Pourquoi la moyenne des parties fractionnaires des parties réelles des zéros de zêta semble-t-elle être asymptotiquement égale à 1/2 ? (Denise Vella-Chemla, 7.3.2018)

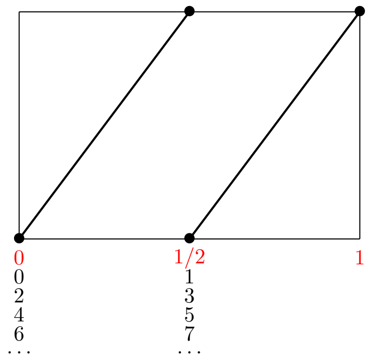
On voudrait fournir ici une explication informelle à une constatation effectuée récemment et qui est que la moyenne des parties fractionnaires des parties réelles des zéros de la fonction zêta semble tendre vers 1/2.

On utilise pour illustrer cette explication la notion de fonction ou signal en dents-de-scie dont on peut trouver une présentation dans les pages wikipedia en français (https://fr.wikipedia.org/wiki/Signal$_{e}n_{d}ents_{d}e_{s}cie$) ou en anglais (https://en.wikipedia.org/wiki/Sawtooth$_{w}ave$).

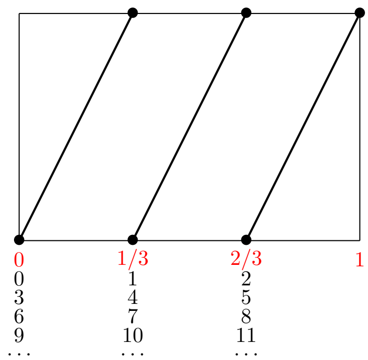
On pense au Snurpf, système de Numération par les Restes (modulaires de Gauss) dans les Parties Finies de $\mathbb{N}$. On conçoit aisément que les restes des divisions euclidiennes des nombres entiers successifs par 2 (en commençant par l'entier 1) sont 1, 0, 1, 0, 1, etc. De même les restes des divisions euclidiennes des entiers successifs par 3 sont 1, 2, 0, 1, 2, 0, 1, 2, 0, etc.

Pour représenter ces *fonctions croissantes "restes de divisions euclidiennes"* ainsi décrites (et qui retombent régulièrement à 0) , on se place sur l'intervalle $[0, 1]$ et on utilise des fonctions en dents-de-scie.

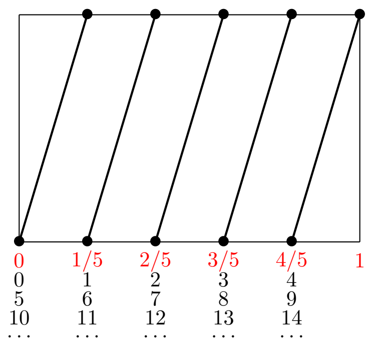
Voici la fonction en dents-de-scie qui permet de visualiser la notion de parité. Les entiers impairs ont pour image le point médian, les pairs ont pour image 0.



Voici la fonction en dents-de-scie qui permet de visualiser la notion de divisibilité par 3. Les entiers qui ont pour reste 1 dans la division euclidienne par 3 ont pour image le point 1/3, ceux qui ont pour reste 2 ont pour image le point 2/3, et les nombres divisibles par 3 ont pour image 0.



Voici la fonction en dents-de-scie qui permet de visualiser la notion de divisibilité par 5. Les nombres qui ont pour reste r dans la division euclidienne par 5 ont pour image $r/5$.



Comme les fonctions en dents-de-scie sont périodiques, il faut les imaginer sur un tore (ou du moins un cylindre). Sur les bords verticaux des représentations planes du cylindre ci-dessus vont se retrouver tous les nombres multiples d'un nombre donné, ainsi que le nombre en question. La périodicité qui fait que la fonction attribue la même image à deux nombres dont la différence vaut 1 s'exprime par la condition $x(t) = t \ (mod\ 1)$.

Il faut imaginer les nombres qui ne sont pas divisibles (par 3 par exemple) comme positionnés sur les lignes verticales de part et d'autre de la droite $x = 1/2$. Les nombres premiers doivent être équitablement répartis entre ces deux ordonnées de localisation (les densités associés à de tels sous-ensembles de nombres dans $\mathbb{N}$ doivent être égales). On imagine qu'on peut trouver une fonction qui envoie les entiers qui ont pour reste 1 dans une division euclidienne par 3 sur le "lieu" $x = 1/3$ et qui envoie les entiers qui ont pour reste 2 dans une division euclidienne par 3 sur le "lieu" $x = 2/3$.

On peut "mélanger" ou "agréger" toutes les fonctions en dents-de-scie en une seule fonction par la fonction inverse de la décomposition en série de Fourier. Du fait de l'équilibre des restes des divisions euclidiennes, les nombres doivent se répartir équitablement de part et d'autre de la droite $x = 1/2$. L'article wikipedia en anglais fournit comme renseignement supplémentaire : *"a sawtooth wave's sound is harsh and clear and its spectrum contains both even and odd harmonics of the fundamental frequency. Because it contains all the integer harmonics, it is one of the best waveforms to use for subtractive synthesis of musical sounds, particularly bowed string instruments like violins and cellos, since the slip-stick behavior of the bow drives the strings with a sawtooth-like motion."*.