

Paris, le 23/7/85

Cher Grothendieck,

Merci beaucoup pour les premiers chapitres de “Récoltes et Semailles” que tu m’as envoyés. Ils sont arrivés juste avant que je n’aille à Luminy (pour une réunion sur les méthodes numériques en théorie des nombres - un sujet certainement bien loin de tes préoccupations), et j’ai profité du voyage et de mon séjour là-bas pour les regarder, assez en détail. (Je dis quand même “regarder” car je n’ai pas pu m’astreindre à les lire dans l’ordre, et ligne à ligne. Ce texte est vraiment trop répétitif pour qu’on puisse le lire ainsi. Tu l’as écrit comme une espèce de “journal de bord”, et l’on ne peut guère faire plus que de le consulter localement.)

Il y aurait beaucoup à dire sur le fond. Comme je te l’ai dit au téléphone (ce qui m’a fait du tort dans ton esprit, cf L. 26), je suis triste que tu sois aussi amer sur Deligne, qui est l’un des mathématiciens les plus honnêtes que je connaisse - et l’un de ceux qui te sont le plus attachés. Je n’essaierai pas de te faire changer d’avis à ce sujet (ni au sujet de quoi que ce soit d’autre) : je sais trop la solidité et la rigidité de tes convictions. C’est sans doute ce que je trouve de plus pénible dans ton texte. Cela, et le ton général de récrimination, soit sur toi-même, soit sur tes élèves. D’ailleurs, tu dois te rendre compte inconsciemment de ce ton récriminateur, car tu as tenté de l’exorciser (L. 23) :

“... qui a préservé mon témoignage de jamais virer (je crois) à la récrimination stérile...”

Cette page est d’ailleurs remarquable par la phrase qui la suit, qui est si contradictoire que l’on se demande comment tu as pu la taper à la machine sans rire : “Cette absence de complaisance vis-à-vis de moi-même...”

Comment peux-tu ?

Parmi les questions que tu discutes, il y a :

- Mebkhout et les faisceaux pervers. Il doit y avoir près d’une centaine de pages là-dessus, avec une curieuse terminologie de “théorème du Bon Dieu” que j’ai eu bien du mal à comprendre (j’ai fini par voir que “du Bon Dieu” signifiait que c’était un beau théorème). Comme je n’ai jamais essayé de comprendre ce qu’est un “faisceau pervers” (ce terme de “pervers” me déplaît tout autant qu’à toi, voilà un point où nous sommes d’accord), je ne suis pas compétent.
- Publication de SGA 5 et de SGA 4 $\frac{1}{2}$. Cette publication m’a paru très utile. Les notes polycopiées existantes de SGA 5 étaient à la fois incomplètes et peu convaincantes ; je me souviens d’un exposé d’Illusie sur la formule des traces où celui-ci avouait avoir été incapable de vérifier toutes les compatibilités de diagrammes nécessaires. Or on ne peut pas se borner à dire que les diagrammes qu’on écrit “doivent” commuter - surtout quand des choses aussi sérieuses (pour moi...) que la conjecture de Weil ou celle de Ramanujan en dépendent ! (Si

le diagramme naturel “dualité algébrique = dualité analytique” commutait, on en déduirait que π est algébrique, comme tu sais - et même que $2i\pi = 1$.)

Quant au fait que personne n’ait rédigé ton exposé de conjectures, c’est bien naturel seul l’auteur peut écrire de tels textes. J’imagine avec horreur que quelqu’un essaie d’écrire un exposé où j’aurais fait des conjectures (par exemple sur les représentations ℓ -adiques) je suis sûr d’avance qu’il y en aurait des quantités qui seraient fausses !

- Non continuation de ton œuvre par tes anciens élèves. Tu as raison : ils n’ont pas continué. Cela n’est guère surprenant : c’était toi qui avais une vision d’ensemble du programme, pas eux (sauf Deligne, bien sûr). Ils ont préféré faire autre chose. Je vois mal pourquoi tu le leur reprocherais.

En ce qui concerne Deligne, il a évolué petit à petit vers des questions qui débordent le cadre de la géométrie algébrique : formes modulaires, représentations, programme de Langlands. Et il a utilisé sa profonde compréhension de la géométrie algébrique (“motifs” compris) pour diverses questions - par exemple la construction avec Lusztig de beaucoup (pas toutes...) de représentations des groupes $G(\mathbb{F}_q)$, G réductif. Pourquoi n’aurait-il pas utilisé le yoga des “motifs” ? Tu l’as introduit, tout le monde le sait, et tout le monde a le droit de s’en servir - à condition de bien distinguer ce qui est conjectural dedans (et peut-être même faux, jusqu’à preuve du contraire), et ce qui peut être démontré. J’ai trouvé très beau, par exemple, ce que fait Deligne dans LN 900 (le texte que tu rejettes avec horreur...) pour contourner le problème des cycles de Hodge, et obtenir malgré cela des résultats fort utiles (par exemple pour les représentations ℓ -adiques). Je sais bien que l’idée même de “contourner une difficulté” t’est étrangère - et c’est peut-être cela qui te choque le plus dans les travaux de Deligne (autre exemple dans sa démonstration des conjectures de Weil, il “contourne” les “conjectures standard” - cela te choque, mais cela me ravit).

(En fait, malgré ce que tu dis dans L28, mes façons de penser ne sont pas très différentes - profondeur à part - de celles de Deligne. Et elles sont assez éloignées des tiennes - ce qui explique d’ailleurs que nous nous soyons très bien complétés pendant 10 ou 15 ans, comme tu le dis très gentiment dans ton premier chapitre.)

À propos de choses gentilles, j’ai beaucoup aimé ce que tu dis sur le Bourbaki de tes débuts, sur Cartan, Weil et moi, et particulièrement sur Dieudonné. Peut-être as-tu envie d’avoir des nouvelles fraîches de ces gens-là ? En voici : Cartan a 81 ans, et n’a pas changé. Il est toujours aussi vif, c’est un plaisir de le voir. Il ne fait pas de maths à proprement parler, mais s’occupe de ce que j’appelle “les bonnes œuvres” (mathématiciens en prison, ou asile psychiatrique façon URSS). Il a une calculette programmable SHARP avec laquelle il s’amuse beaucoup ; récemment il me posait des questions pas triviales sur les unités des corps quadratiques réels.

Weil est un peu fatigué physiquement (il traîne la jambe, au sens propre), mais pas du tout intellectuellement. Il s’est arrêté de faire des maths, mais continue à s’intéresser à leur histoire. Tu as vu peut-être le très beau livre de lui “*Number Theory - An approach through history from Hammurapi to Legendre*”, paru en 1983 chez Birkhäuser. J’espérais qu’il en écrirait une suite (sur Gauss, Jacobi et les autres), mais je ne crois pas qu’il le fasse. D’après ce qu’il m’a dit, il s’occupe en ce moment de l’édition des Œuvres (ou de la correspondance ?) de l’un des Bernoulli.

Dieudonné, tu le sais sûrement, avait subi plusieurs opérations il y a quelques années. Elles l'ont beaucoup fatigué, et il a perdu ce côté "force de la nature" qui était le sien. Il a achevé la rédaction de son grand traité d'Analyse (9 volumes, culminant par groupes de Lie et topologie différentielle élémentaire) et il travaille à une histoire de la Topologie.

Il y aurait bien d'autres choses à dire sur ton texte. Je me limite à des questions typographiques :

- J'aime beaucoup les caractères de ta machine à écrire (ou de celle de la secrétaire?). C'est vraiment très joli, et très lisible.

- Pour les parties que tu veux mettre en évidence, tu utilises un intervalle entre les lettres :

"À l a P o u r s u i t e d e s C h a m p s", par exemple.

C'est peu lisible. As-tu essayé le demi-intervalle :

À l a P o u r s u i t e d e s C h a m p s"?

C'est un peu mieux (mais c'est moins facile à faire à la machine).

- "cru" ne prend un accent circonflexe que lorsque c'est le participe passé du verbe croître "j'ai crû en sagesse", mais "j'ai cru en la conjecture de Hodge" (et, curieusement, on dit "Le cru et le cuit" sans accent circonflexe : c'est illogique, mais c'est comme ça).

- À propos de "ça", je trouve désagréable ton habitude d'omettre la cédille dans "Ça", avec une majuscule pourquoi ne taperais-tu pas une virgule au-dessous du "C", comme je viens de le faire ?

- ambiguë et non ambigüe.

- Ramanujan et non Ramanuyam (p. 192, 195, 225).

- (p. 263) 355/113 et non 355/133 (qui serait < 3 , contredisant ce que tu viens d'expliquer!) ¹.

1. *L'extrait de Récoltes et semailles pour comprendre cette correction* : Cette confiance qu'un enfant peut avoir en ses propres lumières, en se fiant à ses facultés plutôt que de prendre pour argent comptant les choses apprises à l'école ou lues dans les livres, est une chose précieuse. Elle est constamment découragée pourtant par l'entourage. Beaucoup verront dans l'expérience que je rapporte ici l'exemple d'une présomption enfantine, qui a dû s'incliner devant le savoir reçu - les faits faisant enfin éclater un certain ridicule. Tel que j'ai vécu cet épisode, il n'y avait pourtant nullement le sentiment d'une déconvenue, d'un ridicule, mais bien celle d'une nouvelle découverte (après celle que j'avais hâtivement interprétée par la formule fausse $\pi = 3$) : celle d'une erreur, et au même moment celle qu'on devait avoir $\pi > 3$, car visiblement la longueur d'un arc est plus grande que celle de la corde qui joint les deux extrémités. Cette inégalité allait d'ailleurs bien dans le sens de la formule récusée $\pi = 3,14\dots$ qui, du coup, prenait des allures raisonnables, en même temps que j'ai dû entrevoir alors qu'il y avait peut-être des gens pas si

Bien à toi,

J-P. Serre

PS - Dans ta lettre, tu t'étonnes des tons différents de mes deux lettres.

Voici l'explication :

Dans la première, je te parlais de mes propres résultats, depuis une quinzaine d'années, et je t'en parlais sans enthousiasme excessif - cela correspond à ce que j'en pense.

Dans la seconde, je te parlais de ce que l'on a fait en maths ces derniers temps, et là j'avais le droit d'être tout à fait enthousiaste : nous vivons une époque remarquablement riche, au moins autant que celle que tu as connue.

D'où la différence de tons.

Les Aumettes, le 25.7.1985

Cher Serre,

J'ai été content tantôt de recevoir ta lettre, où tu me donnes tes premières impressions de lecture sur *Récoltes et Semailles*. Comme je pouvais m'y attendre, tu as rejeté dans ce témoignage ce qui pouvait t'être désagréable, mais cela ne t'a pas empêché au moins de le lire (partiellement, tout au moins), et de "prendre" quand même ce qui t'est agréable (tout ce qui est "gentil", comme tu écris!). Je n'étais nullement sûr que tu lirais au-delà de la Lettre introductive, t'annonçant la couleur. Une chose qui m'avait déjà frappé en toi dans les années soixante (si ce n'est avant déjà), c'est que la seule idée de porter un regard sur soi-même te hérissait - je me rappelle encore combien j'avais été interloqué de t'entendre dire un jour, je ne me rappelle plus trop à quelle occasion, que dans le seul fait de dire une chose désavantageuse sur son propre compte, tu sentais un "cynisme" (c'est là ton expression), se surajoutant à la chose désavantageuse en question (supposée fondée). Je ne crois pas avoir discuté alors de la chose avec toi - j'ai dû sentir cette fois (contrairement à mes habitudes d'alors) que ce serait peine perdue. Je suis resté alors sous le coup d'un étonnement, comme devant un mystère... Pourtant, dans ce temps-là et jusqu'en ces dernières (neuf) années,

idiots que ça qui devaient s'être penchés sur la question. À ce moment, ma curiosité était d'ailleurs satisfaite, et je ne me rappelle pas avoir voulu en savoir plus long alors sur les tenants et aboutissants de ce nombre, si important, il fallait croire, qu'on lui destinait une lettre à lui tout seul (*). *Et la note de bas de page correspondante* (*) (28 avril) L'évocation qui précède a fait remonter d'autres souvenirs, qui montrent que ce fameux nombre m'intriguait plus que je ne croyais d'abord m'en souvenir. La valeur approchée $355/113$, trouvée dans un livre (peut-être le même), m'avait frappé - elle était si jolie que j'avais du mal à croire qu'elle ne soit qu'approchée! Ne connaissant alors d'autres nombres que les nombres fractionnaires, j'étais intrigué par l'allure que pourraient avoir le numérateur et le dénominateur de la fraction irréductible qui exprimait - ce devaient être des nombres bien remarquables! Inutile de dire que je ne suis pas allé bien loin dans ces réflexions enfantines sur la quadrature du cercle.

ce n'était guère dans mes habitudes, non plus de risquer un regard sur moi-même (ni même, à vrai dire, sur autrui). Mais l'idée qu'on puisse le faire, en allant au-delà d'une façade "gentille", ne m'inspirait aucun mouvement de recul viscéral, comme celui que je constatais chez toi. Ça ne changeait pas grand chose, peut-être, puisque j'étais intimement persuadé (sans même avoir eu à jamais me poser la question) que dans mon propre cas, tout au moins, il n'y avait aucune façade - que mes idées (ou plutôt, mes intimes convictions, car c'était ainsi que je les percevais) me concernant, n'étaient autre chose que le fidèle reflet de la réalité vraie, de ce que j'étais bel et bien. En cela, comme en beaucoup d'autres choses bien sûr, je ne me distinguais en rien de toi ou de n'importe qui.

Toujours est-il que je sais bien que, mis à part même le fait que tu es personnellement (et nommément) impliqué dans ma réflexion, celle-ci ne peut manquer de susciter en toi des réactions de défense et de rejet très fortes, de par son esprit même. Pas plus qu'en maths, mon propos n'est d'être "gentil" ou "pas gentil", mais de découvrir une réalité, en la "disant au fur et à mesure que je la sonde, comme moyen de découverte. Tu qualifies mon texte (ou ma démarche ?) de "complaisant", et c'est là en toi une autre intime conviction sans doute, se présentant avec un caractère "d'évidence" tel, que la pensée ne te serait pas venue de préciser où tu voyais complaisance. Ça m'intéresserait pourtant bien, si tu voulais prendre la peine de le préciser (si dans une telle peine, ou dans cette question que je viens de poser, tu ne vois une "complaisance" encore !). Est-ce dans le fait de m'exprimer sans réticence au sujet de la beauté d'une œuvre (qui se trouve être la mienne), et que je sens profondément, avec les "triples" de mon esprit, si on peut dire ? Ces choses-là, si vivement senties soient-elles, restent presque toujours dans le non-dit. Il a fallu tout l'impact sur mon être (l'an dernier) du saccage et de la dérision frappant cette œuvre, pour que ce sentiment profond me reliant à elle trouve les voies du langage pour s'exprimer clairement, "devant ceux qui affectent de dédaigner et devant les témoins indifférents". Il est vrai que cet "acte de respect" t'interpelle fortement - et ceci d'autant plus que quelque chose au fond de toi y acquiesce, qu'il y trouve une résonance. Car toi aussi, tout en t'en défendant souvent, tu as senti cette beauté vivante, cette puissance, dans cette œuvre d'un autre dont tu as été plus proche, pendant longtemps, qu'aucun autre (à part moi). C'est à cause de tout cela, sans doute, qu'il n'y aurait rien d'étonnant à ce que tu rejettes cette interpellation comme une "complaisance" en moi ; car d'après les consensus courants (qui viennent à la rescousse à point nommé), on est censé sentir seulement la beauté d'autrui et de l'œuvre d'autrui et s'exprimer à son sujet (une chose donc qui reste extérieure à nous), et jamais celle qui imprègne notre propre personne ou les œuvres de nos amours.

Il n'est d'ailleurs nullement exclu qu'il se trouve des passages dans RS où une complaisance aurait trouvé à se glisser - c'est le contraire qui serait étonnant ! Ce n'est pas de cela qu'il s'agit, quand je parle "d'absence de complaisance" - mais de la tonalité de base, de l'esprit qui anime l'ensemble de la réflexion. Mais il est probable que cette expression "complaisance" (comme bien d'autres sans doute) a pour toi un sens bien différent de celui qu'elle a pour moi - et il ne peut en être différemment, si ce qui est l'objet même de la quête poursuivie dans RS est pour toi objet d'un rejet viscéral ! Et c'est ce même rejet encore, j'imagine, qui fait que tu ne fasses aucune allusion à l'avant-dernière lettre, assez personnelle, où je t'annonçais l'envoi de la partie introductive de RS...

Je te remercie pour tes commentaires typographiques, orthographiques etc - pour ce qui est des derniers, j'en tiendrai compte dans la version imprimée ("s'il se trouve éditeur assez fou..."). Pour la machine à écrire je n'ai aucun mérite, c'est celle de la Fac ! Quant à la mienne, tu commences à

la connaître, j'imagine... Cela m'a fait plaisir aussi de recevoir des nouvelles de Cartan, Weil, Dieu-donné. Si tu m'en parles, c'est sans doute qu'il t'arrive encore de les rencontrer ? Aux Séminaires Bourbaki, j'imagine ?

Ta lettre s'est croisée avec la mienne, où justement je te disais que j'étais impatient d'avoir tes échos à RS III et IV que je t'y annonce, et que tu recevras peut-être en même temps que cette lettre-ci. Mais dans tout ça, je crains (et tu ne dois pas être le seul), le bât va blesser au même endroit - c'est que tout ça est un peu personnel !

Bien cordialement à toi,

A. Grothendieck

Paris, le 8 février 1986

Cher Grothendieck,

J'ai bien reçu le fascicule de R. et S. que tu m'as fait envoyer. Merci beaucoup. Il me manque encore l'avant-dernier fascicule (pages 500 à 800, en gros) dont j'ai seulement quelques pages isolées, que j'aimerais replacer dans leur contexte. Peux-tu me le faire envoyer aussi, de sorte que j'aie un jeu complet ? Merci d'avance.

Une chose me frappe, dans les textes que j'ai pu voir : tu t'étonnes et tu t'indignes de ce que tes anciens élèves n'aient pas continué l'œuvre que tu avais entreprise et menée en grande partie à bien. Mais tu ne te poses pas la question la plus évidente, celle à laquelle tout lecteur s'attend à ce que tu répondes :

pourquoi, toi, tu as abandonné l'œuvre en question ?

Tu parles, par exemple, de Jouanolou et de son peu d'intérêt pour sa propre thèse (limites projectives intervenant dans la cohomologie ℓ -adique). Ce peu d'intérêt n'est pas surprenant : il s'agit là de résultats techniques qui ne prennent un sens que dans le cadre du programme que tu étais le seul à maîtriser. Mais toi qui avais créé ce programme, pourquoi l'as-tu abandonné ? La réponse à cette question aurait mérité au moins la moitié des quelques 1200 pages que tu consacres à Verdier, Deligne, moi, etc. Autant que je puisse m'en souvenir, c'est vers 1968-1970 que ton intérêt dans ton propre programme avait baissé. Il faut dire que le chapitre V des EGA (celui que tu n'as pas écrit : sections hyperplanes en tout genre) n'était guère enthousiasmant. Certes, il aurait été utile (j'ai appris récemment avec plaisir que P. Blass avait l'intention de le ressusciter, avec ton autorisation mais pas ta collaboration), mais il n'aurait rien contenu d'aussi original que les chapitres I et III par exemple. Je comprends très bien que tu aies reculé devant le travail de mise au point nécessaire - mais si c'est le cas, tu ne peux pas reprocher aux autres, beaucoup moins motivés (encore les motifs, diras-tu...), d'avoir reculé aussi.

J'ai l'impression que, malgré ton énergie bien connue, tu étais tout simplement fatigué de l'énorme travail que tu avais entrepris. D'autant plus qu'il y avait aussi les SGA qui prenaient du retard, année après année. Je me souviens notamment de l'état plutôt désastreux de SGA 5 où les rédacteurs se perdaient dans des masses de diagrammes dont ils étaient réduits à affirmer sans preuve la commutativité (au signe près, en étant optimiste...); et ces commutativités étaient essentielles pour la suite. C'est à cet état désastreux (et non pas idyllique comme on le croirait à lire R. et S.) que se réfère ma phrase du séminaire Bourbaki : "... la version définitive de SGA 5, qui devrait être plus convaincante que les exposés polycopiés existants".

On aimerait avoir tes impressions sur tout ceci, même modifiées par 15 ans "d'enterrement" pour employer tes termes. On reste sur sa faim.

On peut se demander, par exemple, s'il n'y a pas une explication plus profonde que la simple fatigue d'avoir à porter à bout de bras tant de milliers de pages. Tu décris quelque part ton approche des maths, où l'on n'attaque pas un problème de front, mais où on l'enveloppe et le dissout dans une marée montante de théories générales. Très bien : c'est là ta façon de travailler, et ce que tu as fait montre que cela marche effectivement. Du moins pour les EVT et la géométrie algébrique... C'est beaucoup moins clair pour la théorie des nombres (où les structures en jeu sont loin d'être évidentes - ou plutôt, où toutes les structures possibles sont en jeu); même réserve pour la théorie des formes modulaires, visiblement plus riche que son simple aspect "groupes de Lie" et son simple aspect "géométrie algébrique - schémas de modules". D'où la question : ne serais-tu pas arrivé, vers 1968-1970, à te rendre compte que la méthode "marée montante" était impuissante contre ce genre de problèmes, et qu'il fallait changer de style - ce qui te déplaisait ?

Voilà le genre de questions qu'on se pose.

Bien à toi,

J-P. Serre

Paris, le 31 décembre 1986

Cher Grothendieck,

Tu vas recevoir un de ces jours une copie de "*Sur les représentations modulaires de degré 2 de $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$* ", un travail que j'ai rédigé ces derniers mois, mais qui était en fait en chantier depuis une douzaine d'années.

J'ai envie de t'expliquer un peu de quoi il s'agit, car tu risques d'être rebuté par le côté technique des §§ 1, 2 et 3 et je ne suis pas sûr que tu aimes beaucoup les exemples numériques du § 5.

Tu te souviens sans doute de la conjecture avancée par Weil en 1966 : toute courbe elliptique sur $\mathbb{Q}$ est "modulaire". On a appelé ça la "conjecture de Weil"; on dit maintenant "conjecture de

Taniyama-Weil” ou “conjecture de Shimura-Taniyama”, suivant les auteurs, mais peu importe. Le grand intérêt de cette conjecture est qu’elle décrit comment on peut obtenir les motifs les plus simples qui soient : ceux de dimension 2, de hauteur 1 et de corps de base $\mathbb{Q}$. En particulier, si la conjecture est vraie (et elle a été vérifiée numériquement dans de très nombreux cas), la fonction zêta du motif a les propriétés analytiques (prolongement et équation fonctionnelle) que l’on pense.

Plus généralement, toutes les fonctions zêta attachées aux motifs devraient (conjecturalement) provenir de “représentations modulaires” convenables ; il y a là-dessus des conjectures assez précises de Langlands et Deligne.

Ce que j’ai essayé de faire dans le texte que je t’envoie, c’est un analogue (modulo p) de la conjecture de Weil en question. On veut décrire en termes de formes modulaires (modulo p) certaines représentations galoisiennes. Ces représentations sont en apparence très spéciales ; ce sont des représentations

$$\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) \rightarrow \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_p),$$

irréductibles (sinon ce n’est pas très intéressant) et de déterminant impair (la conjugaison complexe doit avoir un déterminant égal à -1). La conjecture que je fais est que toutes ces représentations sont “modulaires”, i.e. proviennent de formes modulaires modulo p dont je prédis en outre le niveau et le poids (la recette prédisant le niveau est très naturelle - celle du poids ne l’est pas). Bien entendu, je ne suis pas du tout sûr que cette conjecture soit vraie ! Mais elle est étayée par quantité d’exemples mi-théoriques, mi-numériques, et j’ai fini par me décider à la publier. D’autant plus que ses applications sont nombreuses :

- a) elle entraîne la conjecture de Weil citée au début, ainsi que des conjectures analogues sur des motifs de hauteur > 1 (cf. le §4 de mon texte) ; a priori, cela peut paraître surprenant : comment déduire un énoncé de caractéristique 0 d’un énoncé de caractéristique p ? C’est beaucoup moins surprenant lorsqu’on se rend compte qu’on a une infinité de p à sa disposition.
- b) elle entraîne le (grand) théorème de Fermat, ainsi que des variantes assez surprenantes : non-existence de solutions non triviales de $x^p + y^p + \ell z^p = 0$, $p \geq 11$, pour ℓ premier égal à 3, 5, 7, 11, 17, 19, ... (mais la méthode ne s’applique pas à $\ell = 31$).
- c) elle entraîne que tout schéma en groupes sur $\mathbb{Z}$, plat, fini, de type (p, p) est somme directe (pour $p \geq 3$) de copies de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ et de μ_p . (Attention : il ne s’agit que de schémas de rang 2. Je ne sais rien faire pour un rang plus grand.)

Bien sûr, on serait un peu plus rassuré si on savait faire une conjecture générale (sur un corps global quelconque, pour des représentations de dimension quelconque). J’y ai souvent réfléchi, mais je ne vois pas comment faire (et cependant je suis sûr que c’est possible, au moins dans certains cas). On verra bien...

Bien à toi - et meilleurs vœux pour 1987,

J-P. Serre

Les Aumettes, le 25.1.1987

Cher Serre,

Merci pour ton tirage à part, et pour la peine que tu t'es donnée pour m'en expliquer les tenants et les aboutissants. Je me rends compte par ta lettre qu'il y a des belles maths qui se font, mais aussi et surtout, que ce genre de lettres et le travail qu'elles commentent méritent des interlocuteurs et lecteurs plus disponibles que je ne le suis. De plus en plus, mes recherches m'éloignent de ce qui est communément considéré comme un travail "scientifique" (sans pour autant que j'aie l'impression d'une véritable "coupure", dans l'ardeur et dans l'esprit que je mets dans mon travail) - et il serait d'ailleurs tout à fait inutile que je t'en parle, ne fut-ce qu'en quelques mots. Mais j'en parlerai pour ceux que cela pourra intéresser (s'il s'en trouve...). J'ai d'ailleurs pris la décision de prendre ma retraite l'an prochain (j'aurai alors soixante ans), pour me sentir plus libre de poursuivre dans une direction qui ne s'insère dans aucune "discipline" reconnue d'utilité publique et subventionnable comme telle, et où je suis le seul à m'engager. Mon intérêt pour la mathématique n'est pas éteint, mais je doute qu'il me restera le loisir d'écrire les quelques esquisses à grands traits que je prévoyais encore d'écrire.

Je profite de cette occasion pour te souhaiter une heureuse année 1987, et tout le succès que tu souhaites dans ton travail.

Bien cordialement,

A. Grothendieck