Essayer de comprendre deux théorèmes, une proposition et deux lemmes de l'article de Connes-Consani de juin 2020 [2].

Théorème 3. La fonctionnelle $\mathrm{Tr}(\vartheta(f)\mathbf{S})$ est positive et on a

$$\mathrm{Tr}(\vartheta(f)\mathbf{S}) = W_\infty(f) + \int f(\rho)\epsilon(\rho)d^*\rho, \qquad \forall f \in C_c^\infty(\mathbb{R}_+^*), \tag{1}$$

où $\epsilon\left(\frac{1}{\rho}\right) = \epsilon(\rho)$, $d^*\rho = \dfrac{d\rho}{\rho}$, $\rho \in \mathbb{R}_+^*$, et avec $\epsilon(\rho)$ donné, pour $\rho \geqslant 1$, par

$$\epsilon(\rho) = \sum \frac{\lambda(n)}{\sqrt{1-\lambda(n)^2}} \langle \xi_n \mid \vartheta\left(\frac{1}{\rho}\right) \zeta_n \rangle. \tag{2}$$

Il est dit plus haut dans l'article que la définition de $\lambda(n)$ est à trouver dans la référence de Wang [6] : les $\lambda(n)$ sont les valeurs propres de l'opérateur suivant : fixons $c = 2\pi$. L'opérateur est défini par

$$F_{2\pi}[\phi](x) = \int_{-1}^{1} e^{2i\pi xt}\phi(t)\mathrm{d}t \qquad\qquad \text{avec } x \in (-1, 1).$$

Il s'agit d'utiliser des fonctions d'onde sphéroïdales prolate (en anglais Prolate Wave Spheroidal Functions ou PSWF), dont l'ensemble est noté

$$\left\{\psi_n^{2\pi}(x)\right\}_{n=0}^{\infty}$$

parce que ce sont des fonctions toutes réelles, lisses et qu'elles forment un système orthonormé complet dans $L^2(I)$ (*note :* à la place de 2π, on peut prendre n'importe quelle constante $c > 0$).

Voici comment on note l'orthonormalité :

$$\int_{-1}^{1} \psi_n^{2\pi}(x)\psi_m^{2\pi}(x)\mathrm{d}x = \delta_{mn}$$

δ_{mn} dénotant le symbole de Kronecker qui vaut 1 si $m = n$ et 0 sinon.

La définition de $W_\infty(f)$ est :

$$W_\infty(f) = -\frac{1}{2}\mathrm{Tr}(\widehat{f}u^* đu) \tag{3}$$

où $\widehat{f}$ est la transformée de Fourier d'une fonction-test f, $u = u_\infty$ est l'unitaire habituellement associé à la transformée de Fourier composée avec l'inversion et $đu$ est la différentielle quantifiée de u (voir thèse de Tate [5] et appendices).

Proposition 4.5.
(*i*) Appelons $\xi_n = \mathcal{P}_1\phi_n/\|\mathcal{P}_1\phi_n\|$, $\eta_n = \mathbb{F}_{e_\mathbb{R}}\xi_n$ et $\psi_n = P\eta_n$. On a

$$\mathcal{P}_1\eta_n = \mathcal{P}_1\mathbb{F}_{e_\mathbb{R}}\xi_n = \lambda(n)\xi_n. \tag{4}$$

(*ii*) Pour $\rho \geqslant 1$

$$\delta(\rho) = \mathrm{Tr}\left(\vartheta\left(\frac{1}{\rho}\right)\widehat{\mathcal{P}_1}\,\mathcal{P}_1\right) = \sum_n \left(\lambda(n)^2\langle \xi_n \mid \vartheta\left(\frac{1}{\rho}\right)\xi_n\rangle + \lambda(n)\langle \xi_n \mid \vartheta\left(\frac{1}{\rho}\right)\psi_n\rangle\right) \tag{5}$$

(*iii*) Les fonctions $\psi_n = P\mathbb{F}_{e_\mathbb{R}}\xi_n$ sont à valeurs réelles, deux à deux orthogonales, et : $\|\psi_n\| = \sqrt{1-\lambda(n)^2}$,

$$\sum \lambda(n)^2|\zeta_n\rangle\langle\zeta_n| \leqslant P\widehat{P}P, \qquad \zeta_n = \frac{1}{\sqrt{1-\lambda(n)^2}}\psi_n \tag{6}$$

(*iv*) Soit $\tau(n) := \dfrac{\lambda(n)}{\sqrt{1-\lambda(n)^2}}$, on a

$$\langle \xi_n \mid \vartheta\left(\frac{1}{\rho}\right)\xi_n\rangle = \langle \zeta_n \mid \vartheta\left(\frac{1}{\rho}\right)\zeta_n\rangle + \tau(n)(\langle \xi_n \mid \vartheta\left(\frac{1}{\rho}\right)\zeta_n)\rangle + \langle \zeta_n \mid \vartheta\left(\frac{1}{\rho}\right)\xi_n\rangle). \tag{7}$$

Théorème 4.7. Soit $\mathbf{S}$ la projection orthogonale de $L^2(\mathbb{R})_{\text{ev}}$ sur le sous-espace fermé $S(1,1)$. La fonctionnelle suivante est positive

$$\operatorname{Tr}(\vartheta(f)\mathbf{S}) = W_\infty(f) + \int f\left(\frac{1}{\rho}\right)\epsilon(\rho)d^*\rho, \qquad \forall f \in C_c^\infty(\mathbb{R}_+^*), \tag{8}$$

où W_∞ est définie par

$$W_\infty = -\int f\left(\frac{1}{\rho}\right)\tau(\rho)d^*\rho,$$

$\epsilon(\rho)$ est la fonction de $\rho \in \mathbb{R}_+^*$, avec $\epsilon\left(\frac{1}{\rho}\right) = \epsilon(\rho)$, qui est donné, pour $\rho \geqslant 1$, par

$$\epsilon(\rho) = \sum \frac{\lambda(n)}{\sqrt{1-\lambda(n)^2}}\langle \xi_n \mid \vartheta\left(\frac{1}{\rho}\right)\zeta_n\rangle. \tag{9}$$

Lemme 5.1. Soient $\xi, \eta \in L^2(\mathbb{R})_{\text{ev}}$ des fonctions lisses.

Alors avec Q défini par $Q(g) := \left(-(\rho\partial_\rho)^2 + \frac{1}{4}\right)g = f$ et $\mathcal{D} := D_u^2 + D_u$, on a

$$\langle \eta \mid \vartheta(Qf)\xi\rangle = -\langle \eta \mid \vartheta(f)\mathcal{D}\xi\rangle, \qquad \forall f \in C_c^\infty(\mathbb{R}_+^*). \tag{10}$$

Lemme 5.2. Soit $\xi \in C^\infty((0,1])$ et $\zeta \in C^\infty([1,\infty))$ des fonctions lisses et à valeurs réelles.

Prolongeons d'abord ξ, ζ à $[0,\infty)$ comme suit : $\xi(x) := 0$ pour $x > 1$ et $\zeta(x) := 0$ pour $x < 1$.

Alors, avec Q toujours définie de la même façon par $Q(g) := \left(-(\rho\partial_\rho)^2 + \frac{1}{4}\right)g = f$ et $k(\rho) = \sqrt{\rho}\int_0^\infty \xi(x)\zeta(\rho x)dx$, pour $\rho \in (1,2]$, on a

$$(Qk)(\rho) = \sqrt{\rho}\int_{1/\rho}^1 (D_u\xi)(x)(D_u\zeta)(\rho x)dx + \frac{1}{\sqrt{\rho}}(D_u\xi)\left(\frac{1}{\rho}\right)\zeta(1) - \sqrt{\rho}\xi(1)(D_u\zeta)(\rho). \tag{11}$$

Appendice 1 : résumé de calcul quantifié

Soit C un groupe abélien localement compact doté de l'homomorphisme (propre ?)

$$\operatorname{Mod} : C \to \mathbb{R}_+^*, \qquad \operatorname{Mod}(u) = |u| \quad u \in C.$$

On note $\widehat{C}$ le dual de Pontrjagin de C doté de sa mesure de Haar.

Les éléments $f \in L^\infty(\widehat{C})$ agissent comme des opérateurs multiplicatifs sur l'espace de Hilbert $\mathcal{H} := L^2(\widehat{C})$.

On définit la différentielle "quantifiée" de f comme étant l'opérateur

$$đf := [H,\, f] = Hf - fH, \tag{12}$$

où l'opérateur H sur $\mathcal{H}$ est

$$H := 2\mathbb{F}_C\,\mathbf{1}_P\,\mathbb{F}_C^{-1} - 1, \tag{13}$$

où $\mathbb{F}_C : L^2(C) \to \mathcal{H}$ est la transformée de Fourier, et $\mathbf{1}_P$ est la multiplication par la fonction caractéristique de l'ensemble $P = \{u \in C \text{ de module } |u| \geqslant 1\}$.

Prenons le cas $C = \mathbb{R}$ avec le module $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ considéré dans cet article et identifions le dual $\widehat{C} \sim \mathbb{R}$ en utilisant le bi-caractère $\nu(s,t) := e^{-ist}$ qui correspond à l'équation $\mu(v,s) = v^{-is}, \quad \forall v \in \mathbb{R}_+^*, s \in \mathbb{R}$. sous l'isomorphisme donné par le module. Nous donnons une preuve "géométrique" du lemme suivant (voir le livre d'Alain Connes [1], Chapitre IV pour la théorie générale, un opérateur compact est d'ordre infini quand ses valeurs caractéristiques forment une suite de décroissance rapide ; cela implique qu'il est de classe trace).

Lemme 1. *Pour $f \in \mathcal{S}(\widehat{C})$, la différentielle quantifiée $[H, f]$ est un infinitésimal d'ordre infini et en particulier est un opérateur de classe trace.*

Appendice 2 : Signes et normalisations

Nous suivons la thèse de Tate [5] et utilisons la formule classique exprimant la transformation de Fourier comme une composition de l'inversion

$$I(f)(s) := f(s^{-1}) \tag{14}$$

et de l'opérateur multiplicatif de convolution.

Dans notre modèle, l'unitaire u est donné par le ratio des facteurs locaux archimédiens sur la droite critique

$$u(s) = \frac{\pi^{-z/2}\Gamma(z/2)}{\pi^{-(1-z)/2}\Gamma((1-z)/2)}, \qquad z = 1/2 + is. \tag{15}$$

En fonction de la fonction angulaire de Riemann-Siegel définie par $\theta(E) = -\frac{E}{2}\log\pi + \Im\log\Gamma\left(\frac{1}{4} + i\frac{E}{2}\right)$, on a

$$u(s) = e^{2\,i\,\theta(s)}, \tag{16}$$

de telle façon que la fonction $Z(t) := e^{i\theta(t)}\zeta(\frac{1}{2} + it)$ est à valeurs réelles. En effet, cela découle de l'équation fonctionnelle puisque la fonction de zeta $\zeta_{\mathbb{Q}}(z) := \pi^{-z/2}\Gamma(z/2)\zeta(z)$ est de valeur réelle sur la droite critique.

La différentielle quantifiée $đf$ de f est donnée par le noyau

$$k(s,t) = \frac{i}{\pi}\,\frac{f(s) - f(t)}{s - t}. \tag{17}$$

Par conséquent, quand on prend la dérivée logarithmique de u, on obtient sur la diagonale

$$u^* đu(s) = e^{-2\,i\,\theta(s)}\,\frac{i}{\pi}\partial_s e^{2\,i\,\theta(s)} = -\frac{2}{\pi}\partial_s\theta(s) \implies \frac{1}{2}u^* đu(s) = \frac{-2\partial_s\theta(s)}{2\pi}. \tag{18}$$

Donc on peut écrire

$$\mathrm{Tr}(\hat{h}_1\left(\frac{1}{2}u^{-1}đu\right)\hat{h}_2) = -\int \hat{h}_1(t)\hat{h}_2(t)\frac{2\partial_t\theta(t)}{2\pi}dt. \tag{19}$$

Cela correspond à l'équation qu'on peut lire dans [3] et [4] $\mathcal{W}_\infty(f) = \int_{w=1/2+i\tau} h_+(\tau)\tilde{f}(w)\frac{d\tau}{2\pi}$ (qui contient une transformée de Mellin) puisque $\mathcal{W}_\mathbb{R} = -\mathcal{W}_\infty$ et à la formule de trace semi-locale

$$\mathrm{Tr}(\hat{h}_1\left(\frac{1}{2}u^{-1}đu\right)\hat{h}_2) = \sum_{v\in S}\int'_{\mathbb{Q}_v^*}\frac{|w|^{1/2}}{|1-w|}\,h(w)d^*w, \quad h = h_1 * h_2, \tag{20}$$

pour l'unique place archimédienne.

Références

[1] A. Connes, *Noncommutative geometry*, Academic Press, 1994.

[2] A. Connes, C. Consani, *Weil positivity and Trace formula, the archimedean place*, https://arxiv.org/abs/2006.13771.

[3] E. Bombieri, *The Riemann hypothesis.* The millennium prize problems, 107–124, Clay Math. Inst., Cambridge, MA, 2006.

[4] J. F. Burnol, *Sur les espaces de Sonine associés par de Branges à la transformation de Fourier.* C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 335 (2002) 689–692.

[5] J. Tate, *Fourier analysis in number fields and Hecke's zeta-function*, Ph.D. Thesis, Princeton, 1950. Reprinted in J.W.S. Cassels and A. Frölich (Eds.) "Algebraic Number Theory", Academic Press, 1967.

[6] L. L. Wang, *Analysis of spectral approximations using prolate spheroidal wave functions*, Math. of Comp. Volume **79**, Number 270, April 2010, Pages 807–827.

Le