S'amuser avec les nombres

Denise Vella-Chemla

20/11/2011

On peut trouver sur la toile un article concernant les identités de Newton*, dont on recopie un extrait :
En algèbre, les identités de Newton fournissent, dans les espaces de polynômes en plusieurs variables, un lien entre les polynômes symétriques élémentaires et les sommes de Newton, c'est-à-dire les sommes de puissances des indéterminées.

On pose $s_k = r_1^k + \cdots + r_n^k$, *où les* r_i *sont les racines de* $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0$. *On peut démontrer :*

$$\begin{aligned}
&a_n s_1 + 1 a_{n-1} = 0,\\
&a_n s_2 + a_{n-1}s_1 + 2a_{n-2} = 0,\\
&a_n s_3 + a_{n-1}s_2 + a_{n-2}s_1 + 3a_{n-3} = 0,\\
&\vdots\\
&a_n s_d + a_{n-1}s_{d-1} + \ldots + a_{n-d+1}s_1 + d a_{n-d} = 0.
\end{aligned}$$

On va l'appliquer à un polynôme pour montrer l'aspect magique de ces résultats.

Les nombres $1, 3, 7, 9$ et 11 sont tous solutions de l'équation :

$$x^5 - 31x^4 + 350x^3 - 1730x^2 + 3489x - 2079 = 0$$

On a :

$$\begin{aligned}
s_1 &= 1 + 3 + 7 + 9 + 11 = 31\\
\\
s_2 &= 1^2 + 3^2 + 7^2 + 9^2 + 11^2\\
&= 1 + 9 + 49 + 81 + 121\\
&= 261\\
\\
s_3 &= 1^3 + 3^3 + 7^3 + 9^3 + 11^3\\
&= 1 + 27 + 343 + 729 + 1331\\
&= 2431\\
\\
s_4 &= 1^4 + 3^4 + 7^4 + 9^4 + 11^4\\
&= 1 + 81 + 2401 + 6561 + 14641\\
&= 23685\\
\\
s_5 &= 1^5 + 3^5 + 7^5 + 9^5 + 11^5\\
&= 1 + 243 + 16807 + 59049 + 161051\\
&= 237151
\end{aligned}$$

*http://fr.wikipedia.org/wiki/Identités_de_Newton

Ecrivons les identités de Newton et vérifions-les.

$s_1 + 1.(-31) = 0$
$31 - 31 = 0$

$s_2 - 31s_1 + 2.(350) = 0$
$261 - 31.31 + 700 = 0$
$961 - 961 = 0$

$s_3 - 31s_2 + 350s_1 + 3.(-1730) = 0$
$2431 - 31.(261) + 350.(31) + 3.(-1730) = 0$
$2431 - 8091 + 10850 - 5190 = 0$

$s_4 - 31s_3 + 350s_2 - 1730s_1 + 4.(3489) = 0$
$23685 - 31.(2431) + 350.(261) - 1730.(31) + 4.(3489) = 0$
$23685 - 75361 + 91350 - 53630 + 13956 = 0$

$s_5 - 31s_4 + 350s_3 - 1730s_2 + 3489s_1 + 5.(-2079) = 0$
$237151 - 31.(23685) + 350.(2431) - 1730.(261) + 3489.(31) + 5.(-2079) = 0$
$237151 - 734235 + 850850 - 451530 + 108159 - 10395 = 0$

On pourrait inversement exprimer les nombres entiers successifs $1, 2, 3, 4$ et 5 en fonction des sommes de puissances des indéterminées et des coefficients du polynôme, de la façon suivante :

$$+1 = -\frac{a_n s_1}{a_{n-1}}$$

$$+2 = -\frac{a_n s_2 + a_{n-1} s_1}{a_{n-2}}$$

$$+3 = -\frac{a_n s_3 + a_{n-1} s_2 + a_{n-2} s_1}{a_{n-3}}$$

$$\vdots$$

$$+d = -\frac{a_n s_d + a_{n-1} s_{d-1} + \ldots + a_{n-d+1} s_1}{a_{n-d}}$$