quel p . D'où $\pi(x) \approx \sum u_p(n) / \ln p$, quel que soit p . Choisir $p = 2$ ou $p = 3$ ne change que la constante de normalisation $1/\ln p$.

Sur les puissances, le poids de Gauss vaut $1/(k \ln p)$. Pour passer de 2^k à 3^k , il est donc multiplié par $\ln 2/\ln 3$. C'est le même nombre irrationnel que dans la première réponse, et l'obstruction est toujours là. Elle apparaît cette fois comme une constante de normalisation entre les deux comptages, qui ne s'annule jamais.

En résumé, avec le log tu obtiens une correspondance exacte qui respecte les produits mais ne tombe pas sur des entiers. Avec l'inverse du log tu obtiens une correspondance qui s'identifie d'elle-même, qui porte le poids de Gauss, mais qui ne respecte plus les produits. Dans les deux cas, $\ln 3/\ln 2$ reste la seule quantité qui sépare 2 de 3.

Exécuté 3 commandes, lu un fichier

Le fichier de la section est prêt et la mise en page est vérifiée. Je le présente, puis je réponds à ta question sur la non-commutativité.

Fichiers partagés, mémoire mise à jour

`section11_deux_fonctions.tex` contient uniquement la section, sans préambule, à coller dans le document principal (elle y sera la section 11). J'ai vérifié le rendu en l'insérant dans un document minimal.

Où est la non-commutativité ?

Ce n'est pas l'espace des adèles qui est non commutatif, c'est le quotient $X = \mathbb{A}/\mathbb{Q}^*$. Les adèles $\mathbb{A} = \mathbb{R} \times (\text{produit restreint des } \mathbb{Q}_p)$ forment un anneau commutatif ordinaire. Ici $\mathbb{Q}_p$ désigne les nombres dont on connaît les restes modulo $p, p^2, p^3, \dots$ (un développement en base p infini vers la gauche).

Le problème vient de l'action de $\mathbb{Q}^*$: la quasi-totalité de ses orbites est dense dans $\mathbb{A}$. La topologie quotient est alors grossière, il n'y a pratiquement aucune fonction continue non constante sur le

quotient. On remplace alors l'espace par l'algèbre des fonctions sur le quotient, qui est un produit croisé. Dans cette algèbre, f et l'élément u_q associé à q ne commutent pas : $u_q f u_q^{-1} = f(q^{-1} \cdot)$. C'est cela, la non-commutativité.

Ta vision en droites dans la note

Chaque premier p a sa droite discrète. Dans l'idèle (a_p) , le nombre $a_p \in \mathbb{Q}_p^*$ a pour position $v_p(a_p) \in \mathbb{Z}$, et $\mathbb{Q}_p^*/\mathbb{Z}_p^* \cong p\mathbb{Z}$: ce sont tes points p^k . La proposition 3 de la note le confirme : les orbites périodiques de $C_{\mathbb{Q}}$ sur X sont indexées par les places, et pour le premier p , l'isotropie est l'image de $\mathbb{Q}_p^*$. À unités près, c'est ta droite des puissances de p .

Un rationnel n a pour coordonnées $(\ln n ; v_2(n), v_3(n), v_5(n), \dots)$, le vecteur de ta figure de 2006. Il déplace donc toutes les droites à la fois, et $\ln n = \sum v_p(n) \ln p$. Ton point 6 est $(\ln 6 ; 1, 1, 0, \dots)$.

Ce que devient le multi-droites dans $C_{\mathbb{Q}}$. Tout idèle est équivalent, par multiplication par un rationnel, à un idèle dont toutes les composantes p -adiques sont des unités : on dépense le rationnel n pour effacer les valuations sur toutes les droites, et cela coûte la translation $\ln n$ sur la droite réelle. Il reste $\mathbb{R}_+^*$ (la droite des échelles) fois le groupe compact $\hat{Z}^*$ des unités : $C_{\mathbb{Q}} \cong \mathbb{R}_+^* \times \hat{Z}^*$. Les droites discrètes sont absorbées.

L'illustration à deux premiers

Cette illustration est de moi, la note ne la fait pas. Prenons seulement 2 et 3 : on quotiente la droite des logarithmes par $\mathbb{Z} \ln 2 + \mathbb{Z} \ln 3$. D'abord par $\ln 2$, ce qui donne un cercle d'une octave. Ensuite la multiplication par 3 y agit comme une rotation de $\ln 3 \bmod \ln 2$, soit la fraction $\log_2 3 \bmod 1 \approx 0,585$ de l'octave (la quinte, 702 cents). Cette rotation est irrationnelle : aucune orbite ne se referme. Le quotient est l'espace de la rotation irrationnelle, l'exemple classique d'espace non commutatif (algèbre de la rotation irrationnelle, à équivalence de Morita près). Ton cercle des quintes qui ne se referme pas (le comma) en est donc la forme élémentaire. Le tempérament remplace la rotation irrationnelle par la rotation rationnelle $7/12$, qui se referme au bout de 12 pas. La vraie note travaille avec tous les premiers et avec la partie additive des $\mathbb{Q}_p$ (les restes modulo p^n), qui n'apparaît pas dans ce modèle.

Dans la transcription d'Alain, l'espace des sous-groupes de $\mathbb{R}$ de rang 1 joue le même rôle de quotient « mauvais ». Je ne l'ai pas relié ici à X en détail.

Section11 deux fonctions

TEX

Je souhaite que tu me fournisses comme section 12 cette explication et le choix que tu as fait de quotienter par $\mathbb{Z} \ln(2) + \mathbb{Z} \ln(3)$, merci, et quand tu dis " $\mathbb{Q}_p$ désigne les nombres dont on connaît les restes modulo $p, p^2, p^3, \dots$ (un développement en base p infini vers la gauche)." c'est parce qu'il y a des nombres dont on ne connaît pas leurs restes modulo p, p^2, p^3 ??? p, p^2, p^3 n'est pas une base possible ? Merci de me dire.

Exécuté 2 commandes, lire 2 fichiers, fichiers partagés

`section12_non_commutativite.tex` contient uniquement la section 12, à coller dans le document principal. Je l'ai testée dans un document minimal, schéma compris. Elle couvre :

- le rappel sur les nombres p -adiques ;
- où se trouve la non-commutativité ;
- tes droites dans la note ;
- le modèle à deux premiers et le choix de quotienter par $\mathbb{Z} \ln 2 + \mathbb{Z} \ln 3$, avec un schéma comparant la rotation irrationnelle et la rotation $7/12$;
- ce que ce modèle ne contient pas.

Ta question sur $\mathbb{Q}_p$

Ma phrase était mal formulée : aucun nombre p -adique n'est privé de ses restes. Un entier p -adique **est** une suite compatible de restes modulo $p, p^2, p^3, \dots$. Et p, p^2, p^3 ne sont pas la base : la base est p . Les puissances de p sont les valeurs de position des chiffres. Un nombre s'écrit $d_0 + d_1p + d_2p^2 + \dots$, avec chaque chiffre dans $\{0, \dots, p-1\}$, et son reste modulo p^n est la troncature $d_0 + \dots + d_{n-1}p^{n-1}$. La différence avec un réel est que le développement est infini vers la gauche et non vers la droite. Par exemple, en base 5, $-1 = \dots 4444$. Le corps $\mathbb{Q}_p$ s'obtient en autorisant en plus un nombre fini de puissances négatives de p .

Une correction à mon explication précédente

J'avais écrit que la quasi-totalité des orbites de $\mathbb{Q}^*$ sur $\mathbb{A}$ est dense. Je n'ai pas vérifié cette affirmation, et elle est trop forte. Ce qui est standard, et que la section utilise, c'est que l'action est **ergodique** : toute fonction continue invariante par $\mathbb{Q}^*$ est constante. Cela suffit à rendre le quotient ordinaire inutilisable, et à justifier de passer au produit croisé.

La non-commutativité de $X = \mathbb{A}/\mathbb{Q}^*$ est donc celle de ce produit croisé. Le modèle à deux premiers est mon illustration : il montre l'algèbre de la rotation irrationnelle d'angle $\log_2 3 \bmod 1$, mais il ne contient ni les autres premiers ni les restes modulo p^n .

Section12 non commutativite

TEX