Théorie des groupes et Conjecture de Goldbach

Denise Vella-Chemla

26 janvier 2013

1 Introduction

La conjecture de Goldbach stipule que tout nombre pair n plus grand que 2 est la somme de deux nombres premiers. Dans la suite, on n'étudie pas les nombres pairs vérifiant trivialement la conjecture de Goldbach, de la forme $2p$ avec p premier.

Les décomposants de Goldbach de n sont des éléments inversibles de l'anneau $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, qui sont premiers à n ; les éléments inversibles sont en nombre $\varphi(n)$ et la moitié d'entre eux sont inférieurs ou égaux à $n/2$. On prend pour convention de noter les classes d'équivalence par leur plus petit représentant positif.

Notons $G_n = (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*/\{1,-1\}$, le quotient de $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*$ par le sous groupe $\{1,-1\}$.

2 Exemples

Les données qui suivent ont été trouvées en utilisant le logiciel de programmation basé sur la théorie des groupes GAP.

2.1 $n = 88 = 2^3.11$

Intéressons-nous à G_{88}. Les éléments de G_{88} au nombre de 20 ($= \varphi(88)/2$), sont les nombres premiers à 88 : $1, 3, 5, 7, 9, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 25, 27, 29, 31, 35, 37, 39, 41, 43$ et inférieurs à $44 = 88/2$. Les tailles des classes des éléments de G_{88} sont bien systématiquement des diviseurs de $10 = 11 - 1$.

$G_{88} = C10 \times C2$.

Ecrivons les puissances des éléments de G_{88} (sauf 1) qui séparent le groupe en sous-groupes :

3 : $(1, 3, 9, 27, 7, 21, 25, 13, 39, 29)$ $(5, 15, 43, 41, 35, 17, 37, 23, 19, 31)$,

5 : $(1, 5, 25, 37, 9, 43, 39, 19, 7, 35)$ $(3, 15, 13, 23, 27, 41, 29, 31, 21, 17)$,

7 : $(1, 7, 39, 9, 25)$ $(3, 21, 29, 27, 13)$ $(5, 35, 19, 43, 37)$ $(15, 17, 31, 41, 23)$,

9 : $(1, 9, 7, 25, 39)$ $(3, 27, 21, 13, 29)$ $(5, 43, 35, 37, 19)$ $(15, 41, 17, 23, 31)$,

13 : $(1, 13, 7, 3, 39, 21, 9, 29, 25, 27)$ $(5, 23, 35, 15, 19, 17, 43, 31, 37, 41)$,

15 : $(1, 15, 39, 31, 25, 23, 7, 17, 9, 41)$ $(3, 43, 29, 5, 13, 19, 21, 37, 27, 35)$,

17 : $(1, 17, 25, 15, 9, 23, 39, 41, 7, 31)$ $(3, 37, 13, 43, 27, 19, 29, 35, 21, 5)$,

$\mathbf{19}$: $(1, 19, 9, 5, 7, 43, 25, 35, 39, 37)$ $(3, 31, 27, 15, 21, 41, 13, 17, 29, 23)$,

$\mathbf{21}$: $(1, 21)$ $(3, 25)$ $(5, 17)$ $(7, 29)$ $(9, 13)$ $(15, 37)$ $(19, 41)$ $(23, 43)$ $(27, 39)$ $(31, 35)$,

$\mathbf{23}$: $(1, 23)$ $(3, 19)$ $(5, 27)$ $(7, 15)$ $(9, 31)$ $(13, 35)$ $(17, 39)$ $(21, 43)$ $(25, 41)$ $(29, 37)$,

$\mathbf{25}$: $(1, 25, 9, 39, 7)$ $(3, 13, 27, 29, 21)$ $(5, 37, 43, 19, 35)$ $(15, 23, 41, 31, 17)$,

$\mathbf{27}$: $(1, 27, 25, 29, 9, 21, 39, 3, 7, 13)$ $(5, 41, 37, 31, 43, 17, 19, 15, 35, 23)$,

$\mathbf{29}$: $(1, 29, 39, 13, 25, 21, 7, 27, 9, 3)$ $(5, 31, 19, 23, 37, 17, 35, 41, 43, 15)$,

$\mathbf{31}$: $(1, 31, 7, 41, 39, 23, 9, 15, 25, 17)$ $(3, 5, 21, 35, 29, 19, 27, 43, 13, 37)$,

$\mathbf{35}$: $(1, 35, 7, 19, 39, 43, 9, 37, 25, 5)$ $(3, 17, 21, 31, 29, 41, 27, 23, 13, 15)$,

$\mathbf{37}$: $(1, 37, 39, 35, 25, 43, 7, 5, 9, 19)$ $(3, 23, 29, 17, 13, 41, 21, 15, 27, 31)$,

$\mathbf{39}$: $(1, 39, 25, 7, 9)$ $(3, 29, 13, 21, 27)$ $(5, 19, 37, 35, 43)$ $(15, 31, 23, 17, 41)$,

$\mathbf{41}$: $(1, 41, 9, 17, 7, 23, 25, 31, 39, 15)$ $(3, 35, 27, 37, 21, 19, 13, 5, 29, 43)$,

$\mathbf{43}$: $(1, 43)$ $(3, 41)$ $(5, 39)$ $(7, 37)$ $(9, 35)$ $(13, 31)$ $(15, 29)$ $(17, 27)$ $(19, 25)$ $(21, 23)$

On est tenté de regrouper certains éléments sous-prétexte que leurs puissances appartiennent à des ensembles égaux (si ce n'est que leurs éléments sont trouvés dans des ordres différents.

On regroupe les éléments 2 par 2, selon que leur produit est congru à ± 1 $(mod\ n)$.
Ainsi, il semble naturel de regrouper 3 et 29.
On regroupe également 13 et 27, ou bien 15 et 41, ou encore 17 et 31, ainsi que 5 et 35, ou enfin 19 et 37.
Dans chacun de ces ensembles, on trouve un décomposant de Goldbach de 88.
En effet, $5, 17, 29$ et 41 sont des décomposants de Goldbach de 88.

2.2 Etude d'autres cas pour lesquels G_n n'est pas un groupe cyclique

- $n = 24 = 2^3.3$
  Groupe : C2×C2
  $G_{24} = \{1, 5, 7, 11\}$.

  5 : (1,5) (7,11)
  7 : (1,7) (5,11)
  11 : (1,11) (5,7)

  Décomposants de Goldbach de 24 : 5, 7, 11.

- $n = 40 = 2^3.5$
  Groupe : C4×C2
  $G_{40} = \{1, 3, 7, 9, 11, 13, 17, 19\}$.

  3 : (1,3,9,13) (7,17,19,11)
  7 : (1,7,9,17) (3,19,13,11)
  9 : (1,9) (3,13) (7,17) (11,19)
  11 : (1,11) (3,7) (9,19) (17,13)
  13 : (1,13,9,3) (7,11,17,19)
  17 : (1,17,9,7) (3,11,13,19)
  19 : (1,19) (3,17) (7,13) (9,11)

Décomposants de Goldbach de 40 : 3, 11, 17.

On regroupe 3 et 13 d'une part, 7 et 17 d'autre part.
Chaque regroupement contient un décomposant de Goldbach de 40.

- $n = 48 = 2^4.3$
  Groupe : C4×C2
  $G_{48} = \{1, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23\}$.

  5 : (1,5,23,19) (7,13,17,11)
  7 : (1,7) (5,13) (11,19) (17,23)
  11 : (1,11,23,13) (5,7,19,17)
  13 : (1,13,23,11) (5,17,19,7)
  17 : (1,17) (5,11) (7,23) (13,19)
  19 : (1,19,23,5) (7,11,17,13)
  23 : (1,23) (5,19) (7,17) (11,13)

  Décomposants de Goldbach de 48 : 5, 7, 11, 17, 19.

  On regroupe 5 et 19 d'une part, 11 et 13 d'autre part.
  Chaque regroupement contient un décomposant de Goldbach de 48.

- $n = 56 = 2^3.7$
  Groupe : C6×C2
  $G_{56} = \{1, 3, 5, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 23, 25, 27\}$.

  3 : (1,3,9,27,25,19) (5,15,11,23,13,17)
  5 : (1,5,25,13,9,11) (3,15,19,17,27,23)
  9 : (1,9,25) (3,27,19) (5,11,13) (15,23,17)
  11 : (1,11,9,13,25,5) (3,23,27,17,19,15)
  13 : (1,13) (3,17) (5,9) (11,25) (15,27) (19,23)
  15 : (1,15) (3,11) (5,19) (9,23) (13,27) (17,25)
  17 : (1,17,9,15,25,23) (3,5,27,11,19,13)
  19 : (1,19,25,27,9,3) (5,17,13,23,11,15)
  23 : (1,23,25,15,9,17) (3,13,19,11,27,5)
  25 : (1,25,9) (3,19,27) (5,13,11) (15,17,23)
  27 : (1,27) (3,25) (5,23) (9,19) (11,17) (13,15)

  Décomposants de Goldbach de 56 : 3, 13, 19.

  On regroupe 3 et 19 d'une part, 5 et 11 d'autre part et enfin 17 et 23.
  Deux regroupements des trois ci-dessous contiennent un décomposant de Goldbach de 56.

- $n = 60 = 2^2.3.5$
  Groupe : C4×C2
  $G_{60} = \{1, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29\}$.

  7 : (1,7,11,17) (13,29,23,19)
  11 : (1,11) (7,17) (13,23) (19,29)
  13 : (1,13,11,23) (7,29,17,19)
  17 : (1,17,11,7) (13,19,23,29)
  19 : (1,19) (7,13) (11,29) (17,23)
  23 : (1,23,11,13) (7,19,17,29)
  29 : (1,29) (7,23) (11,19) (13,17)

  Décomposants de Goldbach de 60 : 7, 13, 17, 19, 23, 29.

  On regroupe 7 et 17 d'une part, 13 et 23 d'autre part.
  Les regroupements contiennent chacun un décomposant de Goldbach de 60 (et même deux).

- $n = 72 = 2^3.3^2$
  Groupe : C6×C2
  $G_{72} = \{1, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 25, 29, 31, 35\}$.

  5 : (1,5,25,19,23,29) (7,35,31,11,17,13)
  7 : (1,7,23,17,25,31) (5,35,29,13,19,11)
  11 : (1,11,23,35,25,13) (5,17,29,31,19,7)
  13 : (1,13,25,35,23,11) (5,7,19,31,29,17)
  17 : (1,17) (5,13) (7,25) (11,29) (19,35) (23,31)
  19 : (1,19) (5,23) (7,11) (13,31) (17,35) (25,29)
  23 : (1,23,25) (5,29,19) (7,17,31) (11,35,13)
  25 : (1,25,23) (5,19,29) (7,31,17) (11,13,35)
  29 : (1,29,23,19,25,5) (7,13,17,11,31,35)
  31 : (1,31,25,17,23,7) (5,11,19,13,29,35)
  35 : (1,35) (5,31) (7,29) (11,25) (13,23) (17,19)

  Décomposants de Goldbach de 72 : 5, 11, 13, 19, 29, 31

  On regroupe 5 et 29 d'une part, 7 et 31 d'autre part et enfin 11 et 13.
  Les regroupements contiennent chacun un décomposant de Goldbach de 72 (et même parfois deux).

- $n = 80 = 2^4.5$
  Groupe : C4xC4
  $G_{80} = \{1, 3, 7, 9, 11, 13, 17, 19, 21, 23, 27, 29, 31, 33, 37, 39\}$.

  3 : (1,3,9,27) (7,21,17,29) (11,33,19,23) (13,39,37,31)
  7 : (1,7,31,23) (3,21,13,11) (9,17,39,33) (19,27,29,37)
  9 : (1,9) (3,27) (7,17) (11,19) (13,37) (21,29) (23,33) (31,39)
  11 : (1,11,39,29) (3,33,37,7) (9,19,31,21) (13,17,27,23)
  13 : (1,13,9,37) (3,39,27,31) (7,11,17,19) (21,33,29,23)
  17 : (1,17,31,33) (3,29,13,19) (7,39,23,9) (11,27,21,37)
  19 : (1,19,39,21) (3,23,37,17) (7,27,33,13) (9,11,31,29)
  21 : (1,21,39,19) (3,17,37,23) (7,13,33,27) (9,29,31,11)
  23 : (1,23,31,7) (3,11,13,21) (9,33,39,17) (19,37,29,27)
  27 : (1,27,9,3) (7,29,17,21) (11,23,19,33) (13,31,37,39)
  29 : (1,29,39,11) (3,7,37,33) (9,21,31,19) (13,23,27,17)
  31 : (1,31) (3,13) (7,23) (9,39) (11,21) (17,33) (19,29) (27,37)
  33 : (1,33,31,17) (3,19,13,29) (7,9,23,39) (11,37,21,27)
  37 :(1,37,9,13) (3,31,27,39) (7,19,17,11) (21,23,29,33)
  39 : (1,39) (3,37) (7,33) (9,31) (11,29) (13,27) (17,23) (19,21)

  Décomposants de Goldbach de 80 : 7, 13, 19, 37.

  On regroupe 3 et 27 d'une part, 7 et 23 d'autre part, également 11 et 29 ou bien 13 et 37 ou encore 17 et 33, et enfin 19 et 21.
  Trois regroupements contiennent un décomposant de Goldbach de 80 (et un regroupement en contient deux).

- $n = 84 = 2^2.3.7$
  Groupe : C6xC2
  $G_{84} = \{1, 5, 11, 13, 17, 19, 23, 25, 29, 31, 37, 41.\}$

  5 : (1,5,25,41,37,17)(11,29,23,31,13,19)
  11 : (1,11,37,13,25,23) (5,29,17,19,41,31)
  13 : (1,13) (5,19) (11,25) (17,31) (23,37) (29,41)
  17 : (1,17,37,41,25,5) (11,19,13,31,23,29)
  19 : (1,19,25,29,37,31) (5,11,41,23,17,13)
  23 : (1,23,25,13,37,11) (5,31,41,19,17,29)
  25 : (1,25,37) (5,41,17) (11,23,13) (19,29,31)
  29 : (1,29) (5,23) (11,17) (13,41) (19,37) (25,31)

31 : (1,31,37,29,25,19) (5,13,17,23,41,11)
37 : (1,37,25) (5,17,41) (11,13,23) (19,31,29)
41 : (1,41) (5,37) (11,31) (13,29) (17,25) (19,23)

Décomposants de Goldbach de 84 : 5, 11, 13, 17, 23, 31, 37, 41.

On regroupe 5 et 17 d'une part, 11 et 23 d'autre part, également 19 et 31 et enfin 25 et 37.
Tous les regroupements contiennent un décomposant de Goldbach de 84 (et parfois même deux).

- $n = 96 = 2^5.3$
  Groupe : C8xC2
  $G_{96} = \{1, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 25, 29, 31, 35, 37, 41, 43, 47\}$.

  5 : (1,5,25,29,47,43,23,19) (7,35,17,11,41,13,31,37)
  7 : (1,7,47,41) (5,35,43,13) (11,19,37,29) (17,23,31,25)
  11 : (1,11,25,13,47,37,23,35) (5,41,29,31,43,7,19,17)
  13 : (1,13,23,11,47,35,25,37) (5,31,19,41,43,17,29,7)
  17 : (1,17) (5,11) (7,23) (13,29) (19,35) (25,41) (31,47) (37,43)
  19 : (1,19,23,43,47,29,25,5) (7,37,31,13,41,11,17,35)
  23 : (1,23,47,25) (5,19,43,29) (7,31,41,17) (11,35,37,13)
  25 : (1,25,47,23) (5,29,43,19) (7,17,41,31) (11,13,37,35)
  29 : (1,29,23,5,47,19,25,43) (7,11,31,35,41,37,17,13)
  31 : (1,31) (5,37) (7,25) (11,43) (13,19) (17,47) (23,41) (29,35)
  35 : (1,35,23,37,47,13,25,11) (5,17,19,7,43,31,29,41)
  37 : (1,37,25,35,47,11,23,13) (5,7,29,17,43,41,19,31)
  41 : (1,41,47,7) (5,13,43,35) (11,29,37,19) (17,25,31,23)
  43 : (1,43,25,19,47,5,23,29) (7,13,17,37,41,35,31,11)
  47 : (1,47) (5,43) (7,41) (11,37) (13,35) (17,31) (19,29) (23,25)

  Décomposants de Goldbach de 96 : 7, 13, 17, 23, 29, 37, 43.

  On regroupe 5 et 19, 7 et 41, 11 et 35, 13 et 37, 19 et 29, 23 et 25 et enfin 29 et 43.
  Tous les regroupements contiennent un décomposant de Goldbach de 96.

Il semblerait que pour les nombres pairs n tels que G_n n'est pas cyclique, G_n est souvent égal à $C_{\varphi(n)/4} \times C2$ sauf dans le cas où $\varphi(n)/2$ est un carré (par exemple lorsque $n = 80$) auquel cas $G_n = C_{\sqrt{\varphi(n)/2}} \times C_{\sqrt{\varphi(n)/2}}$.

Il semblerait que les décomposants de Goldbach de n soient à rechercher dans les sous-groupes de G_n d'ordres les plus grands possibles (de taille $\varphi(n)/4$ dans tous les cas étudiés sauf pour $n = 80$ où l'ordre des sous-groupes des décomposants de Goldbach est égal à $\varphi(n)/8$).

3 Cas pour lesquels G_n est un groupe cyclique

Lorsque G_n est un groupe cyclique, il semblerait qu'on trouve systématiquement un générateur de ce groupe qui est un décomposant de Goldbach de n.

Ces cas sont nombreux : ils concernent tous les pairs doubles d'impairs (nombres pairs n de la forme $4k + 2$), tous les doubles de doubles de nombres premiers (nombres pairs n de la forme $4p$ avec p premier impair) ainsi que tous les nombres pairs qui sont des puissances de 2.

- $n = 8 = 2^3$
  Groupe : C2
  $G_8 = \{1, 3\}$
  Générateur du groupe : 3.
  Décomposant de Goldbach de 8 : 3.

- $n = 12 = 2^2.3$
  Groupe : C2
  $G_{12} = \{1, 5\}$
  Générateur du groupe : 5.
  Décomposant de Goldbach de 12 : 5.

- $n = 16 = 2^4$
  Groupe : C4
  $G_{16} = \{1, 3, 5, 7\}$
  Générateurs du groupe : 3, 5.
  Décomposants de Goldbach de 16 : 3, 5.

- $n = 18 = 2.3^2$
  Groupe : C3
  $G_{18} = \{1, 5, 7\}$
  Générateurs du groupe : 5, 7.
  Décomposants de Goldbach de 18 : 5, 7.

- $n = 20 = 2^2.5$
  Groupe : C4
  $G_{20} = \{1, 3, 7, 9\}$
  Générateurs du groupe : 3, 7.
  Décomposants de Goldbach de 20 : 3, 7.

- $n = 28 = 2^2.7$
  Groupe : C6
  $G_{28} = \{1, 3, 5, 9, 11, 13\}$
  Générateurs du groupe : 5, 11.
  Décomposants de Goldbach de 28 : 5, 11.

- $n = 30 = 2.3.5$
  Groupe : C4
  $G_{30} = \{1, 7, 11, 13\}$
  Générateurs du groupe : 7, 13.
  Décomposants de Goldbach de 30 : 7, 11, 13.

- $n = 32 = 2^5$
  Groupe : C8*
  $G_{32} = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15\}$
  Générateurs du groupe : 3, 5, 11, 13.
  Décomposants de Goldbach de 32 : 3, 13.

- $n = 36 = 2^2.3^2$
  Groupe : C6
  $G_{36} = \{1, 5, 7, 11, 13, 17\}$
  Générateurs du groupe : 5, 7.
  Décomposants de Goldbach de 36 : 5, 7, 13, 17.

- $n = 42 = 2.3.7$
  Groupe : C6
  $G_{42} = \{1, 5, 11, 13, 17, 19\}$
  Générateurs du groupe : 11, 19.
  Décomposants de Goldbach de 42 : 5, 11, 13, 19.

- $n = 44 = 2^2.11$
  Groupe : C10
  $G_{44} = \{1, 3, 5, 7, 9, 13, 15, 17, 19, 21\}$
  Générateurs du groupe : 3, 13, 15, 17.
  Décomposants de Goldbach de 44 : 3, 7, 13.

*Complémentaire : C4×C2

- $n = 50 = 2.5^2$
  Groupe : C10
  $G_{50} = \{1, 3, 7, 9, 11, 13, 17, 19, 21, 23\}$
  Générateurs du groupe : 3, 13, 17, 23.
  Décomposants de Goldbach de 50 : 3, 7, 13, 19.

- $n = 52 = 2^2.13$
  Groupe : C12
  $G_{52} = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 15, 17, 19, 21, 23, 25\}$
  Générateurs du groupe : 7, 11, 15, 19.
  Décomposants de Goldbach de 52 : 5, 11, 23.

- $n = 54 = 2.3^3$
  Groupe : C9†
  $G_{54} = \{1, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 25\}$
  Générateurs du groupe : 5, 7, 11, 13, 23, 25.
  Décomposants de Goldbach de 54 : 7, 11, 13, 17, 23.

- $n = 64 = 2^6$
  Groupe : C16
  $G_{64} = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 25, 27, 29, 31\}$
  Générateurs du groupe : 3, 5, 11, 13, 19, 21, 27, 29.
  Décomposants de Goldbach de 64 : 3, 5, 11, 17, 23.

- $n = 66 = 2.3.11$
  Groupe : C10
  $G_{66} = \{1, 5, 7, 13, 17, 19, 23, 25, 29, 31\}$
  Générateurs du groupe : 5, 7, 13, 19.
  Décomposants de Goldbach de 66 : 5, 7, 13, 19, 23, 29.

- $n = 68 = 2^2.17$
  Groupe : C16
  $G_{68} = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 19, 21, 23, 25, 27, 29, 31, 33\}$
  Générateurs du groupe : 3, 5, 7, 11, 23, 27, 29, 31.
  Décomposants de Goldbach de 68 : 7, 31.

- $n = 70 = 2.5.7$
  Groupe : C12
  $e_{70} = \{1, 3, 9, 11, 13, 17, 19, 23, 27, 29, 31, 33\}$
  Générateurs du groupe : 3, 17, 23, 33.
  Décomposants de Goldbach de 68 : 3, 11, 17, 23, 29.

- $n = 76 = 2^2.19$
  Groupe : C18
  $G_{76} = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 21, 23, 25, 27, 29, 31, 33, 35, 37\}$
  Générateurs du groupe : 13, 23, 25, 29, 33, 35.
  Décomposants de Goldbach de 68 : 3, 5, 17, 23, 29.

- $n = 78 = 2.3.13$
  Groupe : C12
  $G_{78} = \{1, 5, 7, 11, 17, 19, 23, 25, 29, 31, 35, 37\}$
  Générateurs du groupe : 7, 11, 19, 37.
  Décomposants de Goldbach de 68 : 5, 7, 11, 17, 19, 31, 37.

- $n = 90 = 2.3^2.5$
  Groupe : C12
  $G_{90} = \{1, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43\}$
  Générateurs du groupe : 7, 13, 23, 43.
  Décomposants de Goldbach de 68 : 7, 11, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 43.

† Complémentaire : C9

- $n = 92 = 2^2.23$
  Groupe : C22
  $G_{92} = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 25, 27, 29, 31, 33, 35, 37, 39, 41, 43, 45\}$
  Générateurs du groupe : 3, 5, 17, 21, 27, 31, 33, 35, 37, 39.
  Décomposants de Goldbach de 68 : 3, 13, 19, 31.

- $n = 98 = 2.7^2$
  Groupe : C21
  $G_{98} = \{1, 3, 5, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 23, 25, 27, 29, 31, 33, 37, 39, 41, 43, 45, 47\}$
  Générateurs du groupe : 3, 5, 9, 11, 17, 23, 25, 33, 37, 39, 45, 47.
  Décomposants de Goldbach de 68 : 19, 31, 37