Découverte d'une loi tout extraordinaire
par rapport à certaines sommes de restes des nombres premiers

Denise Vella-Chemla

7/7/2012

1 Introduction

Dans cette note, on présente une découverte surprenante que l'on vient d'effectuer sur certaines sommes de restes des nombres premiers.

Représentons les premiers entiers naturels par leurs restes modulo les nombres premiers successifs.
Pour passer du *"mot"* d'un nombre au mot de son successeur selon l'arithmétique de Peano, on ajoute à ce mot le mot n-uplet infini $(1, 1, 1, 1, \ldots)$ qui représente l'entier naturel 1.

mod	2	3	5	7	11	13	17	19	...
1	1	1	1	1	1	1	1	1	...
2	0	2	2	2	2	2	2	2	...
3	1	0	3	3	3	3	3	3	...
4	0	1	4	4	4	4	4	4	...
5	1	2	0	5	5	5	5	5	...
6	0	0	1	6	6	6	6	6	...
7	1	1	2	0	7	7	7	7	...
8	0	2	3	1	8	8	8	8	...
9	1	0	4	2	9	9	9	9	...
10	0	1	0	3	10	10	10	10	...
11	1	2	1	4	0	11	11	11	...
12	0	0	2	5	1	12	12	12	...
13	1	1	3	6	2	0	13	13	...
14	0	2	4	0	3	1	14	14	...
15	1	0	0	1	4	2	15	15	...

On a entouré dans la table les restes que l'on va sommer au paragraphe suivant.

2 Calcul des sommes de restes de chaque nombre entier

Pour copier la forme d'un paragraphe de l'article d'Euler *Découverte d'une loi tout extraordinaire des nombres par rapport à la somme de leurs diviseurs**, introduisons la fonction f qui associe à tout x entier la somme des restes de x dans ses divisions par tous les nombres premiers inférieurs ou égaux à x.

On peut modifier une phrase qu'Euler utilise pour présenter les images par sa fonction sommes des diviseurs des nombres de 1 à 100 ainsi : *pour mettre devant les yeux la progression des sommes des restes des nombres selon les modules premiers qui leur sont inférieurs, j'ajouterai la table suivante qui contient ces sommes pour les nombres naturels depuis l'unité jusqu'à 100.*

*L. Euler, *Découverte d'une loi tout extraordinaire des nombres par rapport à la somme de leurs diviseurs*, Commentatio 175 indicis Enestroemiani, Bibliothèque impartiale 3, 1751, p.10-31.

$f(1) = 0$	$f(21) = 26$	$f(41) = 74$	$f(61) = 171$	$f(81) = 308$
$f(2) = 0$	$f(22) = 21$	$f(42) = 75$	$f(62) = 156$	$f(82) = 287$
$f(3) = 1$	$f(23) = 29$	$f(43) = 88$	$f(63) = 164$	$f(83) = 309$
$f(4) = 1$	$f(24) = 33$	$f(44) = 89$	$f(64) = 180$	$f(84) = 320$
$f(5) = 3$	$f(25) = 37$	$f(45) = 95$	$f(65) = 180$	$f(85) = 321$
$f(6) = 1$	$f(26) = 31$	$f(46) = 84$	$f(66) = 182$	$f(86) = 299$
$f(7) = 4$	$f(27) = 37$	$f(47) = 98$	$f(67) = 200$	$f(87) = 290$
$f(8) = 6$	$f(28) = 37$	$f(48) = 108$	$f(68) = 200$	$f(88) = 300$
$f(9) = 7$	$f(29) = 46$	$f(49) = 116$	$f(69) = 193$	$f(89) = 323$
$f(10) = 4$	$f(30) = 46$	$f(50) = 124$	$f(70) = 198$	$f(90) = 337$
$f(11) = 8$	$f(31) = 56$	$f(51) = 119$	$f(71) = 217$	$f(91) = 341$
$f(12) = 8$	$f(32) = 65$	$f(52) = 119$	$f(72) = 232$	$f(92) = 340$
$f(13) = 13$	$f(33) = 62$	$f(53) = 134$	$f(73) = 252$	$f(93) = 330$
$f(14) = 10$	$f(34) = 54$	$f(54) = 145$	$f(74) = 234$	$f(94) = 305$
$f(15) = 8$	$f(35) = 53$	$f(55) = 145$	$f(75) = 247$	$f(95) = 305$
$f(16) = 12$	$f(36) = 59$	$f(56) = 152$	$f(76) = 247$	$f(96) = 324$
$f(17) = 18$	$f(37) = 70$	$f(57) = 146$	$f(77) = 250$	$f(97) = 348$
$f(18) = 20$	$f(38) = 61$	$f(58) = 131$	$f(78) = 253$	$f(98) = 364$
$f(19) = 27$	$f(39) = 57$	$f(59) = 147$	$f(79) = 274$	$f(99) = 375$
$f(20) = 28$	$f(40) = 62$	$f(60) = 154$	$f(80) = 289$	$f(100) = 393$

Et là, chose extraordinaire, lorsqu'on calcule les différences entre les images par f de deux nombres entiers successifs, on réalise que ces différences nous permettent de voir apparaître trivialement les nombres premiers car les différences en question pour ces nombres sont les nombres entiers naturels successifs depuis 1.

$f(1) = 0$		$f(21) = 26$		$f(41) = 74$	12	$f(61) = 171$	17	$f(81) = 308$	
$f(2) = 0$		$f(22) = 21$		$f(42) = 75$		$f(62) = 156$		$f(82) = 287$	
$f(3) = 1$	1	$f(23) = 29$	8	$f(43) = 88$	13	$f(63) = 164$		$f(83) = 309$	22
$f(4) = 1$		$f(24) = 33$		$f(44) = 89$		$f(64) = 180$		$f(84) = 320$	
$f(5) = 3$	2	$f(25) = 37$		$f(45) = 95$		$f(65) = 180$		$f(85) = 321$	
$f(6) = 1$		$f(26) = 31$		$f(46) = 84$		$f(66) = 182$		$f(86) = 299$	
$f(7) = 4$	3	$f(27) = 37$		$f(47) = 98$	14	$f(67) = 200$	18	$f(87) = 290$	
$f(8) = 6$		$f(28) = 37$		$f(48) = 108$		$f(68) = 200$		$f(88) = 300$	
$f(9) = 7$		$f(29) = 46$	9	$f(49) = 116$		$f(69) = 193$		$f(89) = 323$	23
$f(10) = 4$		$f(30) = 46$		$f(50) = 124$		$f(70) = 198$		$f(90) = 337$	
$f(11) = 8$	4	$f(31) = 56$	10	$f(51) = 119$		$f(71) = 217$	19	$f(91) = 341$	
$f(12) = 8$		$f(32) = 65$		$f(52) = 119$		$f(72) = 232$		$f(92) = 340$	
$f(13) = 13$	5	$f(33) = 62$		$f(53) = 134$	15	$f(73) = 252$	20	$f(93) = 330$	
$f(14) = 10$		$f(34) = 54$		$f(54) = 145$		$f(74) = 234$		$f(94) = 305$	
$f(15) = 8$		$f(35) = 53$		$f(55) = 145$		$f(75) = 247$		$f(95) = 305$	
$f(16) = 12$		$f(36) = 59$		$f(56) = 152$		$f(76) = 247$		$f(96) = 324$	
$f(17) = 18$	6	$f(37) = 70$	11	$f(57) = 146$		$f(77) = 250$		$f(97) = 348$	24
$f(18) = 20$		$f(38) = 61$		$f(58) = 131$		$f(78) = 253$		$f(98) = 364$	
$f(19) = 27$	7	$f(39) = 57$		$f(59) = 147$	16	$f(79) = 274$	21	$f(99) = 375$	
$f(20) = 28$		$f(40) = 62$		$f(60) = 154$		$f(80) = 289$		$f(100) = 393$	

On se contentera de citer Euler dans le texte, en utilisant l'orthographe de son époque : *Ces choses remarquées, il ne sera pas difficile de faire l'application de cette formule à chaque nombre premier proposé et de se convaincre de sa vérité, par autant d'exemples qu'on voudra développer. Et comme je dois avouër que je ne suis pas en état d'en donner une démonstration rigoureuse, j'en ferai voir sa justesse par un assez grand nombre d'exemples. [...] Je crois ces exemples suffisants pour ne pas s'imaginer que c'est par un pur hazard que ma règle se trouve d'accord avec la vérité.*